## 5.1. Загальне рівняння поверхні другого порядку

***Поверхнею другого порядку*** називається множина всіх точок простору, координати яких у декартовій системі координат $Oxyz$ задовільняють рівнянню:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

де $A$, $B$,..., $L$ – дійсні числа, причому хоча б один із коефіцієнтів $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ відмінний від нуля.

Для вивчення форми поверхні використовують метод паралельних перерізів. Суть цього методу полягає в наступному: поверхня перетинається площинами, паралельними координатним площинам, і визначаються лінії перетину поверхні з даними січними площинами. За виглядом цих ліній судять про форму даної поверхні.

*На початок розділу*

## 5.2. Сфера

***Сферична поверхня***, або ***сфера*** – це множина всіх точок простору, рівновіддалених від деякої точки, що називається *центром.* Відстань від центра до довільної точки сфери називається її *радіусом.*

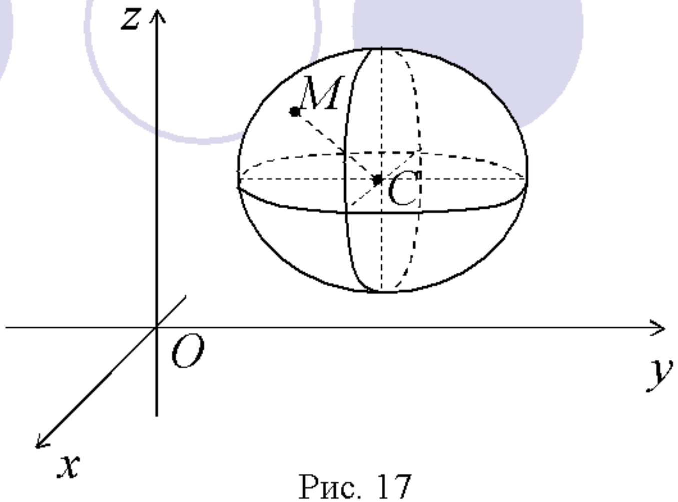



Рис. 17

Нехай в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ точка $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ є центром сферичної поверхні радіуса $R$ (рис. 17).
Для того, щоб точка $M(x;\ y;\ z)$ належала сферичній поверхні, необхідно та достатньо, щоб $MC = R$ або

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

або в розгорнутому вигляді:

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-R^2=0.$$

Якщо точка $C$ співпадає з початком координат, то рівняння сфери називається ***канонічним*** і має вигляд: $x^2+y^2+z^2=R^2.$ (рис.18)

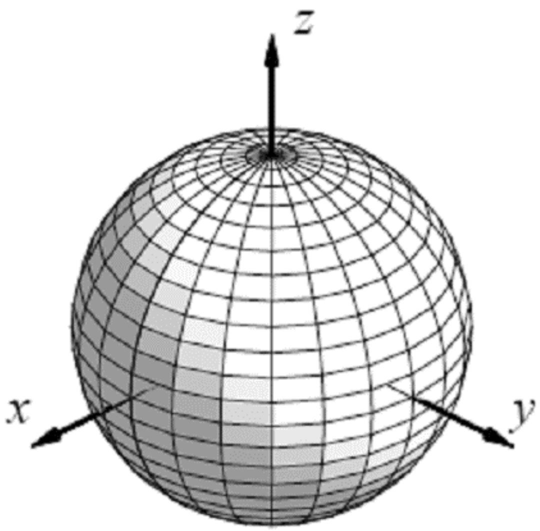
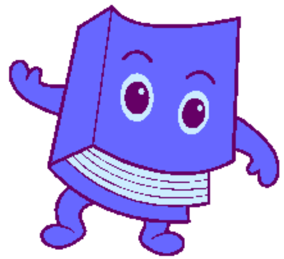



Рис. 18

# Приклад

Показати, що задане рівняння є рівнянням сфери, та знайти її центр і радіус:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 5z + 3 = 0.$$



$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 5z + 3 = 0;$$

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) + (z^2 + 5z) + 3 = 0;$$

$$(x^2 - 2\cdot 3x + 3^2 - 3^2) + (y^2 + 2\cdot 2y + 2^2 - 2^2) + \left(z^2 + 2\cdot\frac{5}{2}z + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 3 = 0;$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 = 0;$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}.$$

Одержане рівняння описує сферу з центром у точці $C(3;\ -2;\ -5/2)$ і радіусом $R = \frac{\sqrt{65}}{2}$ .

*На початок розділу*

## 5.3. Циліндричні поверхні

***Циліндричною поверхнею*** (***циліндром***) називається поверхня, утворена рухом прямої (***твірної***) $l$, яка перетинає задану лінію (***напрямну***) $l_0$, залишаючись паралельною заданій прямій $a_0$, причому задані лінії $l_0$ і $a_0$ не лежать в одній площині.

Поверхні, твірні яких є прямими лініями, називаються ***лінійчатими***. Оскільки лінійчаті поверхні конструюються з прямолінійних рейок, то такі поверхні широко використовують в будівництві (опори, башти, перекриття, покрівлі і т.п.).

Зауваження 1. Циліндр є лінійчатою поверхнею. Його можна уявити як "огорожу", виставлену вздовж лінії $l_0$.

Теорема 1. У просторі $Oxyz$ кожне рівняння з двома змінними $F(x,y)=0$, що не містить координати $z$, визначає циліндричну поверхню $S$, твірні якої паралельні осі $Oz$, а напрямною служить лінія

$$l_0 : \begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases},$$

що лежить у площині $Oxy$ (рис. 19).

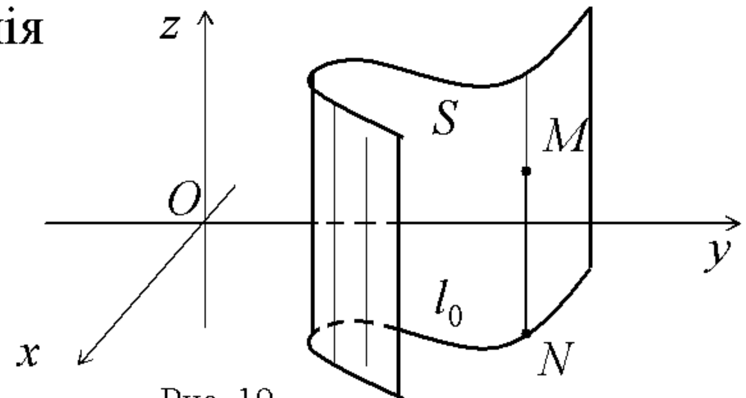


Рис. 19

Для довільної точки $M(x;\ y;\ z)$ вертикальної циліндричної поверхні $S$ з напрямною

$$l_0:\ \begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

її проекція $N(x;\ y;\ 0)$ на площину $Oxy$ лежить на цій лінії $l_0$, а значить, задовольняє її рівняння

$$l_0:\ \begin{cases} F(x,y)=0 \\ 0=0 \end{cases}.$$

Отже, координати точки $M(x;\ y;\ z)$ задовольняють рівняння $F(x;\ y) = 0$, оскільки воно не містить змінної $z$.

Очевидно, що координати точок, які не лежать на поверхні $S$, це рівняння не задовольняють, оскільки вони проектуються на площину $Oxy$ поза лінією $l_0$.

Зауваження 2. Рівняння $F(y;\ z) = 0$, що не місить змінну $x$, у просторі визначає циліндричну поверхню з твірними, що паралельні осі $Ox$. Рівняння $F(x;\ z) = 0$, що не місить змінну $y$, у просторі визначає циліндричну поверхню з твірними, що паралельні осі $Oy$.

*На початок розділу*

## 5.3.1. Еліптичний циліндр

***Еліптичний циліндр*** (рис. 20) має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Зокрема, якщо $a = b = R$, то рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

визначає ***круговий циліндр***.

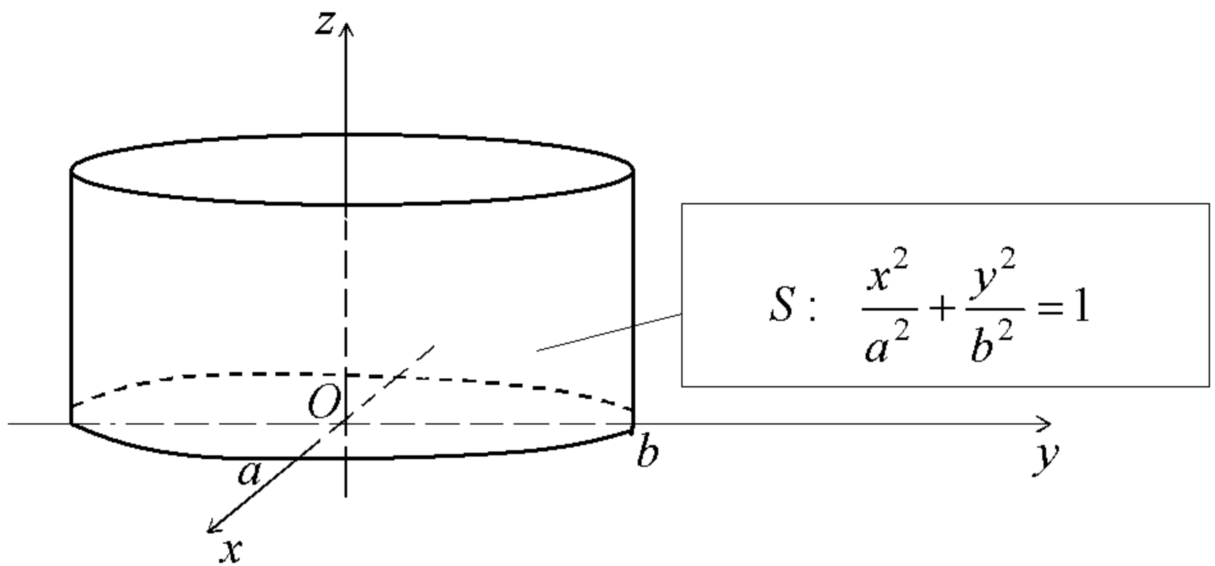



Рис. 20

*На початок розділу*

## 5.3.2. Гіперболічний циліндр

Рівняння $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

визначає в просторі гіперболічний циліндр з твірною, що паралельна осі $Oz$, і напрямною – гіперболою (рис. 21).

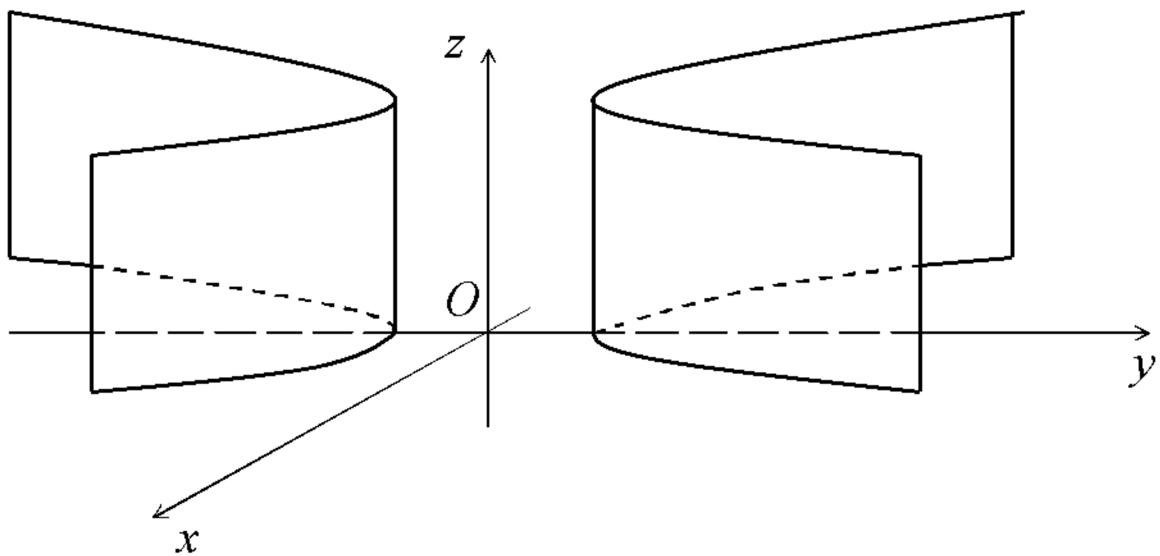



Рис. 21

На початок розділу

## 5.3.3. Параболічний циліндр

Рівняння $y^2 = 2px$

визначає в просторі параболічний циліндр з твірною, що паралельна осі $Oz$, і напрямною – параболою (рис. 22).

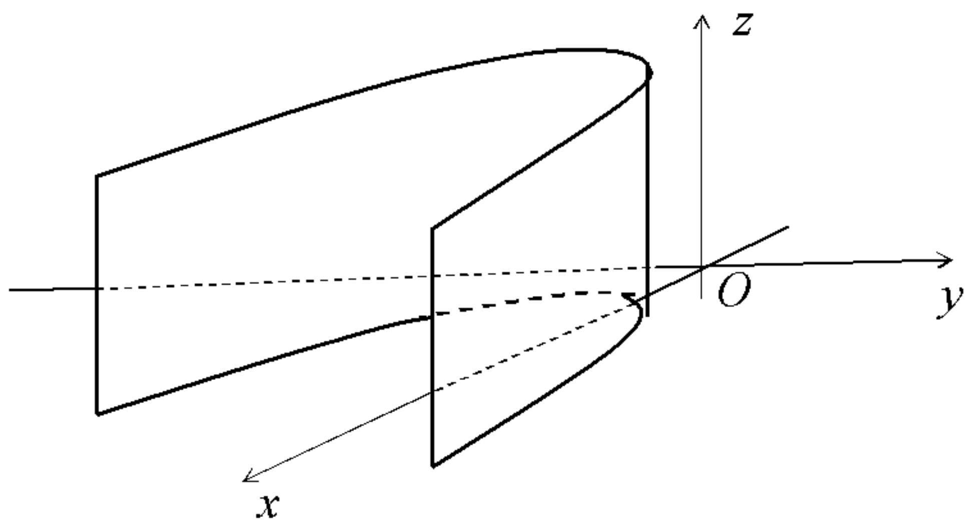



Рис. 22

На початок розділу

## 5.4. Конічні поверхні. Конус другого порядку

***Конічною поверхнею*** (***конусом***) називається поверхня, утворена рухом прямої (***твірної***) $l$, яка проходить через задану точку $C(x_0; y_0; z_0)$ (***вершину***) і перетинає задану лінію (***напрямну***) $l_0$, причому задана точка $C$ не лежить на заданій лінії $l_0$.

Нехай напрямна $l_0$ задана як перетин двох поверхонь

$$l_0:\ \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

Конус є лінійчатою поверхнею. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка конічної поверхні. Тоді рівняння твірної, на якій лежить ця точка, можна подати у вигляді рівняння прямої, що проходить через дві точки – вершину $C(x_0; y_0; z_0)$ і точку $N(X; Y; Z)$ перетину цієї твірної та напрямної:

$$\frac{x - x_0}{X - x_0} = \frac{y - y_0}{Y - y_0} = \frac{z - z_0}{Z - z_0}.$$

Якщо вилучити з наведених рівнянь для довільної точки твірної $M(x; y; z)$ (ця точка одночасно належить конічній поверхні) координати точки перетину $N(X; Y; Z)$, використовуючи співвідношення

$$\begin{cases} F_1(X, Y, Z) = 0 \\ F_2(X, Y, Z) = 0 \end{cases},$$

то отримаємо рівняння конічної поверхні $F(x, y, z) = 0$.

***Конус другого порядку*** (***еліптичний конус***) (рис. 23) має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

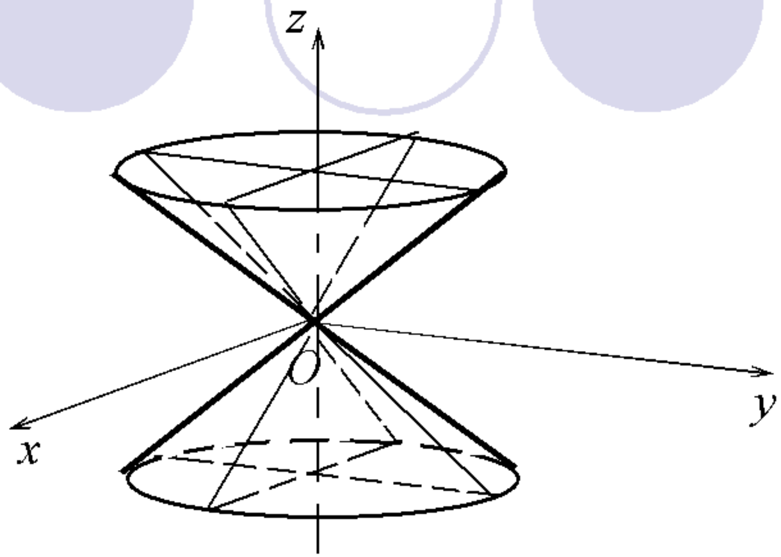



Рис. 23

Вершина цього конуса лежить у початку координат $O(0;0;0)$, а напрямною служить еліпс

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{cases}$$

з півосями $a$ і $b$, що лежить у площині $z = c$, яка перпендикулярна до осі $Oz$. Вісь $Oz$ є віссю симетрії даного конуса, а координатні площини служать його площинами симетрії.

Зокрема, якщо $a = b$, то рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

визначає ***круговий конус***.

*На початок розділу*

## 5.5. Поверхні обертання. Тор

Поверхня, утворена обертанням плоскої лінії (***твірної***, ***мередіана***) $l$ навколо заданої прямої $a_0$ (***осі обертання***), що лежить у площині лінії $l$, називається ***поверхнею обертання***.

Коло, яке описує довільна точка твірної $l$ при обертанні, називається ***паралеллю***. Площина паралелі перпендикулярна до осі обертання $a_0$.

Теорема 1. Нехай лінія $l$ лежить у площині $Oyz$ і задається рівнянням

$$\begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

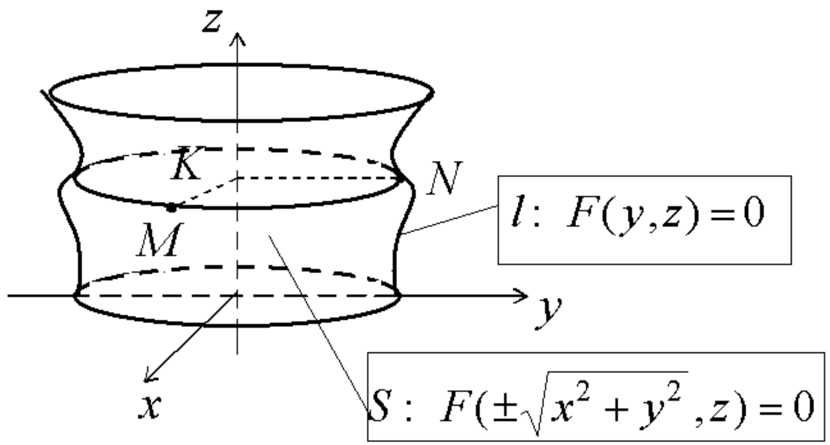


Рис. 24

Якщо ця лінія обертається навколо осі $Oz$, то утворюється поверхня обертання, рівняння якої

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,,z\right)=0.$$

Нехай $M(x;\,y;\,z)$ – довільна точка поверхні обертання (рис. 24).

Проведемо через цю точку паралель, яка перетинає твірну $l$ у точці $N(0;\,Y;\,z)$. Таким чином, точці $M(x;\,y;\,z)$ при обертанні відповідає єдина точка $N(0;\,Y;\,z)$ твірної.

Нехай $K(0;\ 0;\ z)$ – центр кола паралелі. Оскільки $MK$ і $NK$ – радіуси одного і того ж кола, то $NK = MK$.

Але $NK = |y|$; $MK = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тоді $|y| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Оскільки точка $N\left(0, \pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right)$ належить твірній, то її координати задовольняють рівняння цієї лінії:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Одержане рівняння є рівнянням поверхні обертання, оскільки його задовольняють координати $x$, $y$, $z$ довільної точки цієї поверхні, а координати інших точок простору це рівняння не задовольняють (їм при обертанні відповідають точки, що лежать поза твірною).

<u>Зауваження</u>. Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї площини, треба у рівнянні цієї лінії зробити заміну змінних: змінну, що відповідає осі обертання залишити тією самою, а іншу змінну замінити на “плюс-мінус” квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат. Наприклад,

$$\underset{\circlearrowleft Oz}{F(y, z) = 0} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

***Тор*** – геометричне тіло, яке отримується обертанням кола навколо осі, що лежить у одній площині з колом, але не перетинає його. Форма тора зовні нагадує бублик (рис. 25).

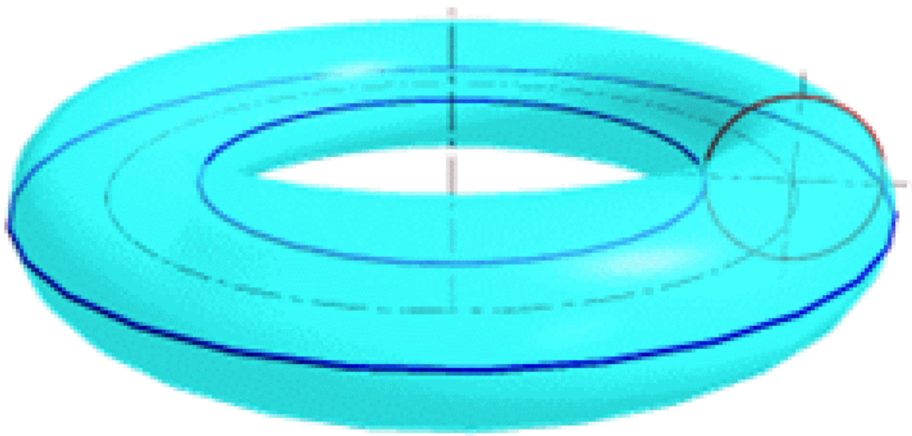


Рис. 25

# Приклад

Знайти рівняння поверхні, отриманої в результаті обертання прямої $y = z$, що лежить в площині $Oyz$, навколо осі $Oz$.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y = z \\ \hookleftarrow Oz \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \pm\sqrt{x^2 + y^2} = z.$$

Підносячи до квадрата ліву та праву частини останнього рівняння, отримаємо

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Звідси маємо


$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

– канонічне рівняння кругового конуса.

*На початок розділу*

## 5.6. Еліпсоїд

Якщо еліпс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, що лежить в площині $Oyz$, обертати навколо осі $Oz$, то отримаємо ***еліпсоїд обертання*** навколо осі $Oz$ (рис. 26).

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\circlearrowleft Oz}{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Звідси маємо $$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

– ***канонічне рівняння*** еліпсоїда обертання.

Зокрема, якщо $b = c = R$, то маємо канонічне рівняння сфери

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

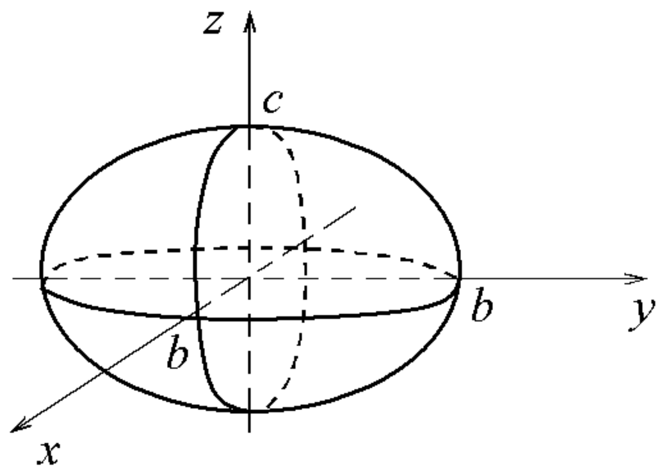



Рис. 26

Піддаючи еліпсоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі $Ox$ з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x \to kx$; $y \to y$; $z \to z$.

У результаті одержимо $\dfrac{((b/a)x)^2+y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Звідси маємо

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

– ***канонічне рівняння еліпсоїда загального вигляду*** (***еліпсоїда***) (рис. 27).

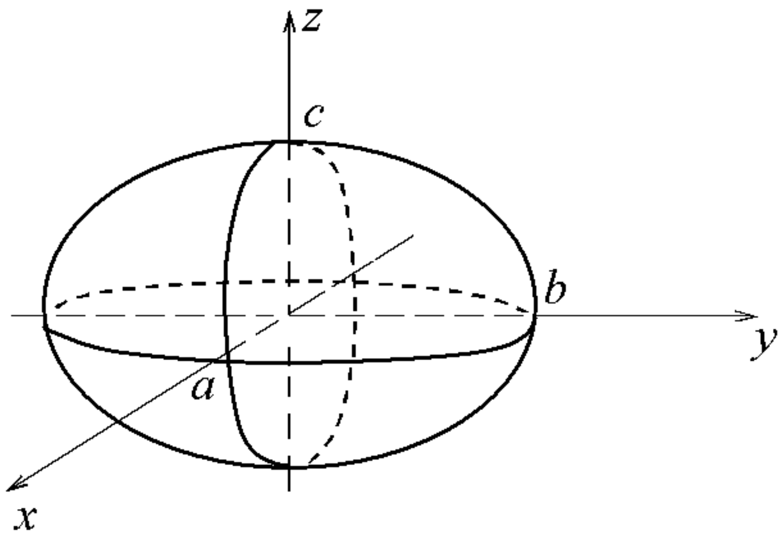



Рис. 27

*На початок розділу*

# 5.7. Однопорожнинний гіперболоїд

Якщо гіперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, що лежить в площині $Oyz$, обертати навколо уявної осі $Oz$, то отримаємо ***однопорожнинний гіперболоїд обертання*** навколо осі $Oz$ (рис. 28) .

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\circlearrowleft Oz}{\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Звідси маємо

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

– ***канонічне рівняння*** однопорожнинного гіперболоїда обертання.

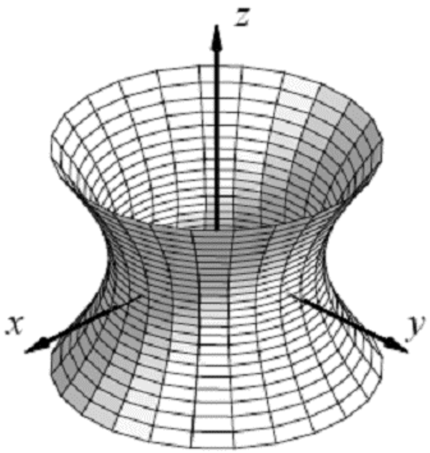



Рис. 28