№ в-та	Рівняння лінії	№ в-та	Рівняння лінії
1	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 2\sqrt[3]{\cos t} \\ y = 4\sin t \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = 6\cos(t/2) \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 8\cos^3(t/2) \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2(1-\sin t) \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 6\sin t \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 6\sqrt[3]{\sin t} \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 3(1+\cos t) \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = (8/\pi)t\sin t \\ y = -(8/\pi)t\cos t \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = 8\cos^3(t/2) \\ y = 2\sin t \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin 2t \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 3(1+\cos t) \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = 1+4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = 4\cos(t/2) \\ y = 2\sqrt{\sin(t/2)} \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sqrt[3]{\sin t} \end{cases}$
11	$\begin{cases} x = (2/\pi)t\sin t \\ y = (6/\pi)t\cos t \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = (4/\pi)t\cos t \\ y = (8/\pi)t\sin t \end{cases}$

12	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sqrt[3]{\sin t} \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = \sqrt[3]{\cos t} \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2(1+\sin t) \end{cases}$
14	$\begin{cases} x = 6\sqrt[3]{\cos(t/2)} \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = 4\sqrt[3]{\cos t} \\ y = 2\sin t \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = 8\cos t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = t+\sin t \\ y = 3(1-\cos t) \end{cases}$

Завдання 9. Застосовуючи стандартні границі, еквівалентні нескінченно малі та інші прийоми (крім правила Лопіталя), знайти вказані границі.

№ в-та	Границі
1	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{2x^3-4x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{2x^2+x-21}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{\sqrt{8x+1}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\,tg\,2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^x$
2	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+7}{5x^2+7x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x+6)-\ln x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+2}-x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{x\sin 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}$
3	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+3x^4-x}{8x^3-2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x^2-2x}{2x^2-x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+7}\right)^{3x}$

4	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2+5}{2x^2+9x-4}$; б) ‹)$\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-36}{6x^2-37x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{\sqrt{x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos7x-\cos x}{\cos6x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^x$
5	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-7}{8x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(x-2)-\ln(x+8))$; в) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2+x-28}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{3x^2-x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg^2x}{x\sin2x}$
6	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+5x-2}{2x^3+4x^2+7}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{x^2+4x}{x^2-4x+3}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x-48}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-1}\right)^{x+3}$
7	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-5x+28}{7x^3+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-49}{x^2-6x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg^2 3x}{x\sin2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{4x-5}\right)^{x-1}$
8	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+18x-3}{6x^4+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)(\ln(x+7)-\ln x)$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-7x-15}{x^2-10x+25}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin x-1}{(6x-\pi)^2}$; д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x^3-8}$
9	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6+4x-3}{5x^3+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{x^2+4}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+4}\right)^{4x}$

10	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7+6x-1}{4x^5-4x^3+3}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-3x+35}{x^2-2x-15}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^3+8}-3}{x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 4x}{arctg\,6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{6x}\right)^{3x-1}$
11	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+5x^2+1}{14x^4-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\cos 2x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{9x^2-4x-5}{x^2+2x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x-5}-2}{x^2-9}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x\sin 3x}$
12	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+7x^3-4}{3x^9+5x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-2}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2-3}{x^2-x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x-1}{x\ \sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)^{3x}$
13	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^7-5x^3+1}{3x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{4x^2-9x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x^2+11}-6}{x^3-125}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{x\,tg\,3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+6}\right)^{4x}$
14	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+5x^2-4}{x^6-6x^3+7}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-5)\left(\ln(x-9)-\ln x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{2-\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\,tg\,\dfrac{\pi x}{2}$; д) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{2x^2+x-6}$
15	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+7x^4-2}{3x^5+6x^3-x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+4x^2}-\sqrt{x^3-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2-x-5}{x^2+9x+8}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-6}\right)^{x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^3 x-\cos x}{x\,tg\,x}$

16	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+7x^2+1}{5x^4-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(2x+3)-\ln(2x-1)\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-7x-49}{x^2-14x+49}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x^3-64}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{arctg^2 3x}$
17	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+3x^4-9}{12x^3-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+5x-25}{x^2-x-30}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{4+x^2}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2\pi x}{x\, tg\, 3\pi x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x-2}$
18	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^6-7x^2+1}{5x^6+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2}-\sqrt{x^4-3}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-2x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\, arctg\, 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-x}{5+3x}\right)^{2/x}$
19	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6-5x^2+2}{6x^3+3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)\left(\ln(4x-1)-\ln 4x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{3x^2+5x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2-\sqrt{4-x^3}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} x\, ctg\, 4x$
20	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^2+4x}{6x^4+4x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\left(\ln(x-3)-\ln x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{\sqrt{x^3-18}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 7x}{arctg^2 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{2x^2-9x+4}$
21	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4-7x+4}{25x^2+x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{3x^2+7x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+2}{5x+2}\right)^{4x}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\sin\pi x}$

22	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-x+7}{6x^8+2x^6-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\big(\ln(5x-1)-\ln 5x\big)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-1}{\sqrt{4+3x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{4\sin^2 x-1}{36x^2-\pi^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-x-6}$
23	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-x^3+10}{2x^3+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{2x^2-x-105}{x^2+5x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{x^3-125}$; г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{arctg\,(x+2)}{x^2+2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-5x}{7x+2}\right)^{4/x}$
24	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-6x^2-1}{3x^2-x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+4x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2+x-42}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{(\pi-x)^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+3}{2x+3}\right)^{3/x}$
25	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x-3}{5x^6+6x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{2x^2+9x-18}{x^2-2x-48}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x^3}-1}{\sqrt{9+x^2}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+7}\right)^{2x}$
26	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-5x+3}{3x^5+2x^3-5}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+2)\big(\ln 3x-\ln(3x+1)\big)$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{\sqrt{5x}-x}$; г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{tg(x+1)}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-6x+5}$
27	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4+7x-2}{8x^4-2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x(\sin 5x-\sin 3x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^3-125}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-9x+9}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+3}\right)^{x}$

28	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5+5x^4-1}{3x^4+5x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+7)\big(\ln x-\ln(x+6)\big)$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2+27}+2x}{\sqrt{4-7x}-5}$; г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-7x+10}{3x^2-8x+4}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg^2x}{x\sin6x}$
29	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+7x^2-5}{18x^3-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-3x-4}{2x^2-9x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{\sqrt{3x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{2x}$
30	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-14x+2}{3x^4+7x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-9)\big(\ln x-\ln(x+3)\big)$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{7x+2}-4}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin7x}{tg^25x}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$

Завдання 10. Визначити точки розриву заданої функції та з'ясувати їх характер. Зобразити графічно цю функцію в околі кожної точки розриву.

№ в-та	Функція	№ в-та	Функція
1	$f(x)=\dfrac{1}{x-3}\text{arctg}\dfrac{1}{x-2}$	16	$f(x)=\dfrac{\sin(x-4)}{x^2-16}$
2	$f(x)=\dfrac{1}{x-4}\text{arctg}\dfrac{4}{x}$	17	$f(x)=\dfrac{1}{x-4}2^{4/x}$
3	$f(x)=2^{1/(x^2-1)}x$	18	$f(x)=\dfrac{x-1}{\lg(x-9)}$
4	$f(x)=\dfrac{1}{\pi x}\text{arctg}\dfrac{1}{1-x}$	19	$f(x)=\dfrac{3}{x-1}2^{3/(x+2)}$

5	$f(x)=\dfrac{1}{x-1}3^{2/(x-2)}$	20	$f(x)=\dfrac{\pi\sin x}{x(x-\pi)}$
6	$f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}2^{3/(x+2)}$	21	$f(x)=\dfrac{x}{\log_2(1+x)}$
7	$f(x)=\dfrac{1}{\pi(x-1)}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$	22	$f(x)=\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$
8	$f(x)=\dfrac{\log_2(2+x)}{x-1}$	23	$f(x)=\dfrac{1}{x}2^{4/(x-4)}$
9	$f(x)=\dfrac{\log_2(1+x^2)}{x^2-x}$	24	$f(x)=\dfrac{x-1}{\log_2(4+x)}$
10	$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x(x-1)}$	25	$f(x)=\dfrac{2^{2/x}}{x-2}$
11	$f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}\operatorname{arctg}(x-3)$	26	$f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(x-3)}$
12	$f(x)=\dfrac{\log_2(1+x^2)}{x^2-2x}$	27	$f(x)=\dfrac{1}{x-1}3^{2/(x+1)}$
13	$f(x)=\dfrac{2^{3/x}}{x-3}$	28	$f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-x}$
14	$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}\operatorname{arctg}(x+1)$	29	$f(x)=\dfrac{4}{x-2}2^{4/(x+2)}$
15	$f(x)=\dfrac{2}{x}3^{2/(x-2)}$	30	$f(x)=\dfrac{1}{x+3}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x}$

Змістовий модуль 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1. Похідна та диференціал

2.1.1. Похідна. Її фізичний та геометричний зміст

<u>Поняття похідної.</u> Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Оскільки точка x_0 фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\Delta y / \Delta x$, яке також буде функцією приросту аргументу Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x. *Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля* $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Еквівалентні позначення похідної y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 записується так: $f'(x_0)$, або $y = f'(x)\big|_{x=x_0}$, або $df(x_0)/dx$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням*** функції. Функція, що має похідну у точці x_0, називається ***диференційованою*** у цій точці.

Коли функція $y = f(x)$ диференційована у кожній точці проміжку $(a;b)$, то кажуть, що вона ***диференційована на проміжку*** $(a;b)$. Похідна функції $y = f(x)$, диференційованої у проміжку $(a;b)$, сама є функцією x.

<u>Теорема (зв'язок між поняттями диференційованості та неперервності)</u>. *Якщо функція* $y = f(x)$ *диференційована в деякій*

точці x_0*, то вона неперервна в цій точці.*

□ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=y'\cdot 0=0$. ■

Зауваження. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна в деякій точці x_0, то вона може бути як диференційованою, так і недиференційованою в цій точці. Наприклад, $y=|x|$ – недиференційована в точці $x=0$, хоч у цій точці неперервна.

Приклад 1. Дано функцію $y=x^2$. Знайти її похідну y':

а) в довільній точці x; б) коли $x=-3$.

□ а) Для будь-якого x маємо $y=x^2$. Якщо аргумент дорівнює $x+\Delta x$, то $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$. Звідси

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тоді $\Delta y/\Delta x=(2x\Delta x+(\Delta x)^2)/\Delta x=2x+\Delta x$. Обчислимо похідну $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$. б) $y'\big|_{x=-3}=2\cdot(-3)=-6$. ■

Фізичний зміст похідної. Нехай матеріальна точка рухається під дією деяких сил. Візьмемо який-небудь момент часу t_0 і розглянемо проміжок часу Δt від моменту t_0 до моменту $t=t_0+\Delta t$. За цей проміжок часу точка пройде певний шлях, який позначимо через $\Delta S(t_0)$. Цей шлях – функція Δt. За відомим з фізики означенням, відношення $\Delta S(t_0)/\Delta t$ є середня швидкість руху точки за час Δt. Розглядатимемо дедалі коротші проміжки Δt, що прямують до нуля. Границя

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta S(t_0)/\Delta t=S'(t_0)=V(t_0)$$

є миттєвою швидкістю точки у момент часу t_0.

Геометричний сенс похідної. Дотична і нормаль. Нехай дано деяку лінію *L* і на ній точку *M* (рис. 56). Візьмемо на лінії *L* деяку точку *N*, яка не збігається з точкою *M*. Пряма *MN* є січною для лінії *L*. Нехай тепер точка *N* наближається до точки *M*, залишаючись на лінії *L*. Тоді кожному положенню точки *N* відповідатиме своя січна і усі ці січні проходитимуть через точку *M*.

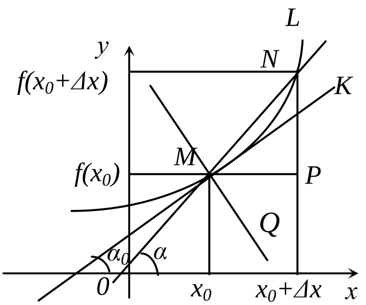

Рис. 56

Дотичною до лінії *L* у точці *M* називається граничне положення *MK* січної *MN*, якщо точка *N* прямує до точки *M*. Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія *L*, диференційована у точці x_0. У декартовій прямокутній системі координат точка *M*, яка лежить на графіку функції $y = f(x)$ має координати $\left(x_0;\ f(x_0)\right)$. Нехай точка *N* належить графіку функції (рис. 56) і має координати $\left((x_0 + \Delta x); f(x_0 + \Delta x)\right)$. Проведемо через точку *M* пряму, паралельну Ox, і позначимо точку її перетину з прямою $x = x_0 + \Delta x$ через *P*. Розглянемо прямокутний трикутник *MNP*.

Відношення $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x = tg\,\alpha$ дорівнює тангенсу кута нахилу січної *MN* до додатного напряму осі Ox.

Якщо приріст $\Delta x \to 0$, то геометрично це означає, що точка $N(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ рухатиметься по лінії *L*, наближаючись до точки *M*, а кут α прямуватиме до кута α_0 – кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x\right] = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\alpha.$$

Оскільки границя лівої частини рівності дорівнює $y'_0 = f'(x_0)$, а границя правої частини дорівнює $tg\,\alpha_0$, тому $tg\,\alpha_0 = y'_0$. тобто *значення похідної функції* $f'(x)$, *у точці* x_0, *дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної.*

Тоді <u>рівняння дотичної</u> до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку *M* з координатами $\left(x_0;\ y_0\right)$, можна записати у вигляді

$$y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0).$$

Пряма *MQ*, яка проходить через точку дотику *M* і перпендикулярна до дотичної *MK*, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***). Її рівняння

$$y - y_0 = \left(-1/y'_0\right) \cdot (x - x_0).$$

Приклад 2. Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці $M(1/2;\, 1/4)$. Скласти рівняння дотичної.

□ Візьмемо похідну від функції $y = x^2$: $y' = 2x$. Тоді: $tg\,\alpha = y'(x_0) = 2 \cdot (1/2) = 1$; $\alpha = arctg\,1 = 45^\circ$ – кут нахилу дотичної; $y - 1/4 = 1 \cdot (x - 1/2)$; $y = x - 1/4$ – дотична. ■

2.1.2. Правила диференціювання. Похідна складеної та оберненої функцій

Правила диференціювання. Нехай маємо деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a; b)$. Тоді:

1) Якщо $y = cu$, то $y' = (cu)' = cu'$, де $c = const$,

тобто *сталий множник можна виносити з-під знаку похідної*;

2) Якщо $y = u \pm v$, то $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$,

тобто *похідна суми або різниці функцій дорівнює відповідно сумі або різниці їх похідних*;

3) Якщо $y = uv$, то $y' = (uv)' = u'v + v'u$,

тобто *похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію*;

4) Якщо $y = \dfrac{u}{v}$, де $v \neq 0$, то $y' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$,

тобто *похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник*.

Кожне а цих правил можна розглядати як теорему.

Доведемо, наприклад, правило для дробу $y = u/v$. Якщо Δy, Δu і Δv є прирости функцій $y(x)$), $u(x)$, $v(x)$, відповідні приросту Δx аргументу x, то $y + \Delta y = (u + \Delta u)/(v + \Delta v)$,

$$\Delta y = (u + \Delta u)/(v + \Delta v) - u/v = (v\Delta u - u\Delta v)/(v(v + \Delta v)).$$

Останню рівність розділимо на Δx:

$$\Delta y/\Delta x = (v\Delta u - u\Delta v)/(\Delta x \cdot v(v + \Delta v)) =$$

$$= (v\Delta u/\Delta x - u\Delta v/\Delta x)/(v(v + \Delta v)).$$

Знайдемо границю цього співвідношення. Маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (v\Delta u/\Delta x - u\Delta v/\Delta x) / \lim_{\Delta x \to 0} (v(v + \Delta v)) =$$

$$= (v \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u/\Delta x - u \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v/\Delta x)/(v^2 + v \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v).$$

Так як $v(x)$ – диференційована і, отже, неперервна функція, то $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Маємо $y' = (vu' - uv')/v^2$, де $v \neq 0$.

<u>Теорема 1 (похідна складеної функції)</u>. *Якщо функція* $u = u(x)$ *має похідну у деякій точці* $x \in (a;b)$, *а функція* $y = f(u)$ *має похідну у відповідній точці* $u = u(x)$, *то й складена функція* $y = f(u(x))$ *має похідну у точці* x, *причому*

$$y'_x = (f(u(x))' = y'_u(u) \cdot u'_x(x),$$

де індекси y і x біля похідних вказують, за яким аргументом обчислюють похідні. Тобто *похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну внутрішньої функції.*

$$\square \quad y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \begin{vmatrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta u \to 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} (\Delta y / \Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta u / \Delta x) = y'_u \cdot u'_x. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Якщо складена функція є результатом цілого ряду суперпозицій, то для знаходження її похідної за проміжний

аргумент треба взяти результат всіх цих суперпозицій, крім останньої.

Теорема 2 (похідна оберненої функції). *Нехай функція* $y = f(x)$ *задовольняє умові існування оберненої функції і у точці* $x \in (a;b)$ *має скінчену і відмінну від нуля похідну. Тоді обернена функція* $x = f^{-1}(y)$ *у відповідній точці* $y = f(x)$ *також має похідну. Похідні цих взаємно обернених функцій зв'язані рівністю*

$$(f^{-1}(y))'_y = 1/f'_x(x).$$

$$\square \quad x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \left| \begin{matrix} \Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= 1 / \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x) = 1 / y'_x. \quad \blacksquare$$

2.1.3. Основні формули диференціювання

Похідні елементарних функцій подамо всі разом (табл. 5, де $u = u(x)$), а потім вибірково доведемо деякі з них.

Таблиця 5

Формули похідних		
1. Основні формули		
№ п/п	Функція	Похідна
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^a\right)' = a u^{a-1} \cdot u'$
2а	x	$x' = 1$
2б	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

2в	$\dfrac{1}{u}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
3а	Експонента	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4	Логарифмічна функція	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a}\cdot u'$
4а	Натуральний логарифм	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$
5	Синус	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
6	Косинус	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
7	Тангенс	$\left(tg\ u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
8	Котангенс	$\left(ctg\ u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
9	Арксинус	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
10	Арккосинус	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
11	Арктангенс	$\left(arctg\ u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
12	Арккотангенс	$\left(arcctg\ u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

2. Додаткові формули		
13	Показниково-степенева функція	$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}\cdot u' + +u^v \ln u \cdot v'$
14	Гіперболічний синус	$\left(sh\, u\right)' = ch\, u \cdot u'$
15	Гіперболічний косинус	$\left(ch\, u\right)' = sh\, u \cdot u'$
16	Гіперболічний тангенс	$\left(th\, u\right)' = \dfrac{1}{ch^2 u}\cdot u'$
17	Гіперболічний котангенс	$\left(cth\, u\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 u}\cdot u'$

Доведемо деякі наведені формули диференціювання.

Теорема 1. *Похідна від* $\sin x$ *є* $\cos x$.

□ Дамо аргументу x приріст Δx. Тоді

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)\text{, де } y = \sin x;$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin((x + \Delta x - x)/2)\times$$

$$\times\cos((x + \Delta x + x)/2) = 2\sin x(\Delta x/2)\cdot\cos(x + \Delta x/2).$$

Розділимо на Δx:

$$\Delta y/\Delta x = (2\sin x(\Delta x/2)\cdot\cos(x + \Delta x/2))/\Delta x.$$

Знайдемо границю

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}(\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)\times$$

$\times \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x + \Delta x/2)$. Але $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)) = 1$, тому $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x + \Delta x/2) = \cos x$. Остання рівність випливає з неперервності функції $\cos x$. ■

Теорема 2. *Похідна від* $tg\, x$ *є* $1/\cos^2 x$.

□ Похідну функції $y = tg\,x = \sin x / \cos x$ можна знайти за правилом диференціювання дробу

$$y' = ((\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x) / \cos^2 x =$$
$$= (\cos^2 x + \sin^2 x) / \cos^2 x = 1 / \cos^2 x \text{ . } ■$$

<u>Теорема 3</u>. *Похідна від функції* $\log_a x$ *є* $1/(x \cdot \ln a)$.

□ Якщо Δy є приріст функції $y = \log_a x$, який відповідає приросту Δx аргументу x, то

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x); \quad \Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x;$$

$$\Delta y = \log_a (1 + \Delta x / x); \quad \Delta y / \Delta x = (1/\Delta x) \log_a (1 + \Delta x / x).$$

Помножимо і поділимо на x вираз, який стоїть праворуч у останній рівності: $\Delta y / \Delta x = (1/x)(x/\Delta x) \log_a (1 + \Delta x / x) =$

$= (1/x) \log_a (1 + \Delta x / x)^{x/\Delta x}$. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (1/x) \log_a (1 + \Delta x / x)^{x/\Delta x} =$$

$$= (1/x) \log_a \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x / x)^{x/\Delta x} = (1/x) \log_a e = 1/(x \cdot \ln a). \quad ■$$

<u>Теорема 4</u>. *Похідна від* $y = \arcsin x$ *є* $1/\sqrt{1 - x^2}$.

□ Оберненою функцією до функції $y = \arcsin x$ є функція $x = \sin y$. За теоремою про похідну оберненої функції маємо $(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/(\cos(\arcsin x))$.

Оскільки $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, то $y' = 1/\sqrt{1 - x^2}$. ■

<u>Теорема 5</u>. *Похідна від* $sh\,x$ *є* $ch\,x$.

□ За визначенням гіперболічних функцій

$sh\,x = (e^x - e^{-x})/2$ і $ch\,x = (e^x + e^{-x})/2$. Похідна від функції e^{ax} є ae^{ax}. Тоді маємо

$$(sh\,x)' = ((e^x - e^{-x})/2)' = (e^x + e^{-x})/2 = ch\,x \text{ . } ■$$

<u>Приклад</u>. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^2 \sin 5x$; б) $y = x^4 / \cos 3x$; в) $y = e^{arctg\, x} - \sqrt{\ln(1+x^2)}$.

□ а) $y' = (x^2 \sin 5x)' = (x^2)' \sin 5x + x^2 (\sin 5x)' =$

$$= 2x \sin 5x + 5x^2 \cos 5x ;$$

б) $y' = (x^4 / \cos 3x)' = \left((x^4)' \cos 3x - (\cos 3x)' x^4\right):$

$$: \cos^2 3x = \left(4x^3 \cos 3x + 3\sin 3x \cdot x^4\right) / \cos^2 3x = .$$

$$= x^3 \left(4\cos 3x + 3x \sin 3x\right) / \cos^2 3x ;$$

в) $y' = \left(e^{arctg\, x} - \sqrt{\ln(1+x^2)}\right)' = \left(e^{arctg\, x}\right)' - \left(\sqrt{\ln(1+x^2)}\right)' =$

$$= e^{arctg\, x} \cdot (arctg\, x)' - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^2)}} \left(\ln(1+x^2)\right)' =$$

$$= e^{arctg\, x} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^2)}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \left(1+x^2\right)' =$$

$$= \left(1/(1+x^2)\right)\left(e^{arctg\, x} - x/\sqrt{\ln(1+x^2)}\right). \quad \blacksquare$$

2.1.4. Диференціювання неявно заданої функції. Правило логарифмічного диференціювання

Правило диференціювання функції $y = y(x)$, що задана неявно рівнянням $F_1(x, y) = F_2(x, y)$:

1) продиференціювати ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, розглядаючи y як функцію від x, тобто застосовуючи правило диференціювання складеної функції;

2) з одержаної рівності знайти y'.

Зауваження 1. Похідна неявної функції $y = y(x)$, в загальному випадку, виражається не тільки через значення аргументу x, а й через значення функції y при даному значенні x.

Приклад 1. Знайти похідну y' неявної функції $y = y(x)$, що задана рівнянням $tg\,(2x+y)-3x^2=1+xy^2$ у точці $M(-1;2)$. Скласти рівняння нормалі.

□ $\left(tg\,(2x+y)-3x^2\right)'=\left(1+xy^2\right)'$; $\frac{1}{\cos^2(2x+y)}(2x+y)'-$

$$-3\cdot 2x=0+x'y^2+x(y^2)';$$

$$\left(1/\cos^2(2x+y)\right)(2+y')-6x=y^2+x\cdot 2yy';$$

$$2+y'-6x\cos^2(2x+y)=y^2\cos^2(2x+y)+2xyy'\cos^2(2x+y);$$

$$y'=\left(y^2\cos^2(2x+y)-2+6x\cos^2(2x+y)\right)/\left(1-\right.$$

$$\left.-2xy\cos^2(2x+y)\right);$$

$$y'\big|_{M(-1;2)}=\left(2^2\cos^2(2\cdot(-1)+2)-2+6\cdot(-1)\cos^2(2\cdot(-1)+2)\right):$$

$$:\left(1-2\cdot(-1)\cdot 2\cos^2(2\cdot(-1)+2)\right)=-4/5.$$

Рівняння нормалі $y-y_0=\left(-1/y'_0\right)\cdot(x-x_0)$;

$y-2=\left(-1/(-4/5)\right)\cdot\left(x-(-1)\right)$; $y=(5/4)\,x+13/4$. ■

<u>Зауваження 2</u>. У ряді випадків при диференціюванні навіть явної функції зручно попередньо перейти до її неявного задання.

<u>Правило логарифмічного диференціювання</u> явно заданої функції $y=f(x)$:

1) прологарифмувати ліву і праву частини відповідного рівняння $y=f(x)$*;*

2) до результату логарифмування застосувати правило диференціювання неявної функції;

3) у співвідношення для похідної y' *замість* y *підставити вираз* $f(x)$.

<u>Теорема 2</u>. *Похідна від* $y=x^{\alpha}$, *де* $\alpha\in R$, *є* $\alpha x^{\alpha-1}$.

□ Нехай $x>0$. Логарифмуємо дану функцію, маємо $\ln y=\alpha\ln x$. Візьмемо похідну від обох частин рівності

$y'/y=\alpha/x$. Звідси $y'=y(\alpha/x)=x^{\alpha}(\alpha/x)=\alpha x^{\alpha-1}$. ■

Теорема 3. *Похідна від* $y=u(x)^{v(x)}$ *є* $u^{v}(v'\ln u+vu'/u)$.

□ Логарифмуємо дану функцію $\ln y=v\ln u$. Візьмемо похідну від обох частин рівності $y'/y=v'\ln u+v\cdot u'/u$. Звідси $y'=u^{v}(v'\ln u+vu'/u)$. ■

Приклад 2. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y=x^{x}$; б) $y=(2x-1)^{5}\sqrt[3]{(4-x)^{2}}\Big/\left(2^{6\sin x}(x+3)\right)$.

□ а) $\ln y=x\ln x$; $y'/y=\ln x+x(1/x)$; $y'=y(\ln x+1)$;

$$y'=x^{x}(\ln x+1);$$

б) $\ln y=\ln(2x-1)^{5}+\ln\sqrt[3]{(4-x)^{2}}-\ln 2^{6\sin x}-\ln(x+3)$;

$$\ln y=5\ln(2x-1)+(2/3)\ln(4-x)-6\sin x\cdot\ln 2-\ln(x+3).$$

Візьмемо похідну від обох частин одержаної рівності

$$\frac{y'}{y}=\frac{5}{2x-1}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4-x}\cdot(-1)-6\ln 2\cdot\cos x-\frac{1}{x+3}.$$

Звідси

$$y'=\left(10/(2x-1)-2/\left(3(4-x)\right)-6\ln 2\cdot\cos x-1/(x+3)\right)\times$$
$$\times(2x-1)^{5}\sqrt[3]{(4-x)^{2}}\Big/\left(2^{6\sin x}(x+3)\right).\quad ■$$

2.1.5. Похідна параметрично заданої функції

Теорема (похідна параметрично заданої функції). *Нехай функцію* $y=f(x)$ *задано у параметричному вигляді:* $y=\psi(t)$, $x=\varphi(t)$, *де* t *– параметр. Якщо функції* $\psi(t)$ *і* $\varphi(t)$ *диференційовані на інтервалі* $(\alpha;\beta)$ *і функція* $\varphi(t)$ *має обернену, причому* $\varphi_t'(t)\neq 0$, *то похідна функції* $y=f(x)$ *знаходиться як відношення* $y_x'=\psi'(t)/\varphi'(t)=y_t'/x_t'$.

□ Функція $\varphi(t)$ має обернену функцію $t=t(x)$, їх похідні зв'язані рівністю $x'_t = 1/t'_x$. Звідки $t'_x = 1/x'_t$.

Підставивши $t = t(x)$ у друге параметричне рівняння, дістанемо явну форму задання функції $y = f(x)$: $y = \psi(t(x))$.

Обчислимо її похідну як похідну складеної функції $y'_x = \psi'_t \cdot t'_x$. Тоді $y'_x = \psi'(t)\cdot\left(1/x'_t\right) = \psi'(t)/\varphi'(t) = y'_t / x'_t$. ■

Зауваження. Похідна параметрично заданої функції також є параметрично заданою функцією: $y'_x = y'_t / x'_t$; $x = x(t)$.

Приклад. Знайти кут нахилу α дотичної до графіка функції $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, де $0 \le t \le \pi$, у точці, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \pi/4$. Скласти рівняння дотичної.

□ $y'_x = (a\sin t)'_t /(a\cos t)'_t = (a\cos t)/(a\sin t) = -ctg\, t$;

$tg\,\alpha = y'_{x0} = -ctg\,(\pi/4) = -1$. Звідси $\alpha = 135^0 = 3\pi/4$.

Знайдемо координати точки дотику $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$:

$x_0 = a\cos t_0 = a\cos(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2$;

$y_0 = a\sin t_0 = a\sin(\pi/4) = \sqrt{2}\,a/2$;

Тоді рівняння дотичної $y - y_0 = y'_{x0}\cdot(x - x_0)$;

$$y - \sqrt{2}\,a/2 = -1\cdot\left(x - \sqrt{2}\,a/2\right);\quad y = -x + \sqrt{2}\,a. \ ■$$

2.1.6. Похідні вищих порядків. Механічний зміст другої похідної

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$. Похідна цієї функції $f\,'(x)$ є функцією аргументу x. Візьмемо деяку точку $x_0 \in (a;b)$. Дамо приріст аргументу $\Delta x = x - x_0$ і матимемо приріст функції $f\,'(x)$ у точці x_0:

$$\Delta f'(x_0) = f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0).$$

Розглянемо границю $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\Delta f'(x_0)/\Delta x\right) = f''(x_0)$.

Якщо ця границя існує, то кажуть, що функція $f(x)$ має ***похідну другого порядку*** (***другу похідну***) у точці x_0. Її позначають $y'' = f''(x_0)$, або $d^2 f(x_0)/dx^2$, або $f''(x)\big|_{x=x_0}$.

Похідну $f'(x)$ називають ***похідною першого порядку*** (***першою похідною***), а саму функцію $f(x)$ вважають ***похідною нульового порядку*** (***нульовою похідною***).

Отже, *друга похідна – це похідна від першої похідної*

$$y'' = (y')'.$$

Аналогічно визначають похідні третього і наступних порядків: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти y''', якщо $y = \sin^5 x$.

□ Послідовно знайдемо y', y'', y''':

$$y' = 5\sin^4 x\cos x;\quad y'' = \left(5\sin^4 x\cos x\right)' = 5\cdot\left(4\sin^3 x\cos x\times\right.$$

$$\left.\times\cos x + \sin^4 x\cdot(-\sin x)\right) = 20\sin^3 x\cos^2 x - 5\sin^5 x;$$

$$y''' = \left(20\sin^3 x\cos^2 x - 5\sin^5 x\right)' = 20\cdot\left(3\sin^2 x\cos x\cdot\cos^2 x + \right.$$

$$\left.+\sin^3 x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)\right) - 5\cdot 5\sin^4 x\,\cos x =$$

$$= 60\sin^2 x\,\cos^3 x - 65\sin^4 x\,\cos x.\ ■$$

Знайдемо вираз для другої похідної y''_{xx} параметрично заданої функції $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$.

За означенням

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (\psi'_t\cdot t'_x)'_x = (\psi'_t)'_x\cdot t'_x + \psi'_t(t'_x)'_x.$$

Обчисливши похідну по x від функції ψ'_t як похідну складеної функції $(\psi'_t)'_x = \psi''_{tt}\cdot t'_x$, дістанемо $y''_{xx} = \psi''_{tt}(t'_x)^2 + \psi'_t\cdot t''_{xx}$.

Оскільки $t'_x = 1/x'_t$, а

$$t''_{xx} = (t'_x)'_x = (1/x'_t)'_x = -(1/(x'_t)^2)\cdot x''_{tt}\cdot t'_x = -x''_{tt}/(x'_t)^3,$$

то остаточно маємо $y''_{xx} = (y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}) / (x'_t)^3$.

<u>Приклад 2</u>. Знайти $d^2 y / dx^2$ для функції, заданої у параметричній формі $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

□ Спочатку обчислимо перші та другі похідні від даних функцій по параметру t:

$$x'_t = -a\sin t,\ x''_{tt} = -a\cos t;\ \ y'_t = b\cos t,\ y''_{tt} = -b\sin t.$$

Тоді $d^2 y / dx^2 = ((-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)):$

$$:(-a\sin t)^3 = -b/(a^2\sin^3 t). \quad ■$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти другу похідну y'' функції, що задана неявно рівнянням $2\sin y = x^2 + 2y$.

□ Спочатку обчислимо першу похідну:

$$(2\sin y)' = (x^2 + 2y)';\ 2\cos y \cdot y' = 2x + 2y';\ y' = x/(\cos y - 1).$$

Далі знаходимо $y'' = \left(x/(\cos y - 1)\right)' =$

$$= \left(x'(\cos y - 1) - x(\cos y - 1)'\right)/(\cos y - 1)^2 = (\cos y - 1 +$$

$$+ x\sin y \cdot y'):(\cos y - 1)^2 = \left(\cos y - 1 + x\sin y \cdot x/(\cos y - 1)\right):$$

$$:(\cos y - 1)^2 = \left((\cos y - 1)^2 + x^2\sin y\right):(\cos y - 1)^3. \quad ■$$

<u>Механічний зміст другої похідної</u>. Якщо заданий закон прямолінійного руху тіла $s = s(t)$, то $ds/dt = v(t)$ – швидкість, а $d^2 s/dt^2 = dv/dt = a(t)$ – прискорення.

<u>Приклад 4</u>. Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаній умові:

$$y = \frac{\ln x}{x^3}; \quad x^2 y'' + 7xy' + 9y = 0.$$

□ Обчислимо похідні, що входять у зазначене рівняння:

$$y' = \frac{(1/x)\cdot x^3 - 3x^2\ln x}{\left(x^3\right)^2} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4};$$

$$y''=\frac{-3\cdot(1/x)\cdot x^4-4x^3(1-3\ln x)}{\left(x^4\right)^2}=\frac{12\ln x-7}{x^5}.$$

Підставимо функцію та одержані похідні у рівняння:

$$x^2\cdot\frac{12\ln x-7}{x^5}+7x\cdot\frac{1-3\ln x}{x^4}+9\cdot\frac{\ln x}{x^3}=0;$$

$$\frac{12\ln x-7+7-21\ln x+9\ln x}{x^3}=0;\quad 0=0 \text{ – вірно.}$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

2.1.7. Диференціал функції та його властивості. Диференціали вищих порядків

Нехай $y=f(x)$ – деяка функція, визначена на проміжку $(a;b)$ і неперервна у деякій фіксованій точці x цього проміжку, і нехай приросту аргументу Δx відповідає приріст функції $\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$, який є функцією аргументу Δx.

Якщо для приросту функції Δy існує таке число A, що приріст функції можна записати у вигляді $\Delta y=A\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$, де множник $\varepsilon=\varepsilon(\Delta x)$ задовольняє рівності $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$, то кажуть, що функція $y=f(x)$ ***диференційована у точці*** x. Головна частина $dy=A\Delta x$ приросту функції Δy, яка прямо пропорційна приросту аргументу Δx, називається ***диференціалом функції***.

Теорема 1 (зв'язок між похідною та диференціалом). *Щоб функція $y=f(x)$ у точці x була диференційована, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну $f'(x)$. Якщо виконується ця умова, то $dy=f'(x)\Delta x$.*

□ а) Необхідність. Нехай $\Delta y=dy+\varepsilon\cdot\Delta x$, де $dy=A\cdot\Delta x$, $A=const\neq 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$. Тоді $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \varepsilon \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = A + 0 = A;\ dy = y'\Delta x .$$

б) <u>Достатність</u>. Нехай $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \neq 0$. За означенням границі $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$, де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Звідси $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$. Покажемо, що $y'\Delta x$ – головна частина Δy:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon\,\Delta x}{y'\Delta x} = \frac{1}{y'} \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \frac{1}{y'} \cdot 0 = 0 . \quad \blacksquare$$

Тут Δx не обов'язково нескінченно мала; але якщо Δx – нескінченно мала, то й dy – нескінченно мала. Саме у цих випадках dy (за умови, що $f'(x) \neq 0$) є головною частиною нескінченно малого приросту функції Δy.

Диференціалом незалежної змінної x називають її приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$.

З урахуванням цієї рівності, маємо $dy = f'(x)dx$. Тоді $f'(x) = dy / dx$.

Тобто, *похідна дорівнює відношенню диференціалів функції та аргументу*.

<u>Правила обчислення диференціалів і основні диференціали</u>. Правила обчислення диференціалів і диференціали основних елементарних функцій аналогічні відповідним формулам для похідних. Ці співвідношення наведені в табл. 6, де $u = u(x)$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти диференціал функції:

а) $y = e^{\sqrt{x}} \ln x$; б) $y = x^4 / \cos x$.

□ а) $dy = d\left(e^{\sqrt{x}} \ln x\right) = \ln x \cdot d\left(e^{\sqrt{x}}\right) + e^{\sqrt{x}} d(\ln x) = \ln x \times$

$$\times e^{\sqrt{x}} \left(1/\left(2\sqrt{x}\right)\right)dx + e^{\sqrt{x}} \cdot (1/x)dx = e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\ln x + 2\right)dx/(2x);$$

б) $d(x^4 / \cos x) = (\cos x \cdot d(x^4) - x^4 d(\cos x)) / \cos^2 x =$

$$= (4x^3 \cos x + x^4 \sin x)\,dx / \cos^2 x . \quad \blacksquare$$

Таблиця 6

Правила обчислення диференціалів			
1	$d(u+v)=du+dv$	4	$d(uv)=vdu+udv$
2	$d(u-v)=du-dv$	5	$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$
3	$d(Cu)=Cdu$	6	$dy=y'_u\,du\,,\quad y=f\big(u(x)\big)$
Основні диференціали			
1	$d\,C=0$	5	$d(\sin u)=\cos u\;du$
2	$d\left(u^{\alpha}\right)=\alpha u^{\alpha-1}\,du$	6	$d(\cos u)=-\sin u\;du$
2а	$d(au+b)=a\;du$	7	$d(tg\,u)=\frac{du}{\cos^2 u}$
2б	$d\left(au^2+bu+c\right)=$ $=(2au+b)\;du$	8	$d(ctg\,u)=-\frac{du}{\sin^2 u}$
2в	$d\left(\sqrt{u}\right)=\frac{du}{2\sqrt{u}}$	9	$d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
3	$d(\ln u)=\frac{du}{u}$	10	$d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
4	$d\left(a^u\right)=a^u\ln a\;du$	11	$d(arctg\,u)=\frac{du}{1+u^2}$
4а	$d\left(e^u\right)=e^u\;du$	12	$d(arcctg\,u)=-\frac{du}{1+u^2}$

Геометрична інтерпретація диференціала. Нехай $y=f(x)$ – деяка диференційована функція, $M\left(x_0,y_0\right)$ – точка, що належить графіку функції, $y_0 = f(x_0)$. Проведемо через точку M (рис. 57) дотичну до графіка функції. Кутовий коефіцієнт нахилу дотичної (тангенс кута нахилу α) дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$. Якщо аргументу функції надати приріст Δx, то приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. На рис. 57 приріст функції Δy – довжина відрізка M_1P. При цьому приріст дотичної дорівнюватиме довжині відрізка NP. Обчисливши $|NP$ як катет прямокутного трикутника MNP, маємо

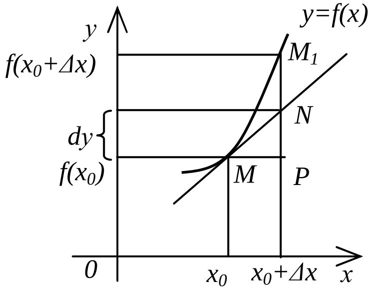

Рис. 57

$$NP = MP \cdot tg\,\alpha = f'(x_0)\Delta x.$$

За означенням диференціала $f'(x_0)\Delta x = dy$. Таким чином, якщо $\Delta y = M_1P$ – приріст ординати графіка функції, то *диференціал* $dy = NP$ *є приростом ординати дотичної*.

<u>Диференціал у наближених обчисленнях</u>. При достатньо малому Δx можна замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Тоді наближене шукане значення функції можна знайти за формулою

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

<u>Зауваження 1</u>. Нажаль, ця формула не дозволяє оцінити похибку отриманого наближення.

<u>Приклад 2</u>. Обчислити наближено $\sin 46^\circ$.

□ Покладемо $x_0 = \pi/4$, що відповідає 45°; $\Delta x = \pi/180$, що відповідає 1°; $x_0 + \Delta x = \pi/4 + \pi/180$, що відповідає 46°.

Тоді $\sin 46^0 = \sin(\pi/4 + \pi/180) \approx \sin(\pi/4) +$

$$+\cos(\pi/4)\cdot(\pi/180) = \sqrt{2}/2 + \left(\sqrt{2}/2\right)\cdot\left(\pi/180\right) \approx$$

$$\approx 0{,}7071 + 0{,}7071\cdot 0{,}0175 \approx 0{,}7191. \quad \blacksquare$$

Теорема 2 (інваріантність форми диференціала). *Нехай* $y = f(u)$ *і* $u = \varphi(x)$ *– деякі диференційовані функції зазначених аргументів такі, що з них можна утворити складену функцію* $y = f(\varphi(x))$. *Диференціал складеної функції визначається рівністю* $dy = y'_u\, du$. Тобто, *форма диференціала функції не залежить від того, є аргумент незалежною змінною чи функцією іншого аргументу*.

□ Якщо розглядати y як функцію незалежної змінної x, то її диференціал визначається рівністю $dy = y'_x \cdot dx$. Підставивши в цю рівність замість похідної складеної функції y'_x її вираз через f'_u і φ'_x, дістанемо $dy = f'_u \cdot \varphi'_x \cdot dx$. Але, з іншого боку, $\varphi'_x \cdot dx = du$. Тоді $dy = f'_u \cdot du$. ■

Зауваження 2. Інваріантна (незмінна) саме форма диференціала, а не його зміст. У формулі $dy = f'_u \cdot du$ множник du – не тільки диференціал, але і приріст Δu аргументу u, якщо u – незалежна змінна. Однак du – диференціал u, але не приріст Δu, якщо аргумент u – у свою чергу функція деякої змінної x.

Диференціали вищих порядків. Нехай маємо функцію $y = f(x)$, де x – незалежна змінна. Диференціал цієї функції $dy = f'(x) \cdot dx$ є деякою функцією x, але від x може залежати тільки перший множник $f'(x)$, другий множник dx є приростом незалежної змінної x і від значення цієї змінної не залежить. Оскільки dy є функція від x, то маємо право говорити про диференціал цієї функції.

Диференціал від диференціала функції називають ***другим диференціалом*** (***диференціалом другого порядку***) цієї функції і позначають через d^2y:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і наступних порядків. ***Диференціалом*** n***-го порядку*** називається перший диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = \left(f^{(n-1)}(x)\cdot dx^{n-1}\right)' \cdot dx =$$

$$= \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \cdot dx^{n-1} \cdot dx = f^{(n)}(x)\cdot dx^n .$$

Зауваження 3. Диференціали другого і вищих порядків властивості інваріантності форми не мають.

Користуючись поняттям диференціала, похідну другого і вищих порядків можна подати як відношення диференціалів відповідного порядку $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$, ... , $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ при умові, що x – незалежна змінна.

2.2. Основні теореми диференціального числення

2.2.1. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші

Теорема 1 (теорема Ролля про корені похідної). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *диференційована в усіх внутрішніх точках цього відрізка і на його кінцях приймає рівні значення* $f(a) = f(b)$, *то на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* c, *в якій похідна дорівнює нулю* $f'(c) = 0$.

□ Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого M і найменшого m значень.

Якщо $M = m$, то функція стала. Похідна від сталої величини дорівнює нулю і теорема доведена.

Нехай $f(c) = M$, де $c \in (a;b)$. Через те, що $f(c) = M$ – найбільше значення функції, то $f(c+\Delta x) - f(c) \le 0$ як при $\Delta x > 0$, так і при $\Delta x < 0$. Отже, $(f(c+\Delta x) - f(c))/\Delta x \le 0$, коли $\Delta x > 0$, і $(f(c+\Delta x) - f(c))/\Delta x \ge 0$, коли $\Delta x < 0$.

За умовою теореми похідна $f'(c)$ існує, тобто, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(c+\Delta x) - f(c))/\Delta x = f'(c)$. Але тут $f'(c) \le 0$ при $\Delta x > 0$ і $f'(c) \ge 0$ при $\Delta x < 0$. Ці нерівності сумісні лише тоді, коли $f'(c) = 0$. Отже, між a і b є точка c, де похідна дорівнює нулю. ■

<u>Геометричний зміст</u>. За умов, які вказані в теоремі Ролля, на дузі AB існує хоча б одна дотична, що паралельна осі Ox (рис. 58).

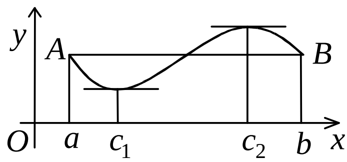

Рис. 58

<u>Теорема 2 (теорема Лагранжа про скінченні прирости)</u>. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в усіх його внутрішніх точках, то на інтервалі $(a;b)$ знайдеться хоча б одна точка c, в якій виконується рівність $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ – **формула Лагранжа скінченних приростів**.*

□ Визначимо число Q рівністю $(f(b)-f(a))/(b-a)=Q$. Складемо допоміжну функцію $F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\cdot Q$. Очевидно, що $F(a)=0$ і $F(b)=0$.

Функція $F(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована у кожній внутрішній точці. Отже, вона відповідає теоремі Ролля, за якою усередині відрізка є точка c така, що $F'(c)=0$. Але $F'(x)=f'(x)-Q$. Тому $F'(c)=f'(c)-Q=0$. Звідси $f'(c)=Q$, тобто $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. ■

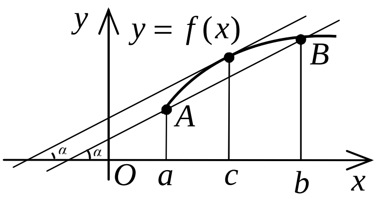

Рис. 59

<u>Геометричний зміст</u>. За умов, що вказані в теоремі Лагранжа, на дузі AB існує хоча б одна точка, в якій дотична паралельна хорді AB (рис. 59).

Теорема Ролля випливає з теореми Лагранжа як окремий випадок при $f(a)=f(b)$, тобто коли хорда AB паралельна осі Ox.

<u>Теорема 3 (теорема Коші про відношення приростів двох функцій)</u>. *Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – дві функції, неперервні на від-*

різку $[a;b]$ *і диференційовані в усіх його внутрішніх точках, причому похідна* $\varphi'(x)$ *ніде не обертається у нуль, то на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться принаймні одна така точка* c, *що виконується рівність*

$$(f(b)-f(a))/(\varphi(b)-\varphi(a))=f'(c)/\varphi'(c).$$

□ Визначимо число Q рівністю $(f(b)-f(a))/(\varphi(b)-$ $-\varphi(a))=Q$, де $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$. Складемо допоміжну функцію $F(x)=f(x)-f(a)-Q(\varphi(x)-\varphi(a))$. Очевидно, що $F(a)=0$ і $F(b)=0$. Тобто, функція $F(x)$ задовольняє умовам теореми Ролля. Тому між a і b є така точка c, що $F'(c)=0$. Але $F'(x)=f'(x)-Q\varphi'(x)$. Отже, $F'(c)=f'(c)-Q\varphi'(c)=0$. Звідси $Q=f'(c)/\varphi'(c)$ або $(f(b)-f(a))/(\varphi(b)-\varphi(a))=$ $=f'(c)/\varphi'(c)$. ■

Теорема Коші є узагальненням теореми Лагранжа.

2.2.2. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Теорема (правило Лопіталя розкриття невизначеності виду $0/0$). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *диференційовані в деякому околі точки* a *(*a *– число або символ* ∞, $-\infty$, $+\infty$*), крім, можливо, самої точки* a. *Нехай також* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ *і* $\varphi'(x)\neq 0$ *в кожній точці* x *з вище вказаного околу* a, $x\neq a$. *Тоді, якщо існує границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних* $f'(x)/\varphi'(x)$ *при* $x\to a$, *то існує і границя відношення самих функцій* $f(x)/\varphi(x)$ *при* $x\to a$, *причому* $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/\varphi(x))=|0/0|=\lim\limits_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))$.

□ Довизначимо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ у точці a нульовим значенням $f(a)=\varphi(a)=0$ і отримаємо функції $f_*(x)$ та $\varphi_*(x)$, що задовольняють теоремі Коші на відрізку $[a;x]$, де x – довільна фіксована точка з вище вказаного околу, відмінна від

a. Застосовуючи теорему Коші, маємо

$(f_*(x)-f_*(a))/(\varphi_*(x)-\varphi_*(a))=f_*'(c)/\varphi_*'(c)$, де $a<c<x$.

Але $f(a)=\varphi(a)=0$ і $f_*'(c)=f'(c)$, $\varphi_*'(c)=\varphi'(c)$. Тому $f(x)/\varphi(x)=f'(c)/\varphi'(c)$.

Коли $x\to a$, то і $c\to a$, оскільки $a<c<x$. Тоді якщо $\lim\limits_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))=A$, то $\lim\limits_{c\to a}(f'(c)/\varphi'(c))$ теж існує і дорівнює A. Звідси $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/\varphi(x))=\lim\limits_{x\to a}(f'(c)/\varphi'(c))=$

$$=\lim_{c\to a}(f'(c)/\varphi'(c))=\lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))=A.$$

Отже $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/\varphi(x))=\left|0/0\right|=\lim\limits_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))$. ■

<u>Зауваження 1</u>. Якщо границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних не існує, то правило Лопіталя застосовувати не можна. Але це не свідчить про те, що границя відношення самих функцій не існує.

Наприклад,

$$f(x)=x^2\sin(1/x);\quad f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x);\quad \varphi(x)=x;$$

$\varphi'(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{1}$ – не існує, але

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)=0.$$

<u>Зауваження 2</u>. Правило Лопіталя можна застосовувати повторно, але потрібно кожного разу перевіряти, чи не розкрилася невизначеність.

<u>Зауваження 3</u>. Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ використовується теорема, аналогічна правилу Лопіталя для невизначеності виду $0/0$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)/\varphi(x))=\left|\infty/\infty\right|=\lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x)).$$

<u>Зауваження 4</u>. Для спрощення обчислень слід правило Лопіталя суміщати з іншими методами знаходження границь.

Приклад 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi-4arctg\,x}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{\cos x-\cos 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x^2)}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln\left(e^x-e^5\right)}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi-4arctg\,x}{\ln x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\pi-4arctg\,x)'}{(\ln x)'}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4\cdot 1/(1+x^2)}{1/x}=-2;\quad \text{б) }\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6};$$

$$\text{в) }\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{\cos x-\cos 3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-\sin x)'}{(\cos x-\cos 3x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{-\sin x+\sin 3x\cdot 3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\cos x)'}{(-\sin x+3\sin 3x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{-\cos x+3\cos 3x\cdot 3}=\frac{1}{8};\quad \text{г) }\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(1+x^2)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln(1+x^2)\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\left(1/(1+x^2)\right)\cdot 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=$$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x^2+1}{1}=\frac{1}{2};\quad \text{д) }\lim_{x\to\pi/2}\frac{tg\,3x}{tg\,5x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(tg\,3x)'}{(tg\,5x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1/\cos^2 3x)\cdot 3}{(1/\cos^2 5x)\cdot 5}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'}\right)^2=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin 5x\cdot 5}{-\sin 3x\cdot 3}\right)^2=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^2=\frac{5}{3};$$

е) $$\lim_{x\to 5}\frac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln\left(e^x-e^5\right)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to 5}\cos(\pi x)\times$$

$$\times\lim_{x\to 5}\frac{(\ln(x-5))'}{\left(\ln\left(e^x-e^5\right)\right)'}=(-1)\cdot\lim_{x\to 5}\frac{1/(x-5)}{\left(1/(e^x-e^5)\right)\cdot e^x}=$$

$$=-\lim_{x\to 5}\frac{e^x-e^5}{(x-5)e^x}=\left|\frac{0}{0}\right|=-\lim_{x\to 5}\frac{\left(e^x-e^5\right)'}{(x-5)'}:\lim_{x\to 5}e^x=$$

$$=-\lim_{x\to 5}\left(e^x/1\right):e^5=-e^5:e^5=-1.\quad\blacksquare$$

Зауваження 5. Для розкриття невизначеностей виду $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$ їх за допомогою тотожних перетворень зводять до виду $0/0$ або ∞/∞, а потім застосовують правило Лопіталя.

Формальний запис: $f\cdot\varphi=|0\cdot\infty|=f/(1/\varphi)=|0/0|$

або $f\cdot\varphi=|0\cdot\infty|=\varphi/(1/f)=|\infty/\infty|$;

$$f-\varphi=|\infty-\infty|=\frac{1/\varphi-1/f}{(1/f)\cdot(1/\varphi)}=|0/0|.$$

Приклад 2. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x-\pi)tg\,3x$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\ln(1+x)\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right)$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2e^x)-x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1/x^2-ctg\,x\right)$.

□ а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x-\pi)tg\,3x=\left|0\cdot\infty\right|=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2x-\pi}{ctg\,3x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x-\pi)'}{(ctg\,3x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2}{\left(-1/\sin^2 3x\right)\cdot 3}=-\frac{2}{3};$$

б) $\lim\limits_{x\to+0}\ln(1+x)\ln x=\left|0\cdot\infty\right|=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln^{-1}x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln(1+x)\right)'}{\left(\ln^{-1}x\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{1/(1+x)}{-\ln^{-2}x\cdot(1/x)}=-\lim_{x\to+0}x\ln^2 x:$$

$$:\lim_{x\to+0}(1+x)=\left|0\cdot\infty\right|=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}}:1=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=-\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{(x^{-1})'}=$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot 1/x}{-x^{-2}}=2\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=2\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln x\right)'}{(x^{-1})'}=$$

$=2\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1/x}{-x^{-2}}=-2\lim\limits_{x\to+0}x=0$; в) $\lim\limits_{x\to1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right)=$

$$=\left|\frac{1}{0\cdot\infty}\right|=\lim_{x\to1-0}\frac{\sin^{-1}\pi x}{\ln(1-x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to1-0}\frac{\left(\sin^{-1}\pi x\right)'}{\left(\ln(1-x)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{-\sin^{-2}\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi}{\left(1/(1-x)\right)\cdot(-1)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\pi\lim_{x\to1-0}\cos\pi x\times$$

$$\times\lim_{x\to1-0}\frac{1-x}{\sin^2\pi x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\pi\cdot(-1)\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{(1-x)'}{(\sin^2\pi x)'}=$$

$$=-\pi\lim_{x\to1-0}\frac{-1}{2\sin\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi}=\left|-\pi\cdot\frac{-1}{2\cdot(+0)\cdot(-1)\cdot\pi}\right|=-\infty;$$

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2e^x)-x\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2e^x)-\ln e^x\right)=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x+2e^x}{e^x} = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2e^x}{e^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2e^x)'}{(e^x)'} =$$

$$= \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2e^x}{e^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+2e^x)'}{(e^x)'} = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x} = \ln 2\,;$$

д) $$\lim_{x\to0}\left(1/x^2 - ctg\,x\right) = |\infty-\infty| = \lim_{x\to0}\frac{\sin x - x^2\cos x}{x^2\sin x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(\sin x - x^2\cos x)'}{(x^2\sin x)'} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x - 2x\cos x + x^2\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} =$$

$$= |1/0| = \infty. \quad \blacksquare$$

Зауваження 6. Для розкриття невизначеностей виду 0^0, 1^∞ і ∞^0 показниково-степеневий вираз f^φ (за основною логарифмічною тотожністю, припускаючи $f>0$) записують у вигляді $f^\varphi = e^{\varphi\ln f}$. У показнику маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, яка зводиться (як показано вище) до невизначеності $0/0$ або ∞/∞.

Приклад 3. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to+0} x^{1/\ln(e^{3x}-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 3x)^{4/x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x}$; г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tg\,x)^{2x-\pi}$.

□ а) $$\lim_{x\to+0} x^{1/\ln(e^{3x}-1)} = |0^0| = A;\;\; \ln A = \lim_{x\to+0}\ln x^{1/\ln(e^{3x}-1)} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\ln(e^{3x}-1)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln(e^{3x}-1)\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{\left(1/(e^{3x}-1)\right)\cdot e^{3x}\cdot 3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to+0}\frac{e^{3x}-1}{x} : \lim_{x\to+0} e^{3x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to+0}\frac{(e^{3x}-1)'}{x'}:1=\frac{1}{3}\lim_{x\to+0}\frac{e^{3x}\cdot 3}{1}=1;\quad A=e^{1}=e;$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 3x\right)^{4/x^{2}}=\left|1^{\infty}\right|=A;\quad \ln A=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\cos 3x\right)^{4/x^{2}}=$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{x^{2}}=\left|\frac{0}{0}\right|=4\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 3x)'}{(x^{2})'}=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\cos 3x\right)\cdot(-\sin 3x)\cdot 3}{2x}=-6\lim_{x\to 0}\frac{tg\,3x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=-6\lim_{x\to 0}\frac{(tg\,3x)'}{x'}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\cos^{2}3x\right)\cdot 3}{1}=-18;\ A=e^{-18};$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5^{x}\right)^{1/x}=\left|\infty^{0}\right|=A;\quad \ln A=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x+5^{x}\right)^{1/x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+5^{x}\right)}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(x+5^{x})\right)'}{x'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1/(x+5^{x})\right)\cdot(1+5^{x}\ln 5)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+5^{x}\ln 5}{x+5^{x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+5^{x}\ln 5)'}{(x+5^{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5\cdot 5^{x}\ln 5}{1+5^{x}\ln 5}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\ln^{2}5\times$$

$$\times\lim_{x\to+\infty}\frac{(5^{x})'}{(1+5^{x}\ln 5)'}=\ln^{2}5\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{5^{x}\ln 5}{\ln 5\cdot 5^{x}\ln 5}=\ln 5;$$

$A=e^{\ln 5}=5;$ г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(tg\,x\right)^{2x-\pi}=\left|\infty^{0}\right|=A;$

$$\ln A=\lim_{x\to\pi/2}\ln\left(tg\,x\right)^{2x-\pi}=\lim_{x\to\pi/2}\left((2x-\pi)\cdot\ln tg\,x\right)=$$

$$=\left|0\cdot\infty\right|=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln tg\,x}{(2x-\pi)^{-1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\left(\ln tg\,x\right)'}{\left((2x-\pi)^{-1}\right)'}=$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{(1/tg\,x)\cdot(1/\cos^2 x)}{-(2x-\pi)^{-2}\cdot 2} = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cdot\cos x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/2} \frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{\left((2x-\pi)^2\right)'}{(\sin 2x)'} =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cdot(2x-\pi)\cdot 2}{\cos 2x\cdot 2} = 0; \quad A = e^0 = 1. \quad \blacksquare$$

2.2.3. Формула Тейлора

Нехай функція $f(x)$ n раз диференційовна в деякому околі точки $x = x_0$. Знайдемо многочлен

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

такий, що його значення та значення його похідних до n-го порядку включно в точці x_0 співпадають зі значеннями самої функції та її відповідних похідних у цій точці. Тобто,

$$T_n(x_0) = f(x_0);\ T_n'(x_0) = f'(x_0);\ \ldots;\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Природно очікувати, що такий многочлен у деякому смислі буде “близький” до функції $f(x)$ в околі точки x_0.

Виражаючи з наведених умов коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ через значення функції та її похідних у точці x_0, отримаємо

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

– ***многочлен Тейлора*** n***-го порядку*** для функції $f(x)$. Тут $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ – n***-факторіал***; $0! = 1$; $1! = 1$.

Тоді для функції $f(x)$ в околі точки x_0 справедлива ***формула Тейлора*** n***-го порядку***

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

де $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ – ***залишковий член*** формули Тейлора.

Теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *в деякому околі точки* x_0 *має похідні до* $(n+1)$ *-го порядку включно, то залишковий член формули Тейлора можна подати в* ***формі Лагранжа***

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

де $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Зауваження 1. Формула Тейлора є узагальненням формули Лагранжа про скінченні прирости.

Зауваження 2. Якщо в формулі Тейлора замінити x_0 на x, x на $x+\Delta x$ і перенести $f(x)$ вліво, а потім врахувати, що $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta f(x)$ і $f^{(k)}(x)\cdot\Delta x^k=d^k f(x)$, то її можна подати в ***диференціальній формі***

$$\Delta f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(x)}{k!}+\frac{d^{n+1}f(c)}{(n+1)!}$$

Зауваження 3. При $x_0=0$ маємо окремий випадок формули Тейлора – ***формулу Маклорена***

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

де $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

Наведемо приклади розкладання деяких функцій за формулою Маклорена.

1. Експонента $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

2. Синус

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{\sin\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

3. Косинус

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

4. Логарифмічна функція

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Тут $0 < \theta < 1$.

Зауваження 4. Формула Тейлора широко застосовується в наближених обчисленнях. При цьому наближенням функції служить її многочлен Тейлора $f(x) \approx T_n(x)$, а допущена абсолютна похибка дорівнює модулю залишкового члена $\Delta = |R_n(x)|$.

Приклад. Застосовуючи формулу Маклорена шостого порядку для експоненти $y = e^x$, обчислити наближене значення числа Ейлера e і оцінити допущену абсолютну похибку.

□ $n = 6$; $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} e^{\theta x}$; $x = 1$;

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \ldots + \frac{1^6}{6!} + \frac{e^{\theta \cdot 1}}{7!} 1^7 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} +;$$

$$+ \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{e^\theta}{5040} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= 2\frac{517}{720} \approx 2{,}718; \quad \Delta = \left| \frac{e^\theta}{5040} \right| < \frac{e^1}{5040} < \frac{3}{5040} < 0{,}001. \ ■$$

2.3. Застосування похідних для дослідження функцій

Вивчення кількісної сторони різних об'єктів приводить до встановлення та дослідження функціональних залежностей між змінними величинами, які відображають відповідні процеси.

Очевидно, не можливо здійснити повне дослідження функції, лише обчислюючи її значення в окремих точках. У даному розділі будуть встановлені загальні правила дослідження поведінки функції, які дозволяють зробити ескіз її графіка.

2.3.1. Умови зростання та спадання функції

Теорема 1 (достатні умови монотонності та сталості). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і диференційована в усіх його внутрішніх точках. Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *похідна* $f'(x)$:

1) *додатна, то функція на цьому відрізку зростає*;
2) *від'ємна, то функція на цьому відрізку спадає*;
3) *дорівнює нулю, то функція на цьому відрізку – стала*.

□ Нехай $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$. Розглянемо довільні значення $x_1, x_2 \in [a;b]$ такі, що $x_1 < x_2$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, де $x_1 < c < x_2$. За умовою теореми $f'(c) > 0$. Звідси $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Це означає, що $f(x)$ – зростаюча функція.

Аналогічно доводяться інші два випадки. ■

Зауваження. Розглядаємо монотонність у строгому смислі.

Приклад. Визначити інтервали зростання і спадання функції: а) $y = x^4/4$; б) $y = arctg\, x$.

□ а) Похідна цієї функції $y' = x^3$. Коли $x > 0$, то $y' > 0$ – функція зростає; коли $x < 0$, то $y' < 0$ – функція спадає.

б) Похідна цієї функції $y' = 1/(x^2 + 1)$ додатна при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, функція $y = arctg\, x$ всюди зростає. ■

2.3.2. Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = x_0$, тобто, x_0 – внутрішня точка області визначення $D(f)$.

Точка x_0 називається ***точкою мінімуму*** (відповідно ***точкою максимуму***), якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (відповідно

$f(x_0) > f(x)$). Точки обох типів – мінімуму $x_{\min}$ та максимуму $x_{\max}$ – називають ***точками екстремуму***, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – ***екстремальними значеннями*** (***екстремумами***) ***функції*** відповідного типу:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}).$$

Зауваження 1. Розглядаємо лише точки внутрішнього локального (відносно всіх близьких сусідніх точок) строгого екстремуму.

Зауваження 2. Розрізняють точки ***гладкого екстремуму*** (див. рис. 60), в околі яких функція неперервно диференційована (графік гладкий) і похідна $f'(x) = 0$ (дотична паралельна осі Ox), і точки ***гострого екстремуму*** (див. рис. 61), в яких функція недиференційована (графік зазнає зламу) – похідна $f'(x)$ має розрив (нескінченна чи взагалі не існує).

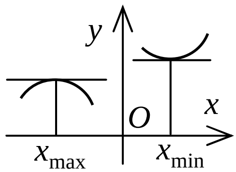

Рис. 60

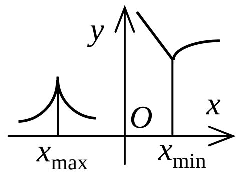

Рис. 61

Теорема 1 (теорема Ферма – необхідна умова гладкого екстремуму). *Якщо диференційована функція $f(x)$ має в точці x_0 екстремум, то її похідна у цій точці дорівнює нулю $f'(x_0) = 0$.*

Доведення спирається на теорему Ролля.

Приклад. Функції $y = x^2$ і $y = x^3$ всюди диференційовані. При $x = 0$ вони мають рівну нулю похідну $y' = 0$. У цій точці функція $y = x^2$ досягає мінімуму, а функція $y = x^3$ екстремуму не має.

У цьому прикладі досліджено неперервно диференційовані функції. Розглянемо приклади функцій, що мають розриви похідної.

а) Функція $y = |x|$ – неперервна, але у точці $x = 0$ не має похідної. З графіка (рис. 62) видно, що у точці $x = 0$ функція має мінімум $y_{\min} = y(0) = 0$.

б) Функція $y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2}$ не має похідної у точці $x = 0$: $y' \to \infty$, коли $x \to 0$ (перевірте самостійно). З графіка (рис. 63) видно, що у точці $x = 0$ функція має максимум $y_{\max} = y(0) = 1$.

в) Функція $y = x^{1/3}$ не має похідної у точці $x = 0$: $y' \to \infty$, коли $x \to 0$. У цій точці функція екстремуму не має (рис. 64).

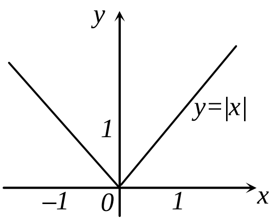

Рис. 62

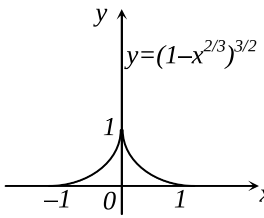

Рис. 63

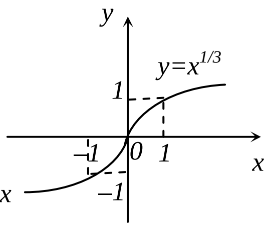

Рис. 64

Таким чином, узагальненням попередньої теореми про гладкий екстремум є

<u>Теорема 2 (необхідна умова екстремуму)</u>. *Якщо неперервна функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна у цій точці або існує і дорівнює нулю* $f'(x_0) = 0$, *або не існує.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці перша похідна або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою першої похідної***.

Критична точка, в якій перша похідна дорівнює нулю, називається ***стаціонарною точкою*** функції.

Зауваження 3. Стаціонарні точки – це точки, що “підозрілі” на гладкий екстремум. Критичні точки, в яких перша похідна має розрив, – це точки, що “підозрілі” на гострий екстремум.

2.3.3. Достатні умови екстремуму функції

Дослідження функції у критичних точках спирається на достатні умови екстремуму.

Теорема 1 (достатня умова екстремуму за першою похідною). *Нехай* x_0 *– критична точка похідної функції* $f(x)$, *яка диференційована в деякому околі цієї точки* x_0, *крім, можливо, самої точки* x_0. *Якщо при переході зліва направо через цю точку*:

1) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з плюса на мінус, то при* $x = x_0$ *функція має максимум*;

2) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з мінуса на плюс, то при* $x = x_0$ *функція має мінімум*;

3) *похідна* $f'(x)$ *не змінює знака, то при* $x = x_0$ *функція не має екстремуму*.

□ Нехай $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус; тобто для всіх x достатньо близьких до точки x_0, маємо: $f'(x) > 0$, коли $x < x_0$, $f'(x) < 0$, коли $x > x_0$.

За теоремою Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, де $c \in (x_0;\, x)$.

Якщо $x < x_0$, тоді $c < x_0$, $f'(c) > 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$ і отже, $f(x) - f(x_0) < 0$ або $f(x) < f(x_0)$.

Якщо $x > x_0$, тоді $c > x_0$, $f'(c) < 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$ і отже, $f(x) - f(x_0) < 0$ або $f(x) < f(x_0)$.

Таким чином, для всіх значень x, досить близьких x_0, значення функції менше, ніж значення функції у точці x_0. Це означає, що в точці x_0 функція $f(x)$ має максимум.

Аналогічно доводяться інші два випадки. ■

Правило дослідження функції $f(x)$ на монотонність і екстремум:

1) *Знайти область визначення функції* $D(f)$.

2) *Продиференціювати функцію* $y = f(x)$.

3) *Знайти критичні точки першої похідної*:

а) *Стаціонарні точки. Для цього розв'язати рівняння* $f'(x) = 0$ *і з одержаних розв'язків вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції.*

б) *Точки розриву похідної* $f'(x)$. *Для цього знайти точки, в яких похідна не існує, і з них вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції.*

4) *На координатній прямій* Ox *відмітити (штриховкою) область визначення* $D(f)$ *функції, вказавши її межові точки, і нанести критичні точки першої похідної. У результаті область визначення буде розбита на інтервали між сусідніми точками.*

5) *На кожному інтервалі довільно вибрати одну пробну внутрішню точку* x *і визначити знак похідної* $f'(x)$ *у цій точці, а значить, і на даному інтервалі.*

6) *Виходячи зі знака похідної* $f'(x)$, *зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі*:

якщо "+", то $f(x)$ *зростає; якщо "-", то* $f(x)$ *спадає.*

7) *Проаналізувати зміну знака похідної* $f'(x)$ *при переході через кожну критичну точку і зробити висновок про наявність і характер екстремуму*:

якщо "+,-", то $f(x)$ *має максимум; якщо "-,+", то* $f(x)$ *має мінімум; якщо "+,+" або "-,-", то* $f(x)$ *екстремуму не має.*

8) *Обчислити екстремуми функції* $f(x)$ *у знайдених точках екстремуму, якщо такі існують*:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}).$$

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{x^2} \big/ (x-4)$ на монотонність і екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ x-4 \neq 0;\ \ x \neq 4;\ \ x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty).$$

Похідна цієї функції

$$y' = \frac{(2/3)\cdot x^{-1/3}(x-4) - \sqrt[3]{x^2}}{(x-4)^2} = -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2}.$$

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0;\ \ -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2} = 0;\ \ x+8=0;\ x=-8 \in D(y);$$

б) точки розриву y': $3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0$;

$$\sqrt[3]{x} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0;\ \ x = 0 \in D(y);\ \ x = 4 \notin D(y).$$

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 65). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1 = -9$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, і визначаємо в них знак похідної:

$$y'(-9) = -\frac{-1}{3\sqrt[3]{-9}\cdot(-13)^2} < 0;\ \ y'(-1) = -\frac{7}{3\sqrt[3]{-1}\cdot(-5)^2} > 0;$$

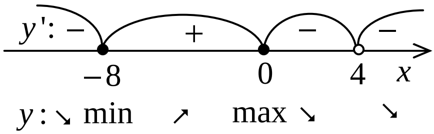

Рис. 65

$$y'(1) = -\frac{9}{3\sqrt[3]{1}\cdot(-3)^2} < 0;$$

$$y'(5) = -\frac{13}{3\sqrt[3]{5}\cdot 1^2} < 0.$$

Функція зростає при $x \in (-8; 0)$; функція спадає при $x \in (-\infty; -8) \cup (0;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

Точка мінімуму $x_{\min} = -8$; точка максимуму $x_{\max} = 0$. Відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min} = y(-8) = \sqrt[3]{(-8)^2}\Big/(-8-4) = -1/3; \quad y_{\max} = y(0) = 0. \ \blacksquare$$

<u>Теорема 2 (достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною)</u>. *Нехай* x_0 *– стаціонарна точка функції* $f(x)$, *яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки* x_0. *Якщо друга похідна* $f''(x)$ *у цій точці* x_0:

1) *від'ємна, то при* $x = x_0$ *функція має максимум*;

2) *додатна, то при* $x = x_0$ *функція має мінімум*;

3) *дорівнює нулю, то питання про наявність і характер екстремуму залишається відкритим і потрібні додаткові дослідження*. (Наприклад, з використанням похідних більш високого порядку).

<u>Приклад 2</u>. Дослідити функцію $y = x\ln^2 x$ на екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y): \ x > 0; \ x \in (0; +\infty).$$

Похідна цієї функції $y' = \ln^2 x + 2\ln x$.

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0; \ \ln^2 x + 2\ln x = 0; \ \ln x \cdot (\ln x + 2) = 0;$$

$$\ln x = 0 \ \text{ або } \ \ln x + 2 = 0; \ x = 1 \in D(y); \ x = e^{-2} \in D(y);$$

б) точки розриву y': немає.

Усі критичні точки є стаціонарними, де можливий гладкий екстремум. Застосовуємо другу похідну:

$$y'' = 2\ln x \cdot (1/x) + 2 \cdot (1/x) = 2(\ln x + 1)/x;$$

$$y''(1) = 2(\ln 1 + 1)/1 = 2 > 0 \ \Rightarrow \ x = 1 - \min;$$

$$y''\left(e^{-2}\right) = 2\left(\ln e^{-2} + 1\right)\Big/e^{-2} = -2e^2 < 0 \ \Rightarrow \ x = e^{-2} - \max.$$

Відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min} = y(1) = 1 \cdot \ln^2 1 = 0; \ y_{\max} = y\left(e^{-2}\right) = e^{-2} \cdot \ln^2 e^{-2} = 4e^{-2}. \ \blacksquare$$

2.3.4. Найменше та найбільше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за відповідною властивістю на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які відповідно називають ***глобальним*** (***абсолютним***) ***максимумом*** і ***мінімумом*** даної функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$. Ці значення можуть досягатися на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, що є точками екстремуму функції. Звідси випливає

Правило знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

1) *знайти всі критичні точки першої похідної* $f'(x)$, *що лежать усередині відрізка* $[a;b]$;

2) *обчислити значення функції* $f(x)$ *в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка*;

3) *з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше*.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3/3 - 4x^2$ на відрізку $[-3;3]$..

□ Похідна цієї функції $y' = x^2 - 8x$.

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0; \quad x^2 - 8x = 0; \quad x(x-8) = 0;$$

$$x = 0 \in [-3;3] \text{ або } x - 8 = 0; \quad x = 8 \notin [-3;3];$$

б) точки розриву y': немає.

Обчислимо значення функції: $y(0) = 0$;

$$y(-3) = (-3)^3/3 - 4\cdot(-3)^2 = -45; \quad y(3) = 3^3/3 - 4\cdot 3^2 = -27.$$

Таким чином, найбільше значення $\max\limits_{x\in[-3;3]} y = y(0) = 0$ і найменше значення $\min\limits_{x\in[-3;3]} y = y(-3) = -45$. ■

2.3.5. Застосування теорії екстремуму до розв'язування прикладних задач

Застосовуючи поняття екстремуму, розв'язується багато задач геометричного і фізичного змісту. Розглядається функція, що служить моделлю відповідного процесу на деякому інтервалі (що може бути необмеженим) зміни аргументу, а потім знаходиться найбільше чи найменше значення цієї функції в даному інтервалі. При цьому зі змісту задачі наявність і характер екстремуму часто відомі, що полегшує її розв'язування.

Приклад 1. Нехай у результаті незалежно проведених експериментів дістали n різних значень величини x: x_1, x_2, ..., x_n. Найти таке значення цієї величини x, при якому сума квадратів похибок найменша.

□ Сума квадратів похибок є функцією

$$f(x)=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\ldots+(x-x_n)^2,$$

яка всюди визначена. Шукане значення величини x знаходиться з умови найменшого значення цієї функції. Маємо:

$$f'(x)=2(x-x_1)+2(x-x_2)+\ldots+2(x-x_n);\quad f''(x)=2n.$$

З рівняння $f'(x)=0$ знаходимо єдину критичну точку $x=(x_1+x_2+\ldots+x_n)/n$. Оскільки в цій точці $f''(x)=2n>0$, то в ній функція досягає найменшого значення.

Отже, шуканим значенням величини x є середнє арифметичне її наближених значень. ■

Приклад 2. Нехай електричний ліхтар рухається на блоці вздовж вертикальної прямої Ox, що проходить через центр O круглого горизонтального майданчика радіуса $AO=R$ (рис. 66). На якій висоті $BO=x$ над горизонтальною площиною треба його повісити, щоб освітленість периметра майданчика була найкращою?

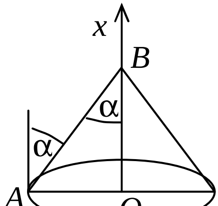

Рис. 66

□ З фізики відомо, що освітленість J предмета A прямо пропорційна косинусу кута падіння α променів і обернено пропорційна квадрату відстані $AB = r$ предмета від джерела світла B: $J = k\cos\alpha / r^2$, де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від сили світла ліхтаря.

З рис. 66 маємо: $r^2 = AB^2 = AO^2 + BO^2 = R^2 + x^2$;

$$\cos\alpha = BO/AB = x/\sqrt{R^2+x^2}\,.$$

Тоді $J = kx/\left(R^2+x^2\right)^{3/2}$, де $x \in (0;+\infty)$.

Похідна цієї функції

$$J' = k\frac{\left(R^2+x^2\right)^{3/2} - x\cdot(3/2)\cdot\left(R^2+x^2\right)^{1/2}\cdot 2x}{\left(R^2+x^2\right)^3} = \frac{k\left(R^2-2x^2\right)}{\left(R^2+x^2\right)^{5/2}}.$$

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$J' = 0;\ \ k\left(R^2-2x^2\right)\Big/\left(R^2+x^2\right)^{5/2} = 0;\ \ R^2 - 2x^2 = 0;$$

$$x = -R\sqrt{2}/2 \notin (0;+\infty);\ \ x = R\sqrt{2}/2 \in (0;+\infty);$$

б) точки розриву J': $\left(R^2+x^2\right)^{5/2} = 0$; $x \in \varnothing$.

Оскільки при $x \to 0$ і $x \to +\infty$ $J(x) \to 0$, а усередині інтервалу $(0;+\infty)$ маємо єдину стаціонарну точку $x = R\sqrt{2}/2$, в якій

$$J\left(R\sqrt{2}/2\right) = k\left(R\sqrt{2}/2\right)\Big/\left(R^2 + \left(R\sqrt{2}/2\right)^2\right)^{3/2} = 2\sqrt{3}k/9 > 0,$$

то в цій точці функція $J(x)$ приймає найбільше значення. Отже, ліхтар треба повісити на висоті $BO = R\sqrt{2}/2$. ■

2.3.6. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a;b)$ і в точці $x_0 \in (a;b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка даної функції у точці $M_0(x_0; f(x_0))$ можна провести дотичну.

Крива (графік функції) називається ***опуклою*** в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 67). Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається ***угнутою*** (рис. 68).

Точка $M_0(x_0\,;\,f(x_0))$ називається ***точкою перегину***, якщо у досить малому її околі точки кривої з абсцисами $x < x_0$ лежать з одного боку від дотичної, а точки з абсцисами $x > x_0$ – з іншого (рис. 69). Тобто, у точці M_0 крива переходить а одного боку дотичної до іншого.

Крива (графік функції) називається ***опуклою на інтервалі*** $(a;b)$, якщо вона опукла в кожній його точці. Тобто, на цьому інтервалі крива лежить нижче кожної своєї дотичної.

Аналогічно, на ***інтервалі вгнутості*** крива лежить вище кожної своєї дотичної.

Точка перегину – це точка кривої, в якій сполучається ділянка опуклості з ділянкою вгнутості.

<u>Теорема 1 (достатні умови опуклості та вгнутості)</u>. *Нехай на інтервалі* $(a;b)$ *задана двічі диференційована функція* $f(x)$. *Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *друга похідна* $f''(x)$:

1) *від'ємна, то графік функції опуклий*;
2) *додатна, то графік функції вгнутий*;
3) *дорівнює нулю, то графік функції – пряма лінія*.

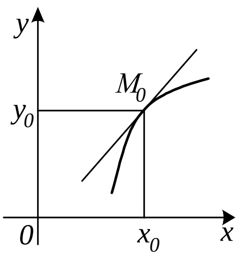

Рис. 67

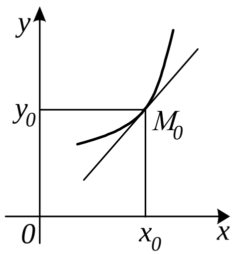

Рис. 68

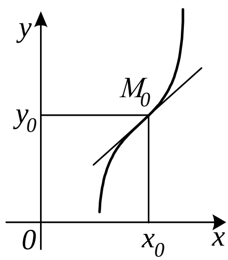

Рис. 69

Теорема 2 (необхідні умови точки перегину). *Якщо* $M_0(x_0; y_0)$ *– точка перегину графіка функції* $f(x)$*, то друга похідна* $f''(x)$ *в точці* x_0 *або існує і дорівнює нулю* $f''(x_0) = 0$*, або не існує.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці друга похідна $f''(x)$ або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою другої похідної***.

Зауваження 1. Критичні точки другої похідної – це точки, що "підозрілі" на перегин.

Теорема 3 (достатня умова точки перегину). *Нехай* x_0 – *критична точка другої похідної функції* $f(x)$*, яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки* x_0*, крім, можливо, самої точки* x_0*. Якщо при переході через цю точку*:

1) *друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то при* $x = x_0$ *функція має перегин*;

2) *знак другої похідної* $f'(x)$ *не змінюється, то при* $x = x_0$ *функція перегину не має.*

Зауваження 2. Правило дослідження функції на опуклість, угнутість і перегин аналогічне правилу дослідження функції на монотонність і екстремум. Треба тільки замість знака першої похідної аналізувати знак другої похідної.

Приклад. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = \ln(x^2+9)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \ x^2+9>0;\ \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Знаходимо другу похідну:

$$y' = \frac{2x}{x^2+9};\quad y'' = 2\cdot\frac{x^2+9-2x\cdot x}{(x^2+9)^2} = \frac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}.$$

Критичні точки другої похідної:

а) $y''=0$; $\dfrac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}=0$; $9-x^2=0; x=\pm 3\in D(y)$;

б) точки розриву y'': $(x^2+9)^2=0$; $x\in\varnothing$.

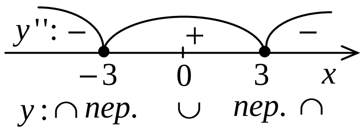

Рис. 70

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 70). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=4$, і визначаємо в них знак другої похідної:

$$y''(-4)=\frac{2(9-(-4)^2)}{((-4)^2+9)^2}=\frac{2\cdot(-7)}{25}<0;$$

$$y''(0)=\frac{2(9-0^2)}{(0^2+9)^2}=\frac{2}{9}>0;\quad y''(4)=\frac{2(9-4^2)}{(4^2+9)^2}=\frac{2\cdot(-7)}{25}<0.$$

Функція опукла при $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; функція вгнута при $x\in(-3;3)$.

Перегин при $x_1=-3$ і $x_2=3$. Тоді

$$y_1=\ln((-3)^2+9)=\ln 18;\quad y_2=\ln(3^2+9)=\ln 18.$$

Отже, $M_1(-3;\ln 18)$ і $M_2(3;\ln 18)$ – точки перегину. ■

2.3.7. Асимптоти графіка функції

Нехай $y=f(x)$ – функція, графік якої має нескінченну гілку, тобто він має точки, що лежать як завгодно далеко від початку координат.

Асимптотою графіка функції $y=f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається гілка графіка, що йде в нескінченність. Тобто, відстань від змінної точки $M(x;f(x))$ до цієї прямої прямує до нуля, якщо вказана точка рухається вздовж вітки графіка до нескінченності.

Зауваження 1. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неодноразово.

Асимптоти бувають двох видів: ***вертикальні*** й ***похилі*** (зокрема, ***горизонтальні***) (рис. 71).

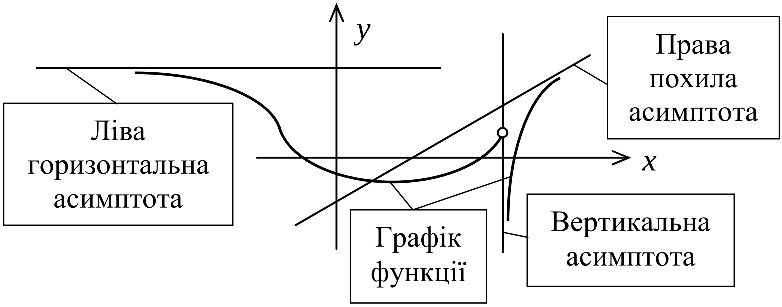

Рис. 71

а) Вертикальна асимптота має рівняння $x = a$, де a – точка, в якій хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ нескінченна.

Зауваження 2. Точки, що "підозрілі" на вертикальні асимптоти, – це скінченні межові точки області визначення $D(f)$ та точки розриву функції $y = f(x)$.

Зауваження 3. Графік функції може мати довільну кількість вертикальних асимптот.

Приклад 1. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції $y = \ln(x+3)/(x^2-16)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y): \begin{cases} x+3>0 \\ x^2-16 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x>-3 \\ x \neq \pm 4; \end{cases} \quad x \in (-3;4) \cup (4;+\infty).$$

$x_1 = -3$ і $x_2 = 4$ – точки, що "підозрілі" на вертикальні асимптоти.

$$\lim_{x\to -3+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|-\infty/(-7)\right|=+\infty \Rightarrow x=-3$$

– вертикальна асимптота.

$$\lim_{x\to 4-0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|\ln 7/(-0)\right|=-\infty \text{ і}$$

$$\lim_{x\to 4+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right)=\left|\ln 7/(+0)\right|=+\infty \Rightarrow x=4$$

– вертикальна асимптота. ■

б) <u>Похила (зокрема, горизонтальна) асимптота</u>. Нехай функція $y=f(x)$ має при $x\to+\infty$ праву похилу асимптоту, рівняння якої $y=kx+b$ (рис. 72). Визначимо числа k і b.

Нехай $M(x;\, f(x))$ – змінна точка, що належить графіку функції, і $N(x;\, y)$ – відповідна точка, що належить асимптоті. Відстань від точки M до асимптоти дорівнює довжині перпендикуляра MP. За умовою $\lim\limits_{x\to+\infty} MP=0$. Якщо φ – кут нахилу асимптоти до осі Ox, то з ΔNMP маємо $NM=MP/\cos\varphi$. Оскільки φ – стала величина і $\varphi\neq\pi/2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} NM=0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} MP=0$ одночасно.

Але $NM=|QM-QN|=|f(x)-y|=|f(x)-kx-b|$. Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ або $\lim\limits_{x\to+\infty} x(f(x)/x-k-b/x)=0$.

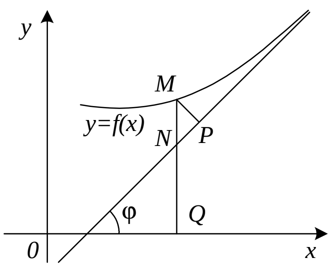

Рис. 72

Через те, що $x\to+\infty$, має виконуватись рівність $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/x-k-b/x)=0$.

Оскільки k і b – сталі величини, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(b/x)=0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/x-k)=0$ або $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)/x\right)$.

Знайшовши k, для b маємо $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$.

Отже, якщо пряма $y = kx + b$ є правою похилою асимптотою, то k і b знаходяться як границі

$$k = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x)/x \right); \;\; b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx),$$

де спочатку обчислюється k, а потім b.

Навпаки, якщо існують указані границі для визначення k і b, то має місце рівність $\lim\limits_{x \to +\infty} MP = 0$ і пряма $y = kx + b$ є похила асимптота. Якщо хоча б одна з двох границь для k і b не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

<u>Зауваження 4</u>. Права горизонтальна асимптота $(k = 0)$ має рівняння $y = b$, де $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

<u>Зауваження 5</u>. Аналогічно розглядається випадок лівої похилої (зокрема, горизонтальної) асимптоти, коли $x \to -\infty$.

<u>Зауваження 6</u>. Графік функції $y = f(x)$ може мати не більше двох похилих (зокрема, горизонтальних) асимптот. При цьому крива повинна мати відповідну нескінченну гілку при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Асимптоти можуть бути різними при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

<u>Приклад 2</u>. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y = \ln\left(e^{2x} + e^{-3}\right)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y)\colon e^{2x} + e^{-3} > 0; \;\; x \in (-\infty; +\infty).$$

Оскільки крива має ліву при $x \to -\infty$ і праву при $x \to +\infty$ нескінченні гілки, то можуть існувати обидві – ліва і права – похилі асимптоти.

Шукаємо ліву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln\left(e^{2x} + e^{-3}\right)}{x} = \left| \frac{-3}{-\infty} \right| = 0;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)=-3.$$

Отже, пряма $y=-3$ – ліва горизонтальна асимптота.

Шукаємо праву похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)}{x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(e^{2x}+e^{-3})\right)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}+e^{-3}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}+e^{-3}\right)'}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2}=2;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)-2x\right)=|\,\infty-\infty\,|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{2x}+e^{-3}\right)-\ln e^{2x}\right)=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+e^{-3}}{e^{2x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{2x}+e^{-3}\right)'}{\left(e^{2x}\right)'}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\cdot 2}{e^{2x}\cdot 2}=\ln 1=0.$$

Отже, пряма $y=2x$ – права похила асимптота. ■

<u>Приклад 3</u>. Знайти асимптоти функції $y=(x^2+3x-1)/x$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ x\neq 0;\ \ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

$x=0$ – точка, що “підозріла” на вертикальну асимптоту.

$$\lim_{x\to-0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(-\infty)\right|=+\infty \text{ і}$$

$$\lim_{x\to+0}\left((x^2+3x-1)/x\right)=\left|-1/(+\infty)\right|=-\infty\ \Rightarrow\ x=0$$

– вертикальна асимптота.

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left((x^2+3x-1)/x-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(3-1/x)=3 \quad\Rightarrow\quad y=x+3$$

– похила (ліва і права одночасно) асимптота. ■

2.3.8. Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

Нехай функція задана явно рівнянням $y=f(x)$. Повне дослідження цієї функції та побудову ескіза графіка можна здійснювати за наступною схемою.

1. *Попереднє дослідження.*

1.1. *Знаходження області визначення $D(f)$ функції.*

1.2. *Знаходження точок перетину графіка з осями координат.*

1.3. *Знаходження інтервалів знакосталості, де функція зберігає знак (додатна чи від'ємна).*

1.4. *Дослідження функції на парність і непарність.*

1.5. *Дослідження функції на періодичність.*

2. *Дослідження точок розриву функції та її поведінки на кінцях інтервалів області визначення. Знаходження області значень $E(f)$ функції. Знаходження асимптот.*

2.1. *Знаходження односторонніх границь функції в точках розриву та на скінченних кінцях інтервалів області визначення. Класифікація точок розриву. Знаходження вертикальних асимптот.*

2.2. *Дослідження поведінки функції "на нескінченності" (при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$). Знаходження області значень $E(f)$ функції. Знаходження похилих асимптот.*

3. *Дослідження функції за допомогою першої похідної.*

3.1. *Знаходження інтервалів зростання та спадання функції.*

3.2. *Знаходження точок екстремуму та відповідних екс-*

тремальних значень функції.

4. *Дослідження функції за допомогою другої похідної*.

4.1. *Знаходження інтервалів опуклості та вгнутості функції*.

4.2. *Знаходження точок перегину*.

5. *Побудова графіка*.

5.1. *Побудова асимптот*.

5.2. *Побудова характерних точок, знайдених на попередніх етапах*.

5.3. *Виділення штриховкою вертикальних смуг (вище чи нижче осі* Ox *відповідно до знака функції), де лежать частини графіка*.

5.4. *При необхідності проведення додаткових обчислень значень функції в пробних точках з тих інтервалів, де потрібно уточнити розміщення графіка*.

5.5. *Побудова ескіза графіка*.

Зауваження. При дослідженні конкретної функції не обов'язково строго додержуватися зазначеної вище схеми. Можна навіть не з'ясовувати тих чи інших властивостей, якщо вони досить очевидні. Так, на періодичність треба досліджувати тригонометричні функції, а раціональні функції – не треба, оскільки відомо, що вони неперіодичні.

Приклад. Дослідити функцію $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ і побудувати ескіз її графіка.

□ Область визначення функції $D(f): x\in R$.

Точки перетину графіка функції:

з віссю Oy: $y(0)=(6\cdot 0-0)^{1/3}=0$;

з віссю Ox: $y=0$; $\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}=0$; $6x^2-x^3=0$; $x^2(6-x)=0$; $x=0$; $x=6$; маємо дві точки $(0;0)$ і $(6;0)$.

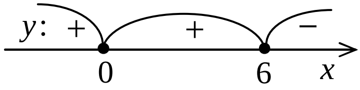

Рис. 73

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи від'ємна (рис. 73): функція від'ємна при $x\in(6;+\infty)$; функція додатна при $x\in(-\infty;0)\cup(0;6)$.

$y(-x) \neq y(x)$; $y(-x) \neq -y(x)$ – функція не є парною і не є непарною.

Функція неперіодична.

Точок розриву і скінченних кінців інтервалів області визначення функція не має, тому вертикальні асимптоти відсутні.

Досліджуємо поведінку функції при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} (6x^2 - x^3)^{1/3} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} (6x^2 - x^3)^{1/3} = -\infty.$$

Область значень функції $E(f): y \in R$.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (6/x - 1)^{1/3} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} + x\right) = \left|\infty - \infty\right| =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2 - x^3 + x^3}{\left(6x^2 - x^3\right)^{2/3} - x\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} + x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= 6 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(6/x - 1)^{2/3} - (6/x - 1)^{1/3} + 1} == 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

Отже, пряма $y = -x + 2$ є похила (ліва і права) асимптота.

Обчислимо похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y' = (\sqrt[3]{6x^2 - x^3})' = (4 - x) \Big/ \sqrt[3]{x(6 - x)^2};$$

стаціонарні точки: $y' = 0$; $(4 - x) \Big/ \sqrt[3]{x(6 - x)^2} = 0$; $x = 4$;

похідна не існує у точках: $\sqrt[3]{x(6 - x)^2} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

Інтервали монотонності та екстремуми (рис. 74): функція спадає при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; функція зростає при $x \in (0; 4)$; точка мінімуму $x_{\min} = 0$; точка максимуму

$x_{\max} = 4$; відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min} = y(0) = 0; \quad y_{\max} = y(4) = \sqrt[3]{6 \cdot 4^2 - 4^3} = 2\sqrt[3]{4}.$$

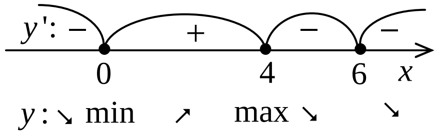

Рис. 74

Обчислимо другу похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y'' = -8 \Big/ \left(x^{4/3}(6-x)^{5/3}\right);$$

точки, де $y'' = 0$, відсутні; друга похідна не існує у точках: $x^{4/3}(6-x)^{5/3} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину (рис. 75): функція опукла при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$; функція

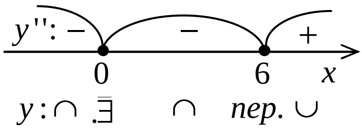

Рис. 75

вгнута при $x \in (6; +\infty)$;

$x_{пер} = 6$; $y_{пер} = y(6) =$

$= \sqrt[3]{6 \cdot 6^2 - 6^3} = 0$.

Отже, $(6; 0)$ – точка перегину.

Ескіз графіка дослідженої функції побудовано на рис. 76. ■

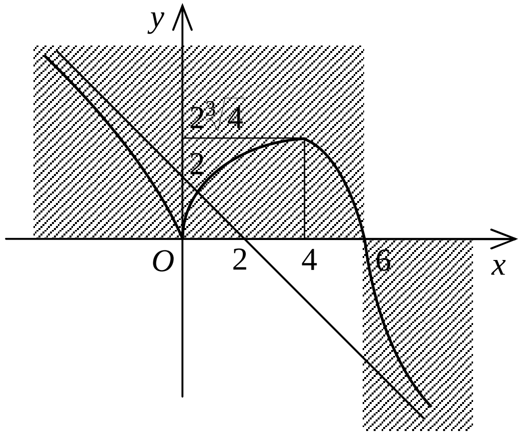

Рис. 76

2.4. Контрольні запитання

1) Що називається похідною функції?
2) У чому полягає фізичний зміст похідної?
3) У чому полягає геометричний зміст похідної? Наведіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
4) Який зв'язок між диференційованістю та неперервністю?
5) За якими правилами обчислюється похідна суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
6) Як знаходиться похідна складеної функції? Оберненої функції? Параметрично заданої функції?
7) Наведіть формули похідних основних елементарних функцій.
8) Як здійснюється диференціювання неявно заданої функції?
9) У чому полягає правило логарифмічного диференціювання?
10) Дайте означення похідної n-го порядку. У чому полягає фізичний зміст другої похідної?
11) Що називається диференціалом функції?
12) У чому полягає геометричний зміст диференціала?
13) Як зв'язані похідна і диференціал?
14) За якими правилами обчислюється диференціал суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
15) Наведіть формули диференціалів основних елементарних функцій.
16) Як диференціал застосовується в наближених обчисленнях?
17) Що називається диференціалом n-го порядку?
18) У чому полягає інваріантність форми першого диференціала? Чи поширюється властивість інваріантності на диференціали вищих порядків?
19) Сформулюйте теорему Ролля про корені похідної. Який її геометричний зміст?
20) Сформулюйте теорему Лагранжа про скінченні прирости. Який її геометричний зміст?
21) Сформулюйте теорему Коші про відношення приростів двох функцій.
22) У чому полягає правило Лопіталя? Для розкриття невизначеностей яких видів воно застосовується безпосередньо?
23) Як зводяться невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0 до

одного з основних видів $0/0$ чи ∞/∞?

24) Наведіть формулу Тейлора n-го порядку із залишковим членом у формі Лагранжа.
25) Як записується формула Тейлора в диференціальній формі?
26) Наведіть приклади розкладання функцій за формулою Маклорена.
27) Як формула Тейлора застосовується в наближених обчисленнях?
28) У чому полягають достатні умови монотонності та сталості функції?
29) Що називається точкою мінімуму функції? Точкою максимуму?
30) У чому полягає необхідна умова екстремуму?
31) Що таке критичні точки першої похідної? Стаціонарні точки функції?
32) У чому полягає достатня умова екстремуму за першою похідною?
33) Сформулюйте правило дослідження функції на монотонність і екстремум за першою похідною.
34) У чому полягає достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною?
35) Як знаходяться найменше та найбільше значення функції в замкненій області?
36) Яка функція називається опуклою (вгнутою) в точці та на інтервалі?
37) Що таке точка перегину?
38) У чому полягають достатні умови опуклості та вгнутості?
39) У чому полягає необхідна умова точки перегину?
40) Що таке критичні точки другої похідної?
41) Сформулюйте правило дослідження функції на опуклість, угнутість та перегин за другою похідною.
42) Що називається асимптотою графіка функції? На які види діляться асимптоти?
43) Який вигляд має рівняння вертикальної асимптоти? Похилої асимптоти?
44) Опишіть загальну схему повного дослідження функції та побудови ескіза графіка.

2.5. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти похідну функції $y = y(x)$, що задана явно (пункти “а”, “б” і “в”) чи неявно (пункт “г”).

№ в-та	Функція
1	а) $y = 2^{-x^2} ctg 4x$; б) $y = \dfrac{\arccos(1/x)}{2\log_2(x-1)}$; в) $y = (arcctg 4x)^{\ln x}$; г) $x + \ln y = \sin(xy)$
2	а) $y = \arcsin x^3 \cdot \sin 3x$; б) $y = \dfrac{3^{4x}}{3 ctg\, x^2}$; в) $y = \left(\ln(x^2+1)\right)^{\cos(1/x)}$; г) $y + \sin x = x \cos y$
3	а) $y = \sin 3x^2 \log_5(3x-1)$; б) $y = \dfrac{4^{x^3}}{2\arcsin(1/x)}$; в) $y = (arctg\, 5x)^{\cos x}$; г) $e^y x - \sin x = y^2$
4	а) $y = tg(4x-3) \cdot 5^{2\sqrt{x}}$; б) $y = \dfrac{\log_8(2x-1)}{3 arctg(1/x)}$; в) $y = (\arccos 3x)^{\ln(x-1)}$; г) $ctg\, y + xe^y = 1$
5	а) $y = \ln^2 x \cdot \arcsin(2/x)$; б) $y = \dfrac{ctg(2+x^2)}{5\log_3 2x}$; в) $y = (tg\, x)^{\sin 3x}$; г) $xy + 2 = x + \ln y$
6	а) $y = 2\log_2(4x+1) \cdot ctg(1/x)$; б) $y = \dfrac{e^{3x^2}}{3\cos(7x-3)}$; в) $y = (\ln x)^{arctg 4x}$; г) $\ln y + \sin xy = x$
7	а) $y = e^{-3x} arcctg(3/x)$; б) $y = \dfrac{\cos 3x^2}{\arcsin(x^3+1)}$; в) $y = (ctg 2x)^{tg\, x}$; г) $y \sin y = x^2 - y^2$

8	а) $y=\ln(2x^2-1)\cdot 2^{4x}$; б) $y=\dfrac{ctg3x}{arctg(3/x)}$; в) $y=(\cos 2x)^{tg\,x}$; г) $ye^{2y}+\sqrt{x}=y^2$
9	а) $y=\arccos(3/x)\cdot\log_4 3x$; б) $y=\dfrac{6^{3x^2}}{ctg\sqrt{x}}$; в) $y=(tg2x)^{arctg\,x}$; г) $y^2\sin xy=1-x$;
10	а) $y=2^{x^2}\log_3(2x-5)$; б) $y=\dfrac{\arccos\sqrt{x+1}}{ctg3x}$; в) $y=(\sin 2x)^{\cos x}$; г) $tg(x/y)+e^x=y$
11	а) $y=\sin(8/x)\cdot e^{4x^2}$; б) $y=\dfrac{\sin(2x-1)}{\arccos^3 x}$; в) $y=(\cos\sqrt{x})^{\ln x}$; г) $e^{x/y}+x^2=y$
12	а) $y=\sqrt[3]{x^4}\sin x^3$; б) $y=\dfrac{\sqrt{\cos(4x+1)}}{\arcsin 2x}$; в) $y=(ctg2x)^{5x^2}$; г) $3^x+3^y=(x-y)\ln 3$
13	а) $y=\lg(2x^3+1)\cdot tg(1/x)$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\ln\cos 2x}$; в) $y=(\ln x)^{\sin 2x}$; г) $x+2y^4=tg\,xy$
14	а) $y=\sqrt{x^5}\,arcctg\,5x^2$; б) $y=\dfrac{tg(2x+5)}{\cos\left(2/\sqrt{x}\right)}$; в) $y=(x\sin x)^x$; г) $\arcsin xy=x-y$
15	а) $y=arctg(5/x^2)\cdot\lg^2 x$; б) $y=\dfrac{tg\sqrt{1+3x^2}}{\cos 6x}$; в) $y=(\sin x)^{e^{4/x}}$; г) $y^4+x^4=\ln(x/y)$

16	а) $y=\sqrt[4]{x^7}\, arctg 7x^2$; б) $y=\dfrac{\arccos x^2}{\sqrt{1-x^4}}$; в) $y=(\ln x)^{\sin 4x}$; г) $x\cos y=y+ctg\,x$
17	а) $y=4^{\sqrt{x}}\cdot\sin 2x^3$; б) $y=\dfrac{tg^2 3x}{\cos x-x}$; в) $y=(\arccos x)^{1/x^3}$; г) $\sin(x+y)=y^2-x^4$
18	а) $y=3^{2x^3}\cdot\cos 6x$; б) $y=\dfrac{x^2-\sqrt{x+1}}{tg\,4x}$; в) $y=(\sin x)^{2\sqrt{x}}$; г) $xy+1=\arccos(x-y)$.
19	а) $y=5^{x^3}\cdot\sin 3x$; б) $y=\dfrac{x-2\cos x}{ctg 2x}$; в) $y=(\arccos x)^{4\sin x}$; г) $e^y x=\ln(x-y)$.
20	а) $y=(3x+\lg x)\cdot 4^{x^2}$; б) $y=\dfrac{\lg^2 x}{\sin 2x-2x}$; в) $y=(arcctg 3x)^{\sin x}$; г) $arcctg\;xy=x^3+y^3$
21	а) $y=(e^{x^2}-x)\cdot\sin 4x$; б) $y=\dfrac{arcctg\sqrt[4]{x}}{1+\ln x}$; в) $y=(\arcsin 2x)^{\ln x}$; г) $2x-y^2=\cos\;xy$
22	а) $y=(\ln x-\lg x)\cdot ctg 2x$; б) $y=\dfrac{\cos 4x}{arctg\,x^2}$; в) $y=(tg 3x)^{e^x}$; г) $y\sin y=x^2+2y$
23	а) $y=\sin e^x\cdot\ln\cos x$; б) $y=\dfrac{\sin 3x-x^3}{arcctg 3x^2}$; в) $y=(tg\,5x)^{ctg\,x}$; г) $xy^3+\cos(x-y)=0$

24	а) $y = \arcsin 3x \cdot \lg^3 x$; б) $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 2}}{\cos 2x}$; в) $y = (ctg\, 2x)^{\ln 4x}$; г) $y + x = \sin(y/x)$
25	а) $y = e^{\sqrt{x}} \cdot \arcsin 2x$; б) $y = \dfrac{x^3 - 3\sin x}{tg 3x}$; в) $y = (ctg 2x)^{e^x}$; г) $xy^3 = \arccos(x - y)$
26	а) $y = 4^{\sqrt{x}} \cdot \sin(2/x)$; б) $y = \dfrac{ctg\, x}{x^4 + \cos 2x^2}$; в) $y = (tg\, 4x)^{\arcsin x}$; г) $x - y = arctg(y/x)$
27	а) $y = \lg^2 x \cdot \arccos 2\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{2 + \cos x^2}{ctg 4x}$; в) $y = (\sin 3x)^{arcctg\, x}$; г) $y^3 - \cos x = x^3 \sin y$
28	а) $y = \cos^2 x \cdot \arcsin 2\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{arctg 2x}$; в) $y = (tgx)^{\sin 3x}$; г) $xy = \ln(x - y)$
29	а) $y = \log_3^2 x \cdot \cos 4\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{tg\, 3x}{arcctg\, x^2}$; в) $y = (ctg\, 4x)^{1/x}$; г) $2x - y^2 = \sin(x/y)$
30	а) $y = (\ln x - \lg x) \cdot tg\, e^x$; б) $y = \dfrac{arctg\sqrt{x}}{1 + \ln x}$; в) $y = (\arccos x)^{\cos 2x}$.; г) $y \sin y + \sin x = x^3$

Завдання 2. Знайти другу похідну y''_{xx} функції $y = y(x)$, що задана параметрично.

№ в-та	Функція	№ в-та	Функція
1	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = te^{-t} \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 2t - \cos 2t \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 2tg\, t \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = e^t + t \\ y = e^t / t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = e^t + \sin t \\ y = 2ctg\, t \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \sin t \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(t+1) \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = t \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = t + \ln t \\ y = 2\cos t \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = arctg\,(1/t) \\ y = e^t \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \ln \sin t \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = \arccos t \\ y = 1/\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = 2\, tg\ t \\ y = 1/\sin 2t \end{cases}$	22	$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos^3 t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = 2\ln\cos t \end{cases}$	23	$\begin{cases} x = 2\cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \ln\left(1-t^2\right) \end{cases}$	24	$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = t - \sin 2t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$	25	$\begin{cases} x = arctg\, t \\ y = 1/\sqrt{1+t^2} \end{cases}$

11	$\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + tg\ t \end{cases}$	26	$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = tg\,2t \end{cases}$
12	$\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
13	$\begin{cases} x = arctg\sqrt{t} \\ y = \ln(1 + t) \end{cases}$	28	$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t^2 - \sin 2t. \end{cases}$
14	$\begin{cases} x = e^t / t \\ y = t\, e^{-t} \end{cases}$	29	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = t \sin t \end{cases}$
15	$\begin{cases} x = arctg\sqrt{t} \\ y = \sqrt{1 + t} \end{cases}$	30	$\begin{cases} x = \ln \sin t; \\ y = \ln \cos t \end{cases}$

Завдання 3. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка l заданої функції у відповідній точці $M_0(x_0; y_0)$. Зобразити дотичну та нормаль у декартовій прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y = (1 - \sin x)^{ctg\,(x/4)}$; $x_0 = \pi$	16	$y = (1 + (1/\pi)\sin \pi x)^{x^2}$; $x_0 = 1$
2	$y = (1 - \cos x)^{tg\,(x/2)}$; $x_0 = \pi/2$	17	$tg(x - y) + x^2 + 2y^2 = 3$; $M_0(1;1)$
3	$y = \dfrac{(2 - x)^5 (x + 1)^2}{x\ \sqrt{(5 - x)^3}}$; $x_0 = 1$	18	$y = \dfrac{(3x - 5)^2}{(x + 1)\ \sqrt[3]{(2 - x)^4}}$; $x_0 = 1$

4	$y=(1+2\,tg\,x)^{\cos x}$; $x_0=0$	19	$\ln(xy+1)+y^3-1=0$; $M_0(0;1)$
5	$x^2/64-y^2/16=1$; $M_0(10;-3)$	20	$\begin{cases} x=\sqrt{2}(\cos t+t\sin t)-1 \\ y=\sqrt{2}(\sin t-t\cos t)-1 \end{cases}$; $t_0=\pi/4$
6	$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin 2t \end{cases}$; $t_0=\pi/2$	21	$\begin{cases} x=(1/\pi)t\cos t+\pi \\ y=2t\sin t \end{cases}$; $t_0=\pi/2$
7	$x^2/25+y^2=1$; $M_0(4;-3/5)$	22	$\cos\dfrac{y}{x}+x^3-4y-2=0$; $M_0(1;0)$
8	$x^2/100+y^2/4=1$; $M_0(8;\ -6/5)$	23	$tg(x-1/y)+3y^2-3x=0$; $M_0(1;1)$
9	$x^2/16-y^2=1$; $M_0(5;\ -3/4)$	24	$\sin\dfrac{x}{y}+4y-x+4=0$; $M_0(0;-1)$
10	$x^2+y^2=25$; $M_0(-4;3)$	25	$\arcsin(xy)+3y-x+3=0$; $M_0(0;-1)$
11	$x^2/100+y^2/25=1$; $M_0(-8;3)$	26	$\cos(x/y)+3y-x+2=0$; $M_0(0;-1)$
12	$x^2/64-y^2/16=1$; $M_0(-10;-3)$	27	$e^y-5\sin(xy)-1=0$; $M_0(1;0)$
13	$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=\pi-\cos(t/2) \end{cases}$; $t_0=\pi$	28	$\begin{cases} x=\ln(1+t^2)-\ln 2 \\ y=4\,arctg\,t-\pi \end{cases}$; $t_0=1$

14	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 4\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$; $t_0 = \pi/4$	29	$\begin{cases} x = 2\sqrt{1-t^2} \\ y = 6\arcsin t - \pi \end{cases}$; $t_0 = 1/2$
15	$x^2/16 - y^2/4 = 1$; $M_0(-5; -3/2)$	30	$x^2/25 - y^2/150 = 1$; $M_0(-7; 12)$

Завдання 4. Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаній умові.

№ в-та	Функція та рівняння	№ в-та	Функція та рівняння
1	$y = e^{-2x}/x^2$; $xy' + 2(x+1)y = 0$	16	$y = \ln^2 x/x$; $x^2 y' + xy - 2\ln x = 0$
2	$y = \sin\sqrt{x}$; $4x\,y'' + 2y' + y = 0$	17	$y = x\,arctg\,x$; $x^4 y'' - 2(xy' - y)^2 = 0$
3	$y = \sin^2 x$; $2y\,y'' + 4y^2 = (y')^2$	18	$y = e^{\sin x}$; $y'' - y'\cos x + y\sin x = 0$
4	$y = x\sqrt{6\ln x}$; $xy\,y' = y^2 + 3x^2$	19	$y = ctg^2 x$; $y''\cos^2 x = 2y + 6y^2$
5	$y = x/\ln x$; $x^4 y'' + xy^2 = 2y^3$	20	$y = (1 + x^2)\ arctg\,x$; $(1 + x^2)\ (xy'' - y') + 1 = x^2$
6	$y = x/(x+1)$; $xy'' + 2y\,y' = 0$	21	$y = x\sin x$; $y'' + y - 2\cos x = 0$
7	$y = e^{x^2/2}$; $y\,y'' - (y')^2 = e^{x^2}$	22	$y = \sqrt{\cos x}$; $4y^3 y'' + 2y^4 + \sin^2 x = 0$

8	$y=\cos(1/x)$; $x^4y''+2x^3y'+y=0$	23	$y=x\cos x$; $y''+y+2\sin x=0$
9	$y=\sqrt{\ln x}/x^2$; $2x^5y\,y'+4x^4y^2=1$	24	$y=\sqrt{x}\,e^x$; $4x^2y''=(4x^2+4x-1)\,y$
10	$y=\cos x^2$; $xy''-y'+4x^3y=0$	25	$y=tg\,x/x$; $xy'+y-1/\cos^2 x=0$
11	$y=x\,ctg\,x$; $y''\sin^2 x=2y-2$	26	$y=x^2/2-4/x+3$; $x\,y''+2y'=3x$
12	$y=tg\,x$; $\left(y'-y^2\right)y''=2y\,y'$	27	$y=x\,e^{-x^2}$; $y''+6y-4x^2y=0$
13	$y=x\,e^{-x}$; $y''-y+2\,e^{-x}=0$	28	$y=x^2/\sin x$; $xy'-y(2-x\,ctg\,x)=0$
14	$y=xe^{1/x}$; $x^4y''-y=0$	29	$y=x^2\sin x$; $x^2y''-4xy'+(x^2+6)y=0$
15	$y=e^{\sqrt{x}}$; $4x\,y''+2y'-y=0$	30	$y=x^3\ln x$; $x^2y''-6y-5x^3=0$

Завдання 5. Застосовуючи правило Лопіталя та інші прийоми, знайти вказані границі.

№ в-та	а)	б)
1	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{x+tg5x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x}$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\dfrac{x+4}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to0}(x+\cos x)^{1/x}$
3	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg5x^2}{1-\cos x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{1/x}$

4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg2x+arctgx}$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 4x)^{1/x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^3+tg2x^2}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}(arcctg\,x)^{1/\ln(1+x^2)}$
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x+3tg5x}$	$\lim\limits_{x\to 1+0}\left(e^x-e\right)^{2/\ln(x-1)}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg5x}{\arcsin 3x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+e^{-2x}\right)^x$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\arcsin x^2}$	$\lim\limits_{x\to 1}(x+\ln x)^{1/\ln x}$
9	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin(x+1)}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln(x^2+1)\right)^{1/\ln 2x}$
10	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2arctg\,x}\right)^x$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x/2)}{\sin^2 2x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln(4x^2+1)\right)^{1/\ln x}$
12	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{\ln(1+1/x)}$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(e^x-e^{-x}\right)^{2/\ln x}$
13	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(ctg^2 x\cdot\arcsin 3x)$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x\cdot\sin 3x}{1-\cos 2x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(\sin 2x)^{1/\ln tg\,x}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 4x}{1-\cos 5x}$	$\lim\limits_{x\to +0}x^{1/\ln\sin x}$
16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tg^3x-2\sin x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(e^x-1\right)^{1/\ln x}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\sin 2x}{arctg5x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(ctg2x)^{tg\,x}$

18	$\lim\limits_{x\to 0}(ctg\,x\cdot arctg\,2x)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg\,x}$
19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 x-\sin^2 x}{1-\cos 4x}$	$\lim\limits_{x\to \pi/4+0}(tg\,2x)^{1/\ln(4x-\pi)}$
20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(x+4x^2)}{x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)^{1/x^2}$
21	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{tgx-x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{2/x}$
22	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,(x^2-x)}{8x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{2/\ln\cos x}$
23	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3+x^2}{1-\cos 4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{4/tg^2 x}$
24	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+tg\,2x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}(1+e^x)^{x}$
25	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{8x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(\sin x+x)^{1/\ln x}$
26	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x^2}{1-\cos 2x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(tg\,2x)^{1/\ln x}$
27	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{1-\cos 2x}$	$\lim\limits_{x\to 1+0}(e^x-e)^{x-1}$
28	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 6x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(\ln(e+x)-1)^{x}$
29	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x^2-2x}{\sin 6x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2arctg\,x)^{3/\ln(1+x^2)}$
30	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,3x^2}{1-\cos 4x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(tg\,2x)^{1/\ln\sin x}$

Завдання 6. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції на вказаному відрізку.

Примітка: Розрахунки вести з точністю до двох значущих знаків.

№ в-та	Функція та відрізок
1	$y = x^2 + 16/x - 12$,[1,4]
2	$y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 3$,[0,6]
3	$y = 2\sqrt{x} - x + 4$,[0,4]
4	$y = x - 4\sqrt{x} + 2$,[1,9]
5	$y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 1$,[–3,3]
6	$y = 5 - x - 4/(x+2)^2$,[–1,2]
7	$y = \dfrac{-x^2 + 7x - 7}{x^2 - 2x + 2}$,[1,4]
8	$y = 1 - \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$,[1,5]
9	$y = -x^2/2 + 8/x + 10$,[–4,–1]
10	$y = -\dfrac{x(2x+3)}{x^2 + 4x + 5}$,[–2,1]
11	$y = 1 + 2\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$,[0,4]
12	$y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$,[1,5]
13	$y = -x^2/2 + 2x + 8/(x-2) + 3$,[–2,1]
14	$y = 2\sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 1$,[–4,2]
15	$y = 4/x^2 - 8x - 11$,[–2,–1/2]
16	$y = 6 - x - 4/x^2$,[1,4]
17	$y = \dfrac{4(x^2+3)}{x^2 - 2x + 5}$,[–3, 2]

18	$y=2-\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$,[−1,5]
19	$y=10x/(1+x^2)+3$,[0,3]
20	$y=2x^2+108/x-60$,[2,4]
21	$y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}-1$,[−1,6]
22	$y=x-4\sqrt{x+2}+9$,[−1,7]
23	$y=2-4x/(4+x^2)$,[−4,2]
24	$y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}+1$,[−2,4]
25	$y=-\dfrac{4(x^2+3)}{x^2+2x+5}$,[−5,1]
26	$y=x^2-2x+16/(x-1)-12$,[2,5]
27	$y=2\sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}-3$,[−3,4]
28	$y=8x+4/x^2-17$,[1/2,2]
29	$y=x^2+4x+16/(x+2)-10$,[−1,2]
30	$y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}+2$,[−2,5]

Завдання 7. Дослідити задану функцію засобами диференціального числення, знайти асимптоти та побудувати графік.

Примітка: Розрахунки вести з точністю до двох значущих знаків.

№ в-та	Функція	№ в-та	Функція
1	$y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$	16	$y=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$
2	$y=\dfrac{x^3}{2(3-x^2)}$	17	$y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

3	$y=x^2+\frac{1}{x^2}$	18	$y=\frac{8x}{(x-2)^2}$
4	$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$	19	$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$
5	$y=\frac{x^2}{2(x-2)}$	20	$y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$
6	$y=\frac{3-x^2}{x+2}$	21	$y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$
7	$y=\frac{3x^4+1}{x^3}$	22	$y=\frac{4x}{(x-3)^2}$
8	$y=\frac{x^2}{x^2-1}$	23	$y=\frac{6x^2}{(x-1)^2}$
9	$y=\frac{x}{x^2-1}$	24	$y=\frac{1}{2x}+2x^2$
10	$y=\frac{4}{x}+\frac{x^2}{2}$	25	$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$
11	$y=\frac{x^4}{(1+x)^4}$	26	$y=\frac{4(x-1)^2}{x^2}$
12	$y=\frac{x^4}{2(x-1)^3}$	27	$y=\frac{9x}{(x-4)(2x+1)}$
13	$y=\frac{9(x-3)}{2(x-2)^2}$	28	$y=\frac{2x+6}{(x+2)^2}$
14	$y=\frac{(x-1)^3}{x^2}$	29	$y=\frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$
15	$y=\frac{2x+3}{(x+1)^2}$	30	$y=\frac{x^3}{3(x-1)^2}$

Змістовий модуль 3. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. ПЛОЩИНА ТА ПРЯМА У ПРОСТОРІ. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ФУНКЦІЇ

3.1. Визначники та їх властивості

3.1.1. Означення визначника. Мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника

Визначником (***детермінантом***) n***-го порядку*** називається число Δ_n, яке записується у вигляді квадратної таблиці

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що має n ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** визначника. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю*** визначника.

Головна діагональ визначника проходить з лівого верхнього кута у правий нижній, а побічна діагональ – з правого верхнього кута у лівий нижній.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержується з визначника Δ_n видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3.1.2. Обчислення визначника

<u>Загальне правило</u> обчислення визначника має рекурентний характер (визначник n-го порядку Δ_n виражається через визначники $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}):

а) *Визначник першого порядку* Δ_1 $(n=1)$ *дорівнює самому елементу* a_{11} :

$$\Delta_1 = a_{11} \ .$$

б) *Визначник* n*-го порядку* Δ_n $(n \geq 2)$ *дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення*:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n}$$

(***розклад визначника за елементами першого рядка***).

Із загального правила можна одержати спрощені співвідношення для визначників другого та третього порядків:

1) визначник другого порядку Δ_2 обчислюється за формулою:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

(<u>правило “хреста” (схема на рис. 77)</u>:
визначник другого порядку Δ_2 *дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей*);

2) визначник третього порядку Δ_3 обчислюється за формулою:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} -$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}\, a_{11}$$

(<u>правило “трикутників” (схема на рис. 78)</u>:

визначник третього порядку дорівнює сумі шести доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів: три добутки елементів, розміщених на головній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна головній діагоналі, беруться зі знаком "+" , а *три добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна побічній діагоналі, беруться зі знаком* "-").

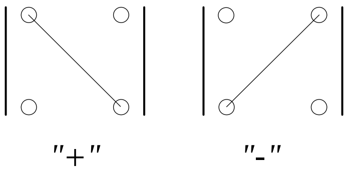

Рис. 77

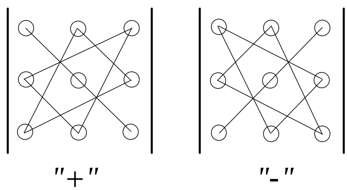

Рис. 78

<u>Приклад 1</u>. Обчислити визначник другого порядку за правилом “хреста” $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$.

$$\square \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - (-4) \cdot 3 = 2 \ . \qquad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти мінор M_{23} і алгебраїчне доповнення A_{23} елемента a_{23} даного визначника

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} .$$

$$\square \ a_{23} = -1 \ ; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-4) \cdot 6 = 24 \ ;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \cdot 24 = -24 \ . \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Обчислити визначник третього порядку, розклавши його за елементами першого рядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(2-0) - 2(-1-0) - 4(-3+10) = -32 \ . \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Обчислити визначник третього порядку за правилом “трикутників”

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 2 +$$

$$+(-1)\cdot 4\cdot 5 - 5\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 9 - 3\cdot 4\cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15 \ . \quad \blacksquare$$

Зауваження. Елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й об’єкти іншої природи.

Приклад 5. Розв’язати рівняння $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & x \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = 0$.

$$\square \quad 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & x\\ x & -1\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & x\\ 1 & -1\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & x\end{vmatrix}=0\ ; \quad -2x^2-2x+4=0\ ;$$

$$x^2+x-2=0\ ; \quad x_1=-2; \quad x_2=1\ . \ \blacksquare$$

3.1.3. Основні властивості визначника

Зауваження 1. Для скорочення формулювань будь-який рядок чи будь-який стовпець називатимемо ***рядом***.

Властивість 1. *Сума добутків елементів будь-якого ряду на їх алгебраїчні доповнення не залежить від номера ряду і дорівнює значенню визначника*:

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

– ***розклад визначника за*** i ***-м рядком***;

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$$

– ***розклад визначника за*** j ***-м стовпцем***.

Зауваження 2. При розкладанні визначника рекомендується вибирати такий ряд, в якому найбільше нульових елементів.

Наслідок. *Визначник з нульовим рядом дорівнює нулю*.

Властивість 2. *Значення визначника не зміниться після заміни всіх його рядків відповідними стовпцями і навпаки*.

Операція заміни всіх рядків визначника Δ_n відповідними стовпцями і навпаки називається ***транспонуванням*** визначника. Отриманий визначник Δ_n^T називається ***транспонованим***, його значення дорівнює значенню самого визначника Δ_n: $\Delta_n^T=\Delta_n$.

Властивість 3. *Якщо поміняти місцями два паралельних ря-*

ди, то визначник змінить знак на протилежний, не змінившись за абсолютною величиною.

Властивість 4. *Визначник з двома однаковими паралельними рядами дорівнює нулю.*

Властивість 5. *Спільний множник елементів будь-якого ряду можна виносити за знак визначника.*

Іншими словами, *щоб помножити визначник на деяке число, треба на це число помножити всі елементи одного довільно вибраного ряду.*

Властивість 6. *Визначник, у якого елементи двох паралельних рядів відповідно пропорційні, дорівнює нулю.*

Властивість 7. *Сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого паралельного йому ряду дорівнює нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0\,, \quad i \neq j\ .$$

Властивість 8. *Значення визначника не зміниться, якщо до всіх елементів якого-небудь ряду додати відповідні елементи іншого паралельного йому ряду, помножені на одне і те саме число.*

Властивість 9. *Якщо кожний елемент якого-небудь ряду є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких відповідний ряд складається з перших доданків, а в другому – з других доданків.*

3.1.4. Зведення визначника до східчастого вигляду

Визначник, у якому всі елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***визначником верхнє трикутного вигляду*** (рис. 79).

Аналогічно вводиться поняття визначника ***нижнє трикутного вигляду*** (рис. 80).

Окремим випадком визначника трикутного вигляду є визначник ***східчастої форми*** як трапеція. На рис. 81 подано ***верхнє трапецієвидний*** визначник.

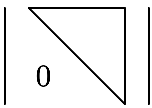 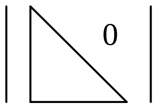 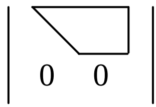

Рис. 79 Рис. 80 Рис. 81

<u>Зауваження</u>. Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду, користуючись основними його властивостями.

<u>Теорема</u>. *Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі*. (Доведіть самостійно).

<u>Приклад</u>. Обчислити визначник, попередньо звівши його до верхнє трикутного вигляду з одиницями на головній діагоналі:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \left| R_1 \leftrightarrow R_3 \right| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 3R_1 \\ R_3 := R_3 - 2R_1 \\ R_4 := R_4 - R_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \left| R_2 \leftrightarrow R_4 \right| =$$

$$= \left| R_2 \leftrightarrow R_4 \right| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_3 := R_3 + 3R_2 \\ R_4 := R_4 - 2R_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \left| R_3 := R_3 + R_4 \right| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| R_4 := R_4 - 8R_3 \right| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{vmatrix} = 54 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 54$, де R_i – i-й рядок. ■

3.2. Матриці та операції над ними

3.2.1. Означення матриці. Рівність матриць. Види матриць. Визначник квадратної матриці. Норма матриці

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з m ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** матриці. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони мають однаковий розмір $m \times n$ і їх відповідні елементи рівні

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \ i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n} \ .$$

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** і позначається 0.

Матриця, у якої число стовпців дорівнює числу рядків $m = n$, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається ***матрицею-рядком*** (***вектором-рядком***).

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається ***матрицею-стовпцем*** (***вектором-стовпцем***).

Для квадратної матриці A n-го порядку сукупність елементів a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, ..., a_{n1} – ***побічною діагоналлю***.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижнє трикутною*** (***верхнє трикутною***)

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; \ U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця D, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** і позначається E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність визначник

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який називається ***визначником*** (***детермінантом***) матриці A.

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю $\det A = 0$, то матриця називається ***виродженою*** (***особливою***).

Якщо визначник матриці A відмінний від нуля $\det A \neq 0$, то матриця називається ***невиродженою*** (***неособливою***).

Для довільної прямокутної матриці A розміру $m \times n$ (за аналогією з модулем вектора) вводиться узагальнена числова характеристика – ***норма*** матриці $\|A\|$, яка задовольняє наступні аксіоми

$$\|A\| > 0, \text{ якщо } A \neq 0; \quad \|0\| = 0; \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|;$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|; \quad \|AC\| \leq \|A\| \, \|C\|,$$

де α – довільне дійсне число; A, B, C – довільні матриці, для яких відповідні операції мають зміст.

Існують різні види норми матриці. Обмежимось розглядом ***евклідової норми***, що задається рівністю

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} .$$

Зауваження. Для вектора (матриці-рядка чи матриці-стовпця) евклідова норма співпадає з його модулем.

3.2.2. Операції над матрицями

Сумою матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається така матриця $C = A + B$ того ж розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів вихідних матриць

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ , \quad i = \overline{1,m}; \ \ j = \overline{1,n} \ .$$

Аналогічно вводиться ***різниця*** матриць

$$C = A - B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \ , \quad i = \overline{1,m}; \ \ j = \overline{1,n} \ .$$

Добутком матриці A розміру $m \times n$ ***та числа*** α називається така матриця $C = \alpha A$ того ж розміру, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента вихідної матриці на це число

$$C = \alpha A \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \alpha a_{ij} \ , \quad i = \overline{1,m}; \ \ j = \overline{1,n} \ .$$

Таким чином, *операції додавання та віднімання матриць і множення матриці на число виконуються поелементно*.

Зауваження 1. Щоб визначник помножити на число, треба на це число помножити кожний елемент одного довільно вибраного рядка чи стовпця. Щоб матрицю помножити на число, треба на це число помножити кожний елемент матриці в цілому.

Приклад 1. Для заданих матриць A і B знайти їх вказану лінійну комбінацію

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \ C = 2A - 3B \ .$$

$$\square \ \ 2A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -8 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} ; \ 3B = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ -9 & -12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} -19 & 18 & -17 \\ 15 & 12 & -8 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Добутком матриці A розміру $m \times p$ ***на матрицю*** B розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника A та j-го стовпця другого співмножника B

$$C_{m \times n} = A_{m \times p} B_{p \times n} \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n} \quad .$$

Зауваження 2. Добуток AB існує тільки тоді, коли розміри матриць A і B ***узгоджені***: перший співмножник A має число стовпців, яке дорівнює числу рядків другого співмножника B. Навіть коли обидва добутки AB і BA мають смисл, то в загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються ***переставними***. Зрозуміло, що переставні матриці завжди квадратні.

Зауваження 3. Зазначимо деякі властивості добутку матриць:

1) $AE = A$; $EA = A$; 2) $(AB)C = A(BC)$;

3) $A(B + C) = AB + AC$; 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

5) для квадратних матриць A і B справедливо

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B .$$

Приклад 2. Для заданих матриць A і B узгоджених розмірів знайти добутки AB і BA

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$ $$C_{2\times 2} = A_{2\times 3} B_{3\times 2} =$$

$$=\begin{pmatrix} -2\cdot 3+3\cdot 2+(-4)\cdot 4 & -2\cdot(-1)+3\cdot 0+(-4)\cdot 1 \\ 3\cdot 3+2\cdot 2+(-5)\cdot 4 & 3\cdot(-1)+2\cdot 0+(-5)\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -16 & -2 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}; \qquad D_{3\times 3}=B_{3\times 2}\,A_{2\times 3}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot(-2)+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 3+(-1)\cdot 2 & 3\cdot(-4)+(-1)\cdot(-5) \\ 2\cdot(-2)+0\cdot 3 & 2\cdot 3+0\cdot 2 & 2\cdot(-4)+0\cdot(-5) \\ 4\cdot(-2)+1\cdot 3 & 4\cdot 3+1\cdot 2 & 4\cdot(-4)+1\cdot(-5) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -9 & 7 & -7 \\ -4 & 6 & -8 \\ -5 & 14 & -21 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки і стовпці, то одержимо ***транспоновану*** матрицю A^T. Операція переходу від матриці A до матриці A^T називається ***транспонуванням***.

Приклад 3.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.2.3. Обернена матриця та її обчислення

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E\ .$$

Теорема. *Для будь-якої невиродженої квадратної матриці A n-го порядку існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка обчислюється за формулою*