Піддаючи однопорожнинний гіперболоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну

$$x \to kx\,;\;\; y \to y\,;\;\; z \to z.$$

У результаті одержимо $\dfrac{((b/a)x)^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Звідси маємо $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

– ***канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда загального вигляду*** (***однопорожнинного гіперболоїда***) (рис. 29).

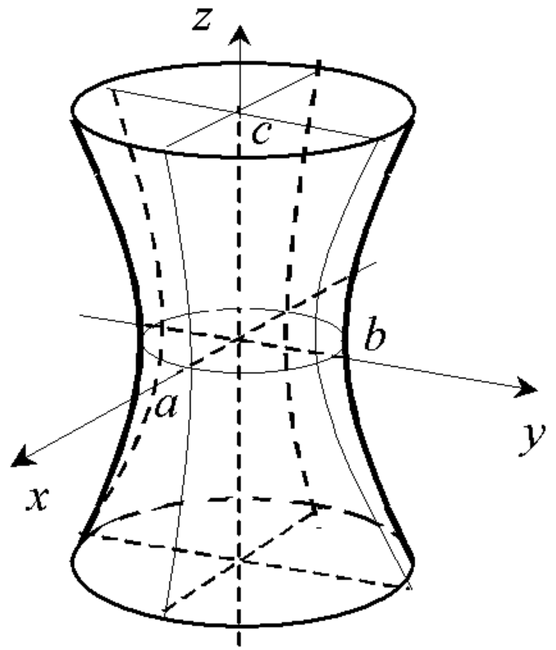

Рис. 29

Зауваження 1. Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, що розширюється в обидва боки осі симетрії Oz. Поперечним перерізом є еліпс. Найвужчий з перерізів – при $z = 0$.

Зауваження 2. Однопорожнинний гіперболоїд є лінійчатою поверхнею.

На початок розділу

5.8. Двопорожнинний гіперболоїд

Якщо гіперболу $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, що лежить в площині Oyz, обертати навколо дійсної осі Oz, то отримаємо ***двопорожнинний гіперболоїд обертання*** навколо осі Oz (рис. 30).

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\circlearrowleft Oz}{\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} z\to z \\ y\to\pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1.$$

Звідси маємо

$$\dfrac{x^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$$

– ***канонічне рівняння*** двопорожнинного гіперболоїда обертання.

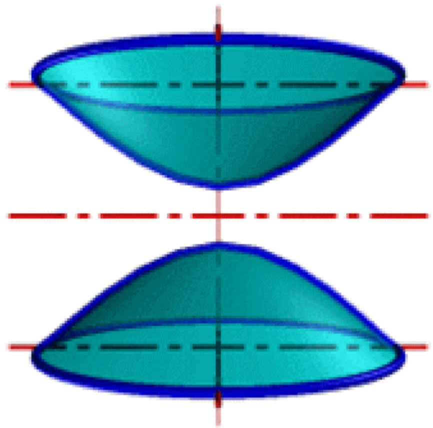

Рис. 30

Піддаючи двопорожнинний гіперболоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну

$$x \to kx\,;\;\; y \to y\,;\;\; z \to z.$$

У результаті одержимо

$$\frac{\left((b/a)x\right)^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Звідси маємо

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

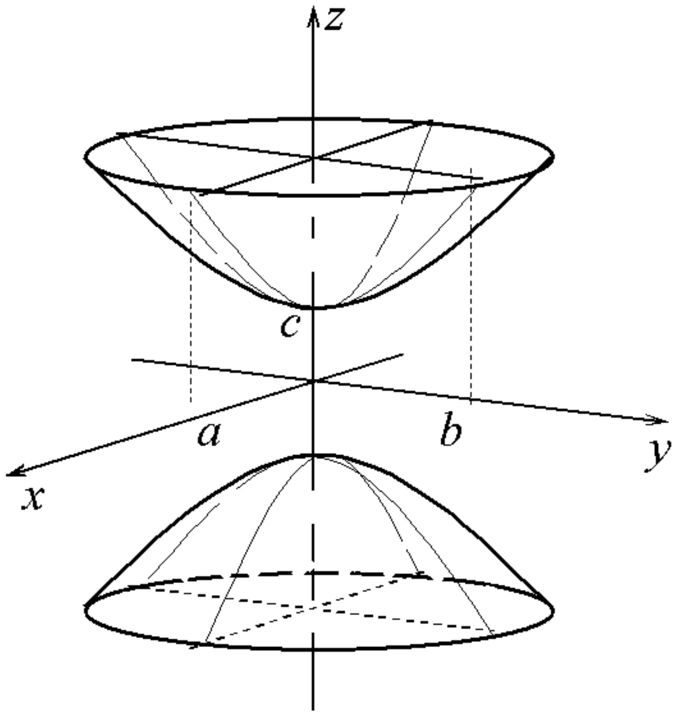

Рис. 31

– ***канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда загального вигляду*** (***двопорожнинного гіперболоїда***) (рис. 31).

На початок розділу

5.9. Еліптичний параболоїд

Якщо параболу $y^2 = 2pz$, що лежить в площині Oyz, обертати навколо її осі Oz, то отримаємо ***параболоїд обертання*** навколо осі Oz (рис. 32).

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\circlearrowleft Oz}{y^2 = 2pz} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} z \to z \\ \hline y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 = 2pz.$$

Звідси маємо

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z$$

– ***канонічне рівняння*** параболоїда обертання.

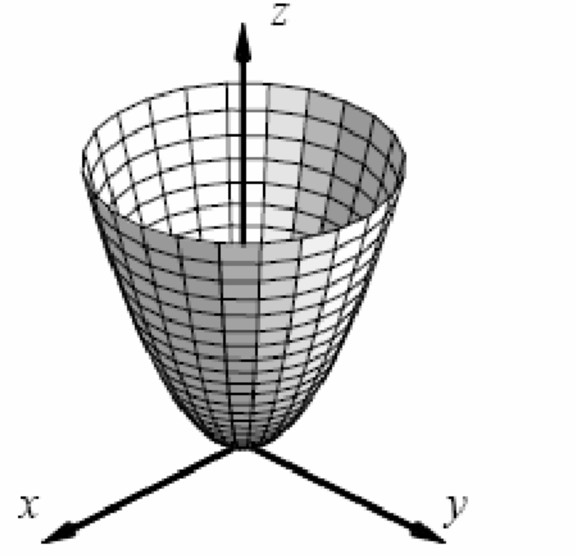

Рис. 32

Піддаючи параболоїд обертання $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Oy з коефіцієнтом деформації $k=\sqrt{p/q}$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну

$$x \to x\,;\ \ y \to ky\,;\ \ z \to z.$$

У результаті одержимо $\frac{x^2}{2p}+\frac{\left(\sqrt{p/q}\,y\right)^2}{2p}=z.$

Звідси маємо $$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$

– ***канонічне рівняння параболоїда загального вигляду*** (***еліптичного параболоїда***) (рис. 33).

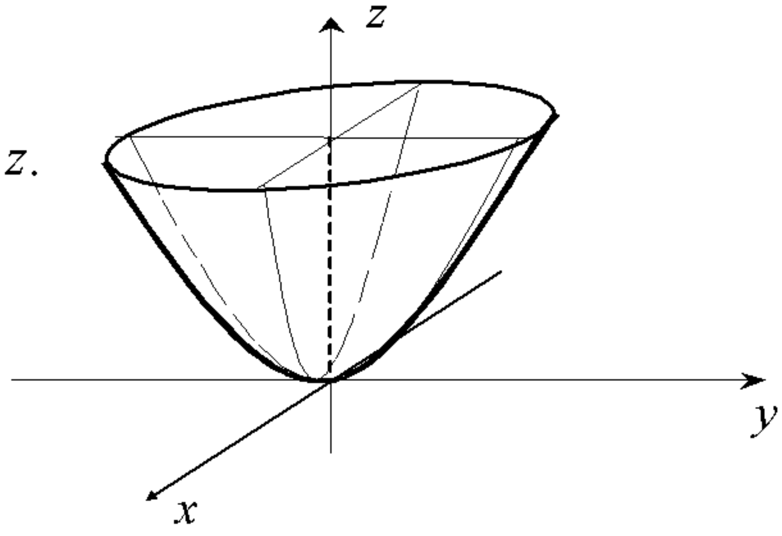

Рис. 33

Зауваження. Еліптичний параболоїд можна утворити рухом параболи $y^2 = 2qz$ вздовж параболи $x^2 = 2pz$ так, що площина першої параболи залишається паралельною координатній площині Oyz, а її вершина ковзає по другій параболі. Площини цих парабол перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболи повернуті опуклостями в один бік – вершиною вниз.

На початок розділу

5.10. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня (рис. 34), що задається ***канонічним рівнянням***

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z.$$

Ця поверхня утворюється рухом параболи $y^2 = -2qz$ вздовж параболи $x^2 = 2pz$ так, що площина першої параболи залишається паралельною координатній площині Oyz, а її вершина ковзає по іншій параболі. Площини цих парабол перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболи повернуті опуклостями у протилежні боки: перша напрямлена вершиною вверх, а друга – вершиною вниз.

Зауваження 1. Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Початок координат $O(0;0;0)$ (***вершина*** гіперболічного параболоїда) є ***сідловою точкою*** (***точкою перевалу***) цієї поверхні.

Зауваження 2. Гіперболічний параболоїд є лінійчатою поверхнею.

На початок розділу

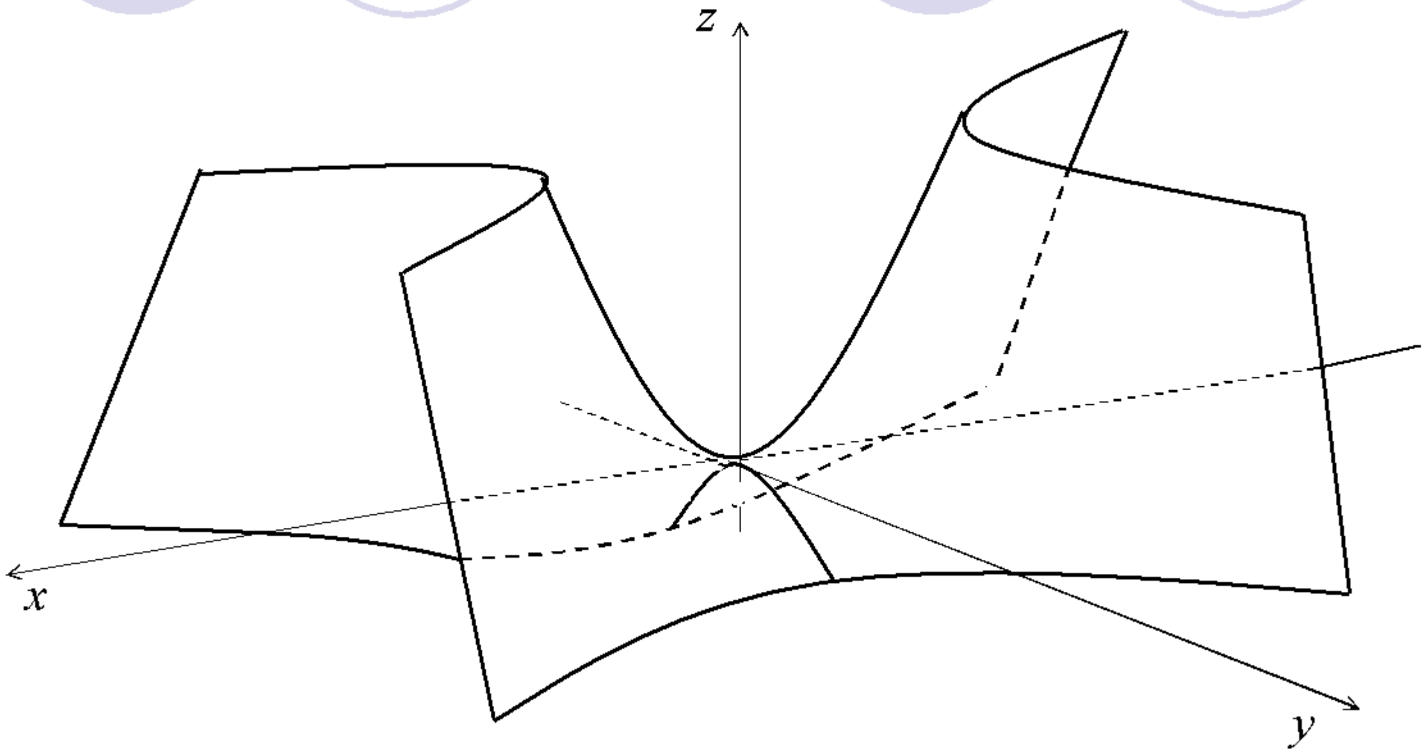

Рис. 34

5.11. Односторонні поверхні

Всі розглянуті вище поверхні є ***двосторонніми***: при обході довільного замкненого контуру, що цілком лежить на поверхні та не має спільних точок з її межею, повернення в початкову точку не змінює напряму вектора нормалі.

На ***односторонній*** поверхні існує замкнений контур, що не має спільних точок з її межею, повний обхід якого приводить до зміни напряму нормалі на протилежний.

5.11.1. Стрічка Мебіуса

Звичайна паперова смужка служить моделлю частини площини і є двосторонньою поверхнею.

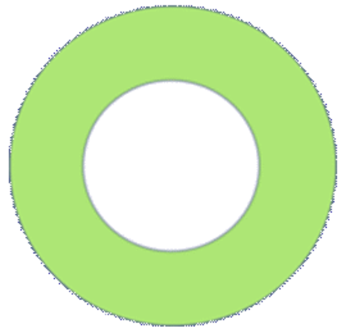

Рис. 35

Стрічка Мебіуса одержується з паперової смужки, зігнутої і склеєної кінцями з перекрученням на пів-оберта (на відміну від звичайного кільця на рис. 35) (рис. 36).

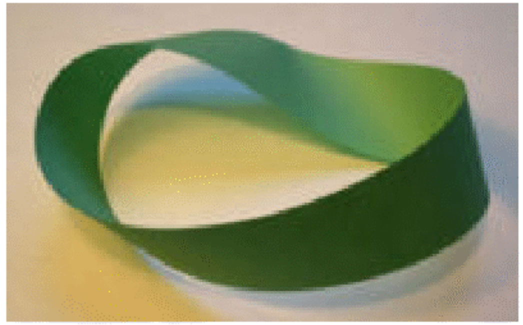

Рис. 36

У неї лише одна сторона, тоді як у звичайного кільця їх дві. Якщо поставити олівець і провести ним, не відриваючи його від паперу, лінію уздовж цієї стрічки, поки вона не замкнеться, то слід від олівця буде скрізь. Отже, стрічка Мебіуса є односторонньою поверхнею.

На початок розділу

5.11.2. Пляшка Клейна

Уявіть собі звичайну тонкостінну пляшку, що зроблена з «пластичного» скла, яке можна гнути і скручувати. Вона є моделлю поверхні, що має дві сторони – внутрішню і зовнішню, розділені краями шийки. Проробляємо в її боці дірку, беремо за шийку, згинаємо і вставляємо шийку в цю дірку. Пропускаємо її всередині до самого дна. У дні проробляємо ще одну дірку. Краї шийки і дірки у дні акуратно склеюємо. Отримаємо односторонню поверхню, що називається ***пляшкою Клейна*** (рис. 37).

Оскільки олівцем по ній не поводиш – незручно, – пустимо повзати муху. Ця муха може повзати скрізь по всій поверхні, жодного разу не перейшовши через її межу – краї дірки у боці.

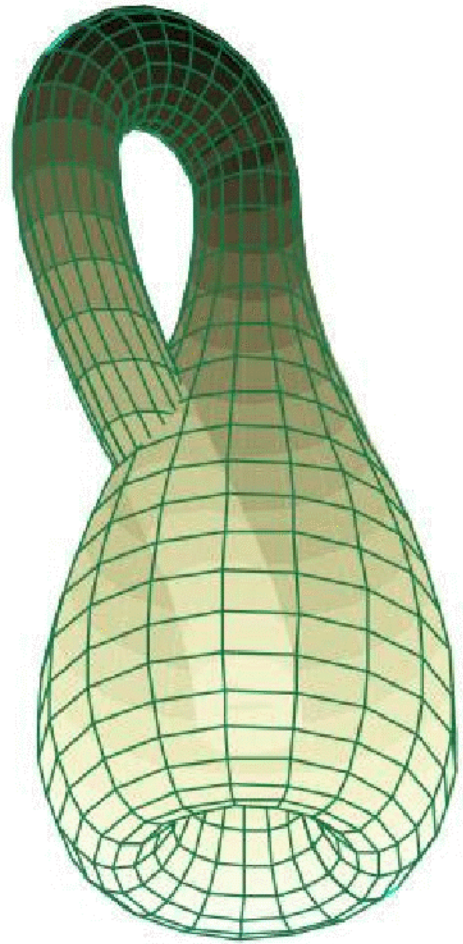

Рис. 37

На початок розділу

Список літератури

1. Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980. – 240 с.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. – М.: Наука, 1997. –304 с.

3. А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. Аналитическая геометрия – М.: МГТУ им. Баумана, 2000. – 386 с.

4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.

7. А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2005. – 496 с.

8. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.

9. Станішевський С.О., Якунін А.В., Ситникова В.С. Вища математика для електротехніків. Модуль 1. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 308 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Анатолій Іванович Колосов,
Анатолій Вікторович Якунін,
Світлана Миколаївна Ламтюгова

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРЕЗЕНТАЦІЯХ.
ЧАСТИНА II: АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
У ПРОСТОРІ

Електронний альбом дидактичних матеріалів до самостійної роботи з дисципліни "Вища математика" для студентів 1 і 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.050701 "Електротехніка та електротехнології", спеціальностей "Електротехнічні системи електроспоживання" і "Світлотехніка і джерела світла"

Відповідальний за випуск: С.О. Станішевський
Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2010, поз. 189 М

Підп. до друку 27.05.09 р. Формат 60x84 1/16 Папір офісний
Друк на ризографі. Умовн.-друк.арк 3,0 Обл.-вид.арк. 3,3
Тираж 10 прим. Зам. №

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ
ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12