Пряма l задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} x-2y+4z-10=0 \\ 3x+2y-2z+6=0 \end{cases}.$$

Знайти її 1) канонічні рівняння; 2) параметричні рівняння.

1) Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x=0$, тоді

$$\begin{cases} -2y+4z-10=0 \\ 2y-2z+6=0 \end{cases}; \quad y=-1; \quad z=2; \ M_0(0;-1;2).$$

Канонічні рівняння

$$\frac{x-0}{-4}=\frac{y-(-1)}{14}=\frac{z-2}{8}; \qquad \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{4}.$$

2) Параметричні рівняння знайти самостійно.

Приклад

На початок розділу

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{4}=t;$$

$$\frac{x}{-2}=t; \quad \frac{y+1}{7}=t; \quad \frac{z-2}{4}=t;$$

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=7t-1 \\ z=4t+2 \end{cases}.$$

3.2. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності та паралельності двох прямих

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями

$$l_1 : \ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad l_2 : \ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами

$$\vec{s_1} = (m_1 ; n_1 ; p_1) \quad \text{і} \quad \vec{s_2} = (m_2 ; n_2 ; p_2).$$

Отже

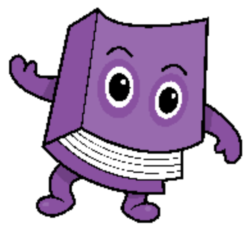
$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Умова паралельності двох прямих



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

На початок розділу

3.3. Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1: \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad l_2: \ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, коли вектори $\vec{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$, $\vec{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$ і $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використовуючи умову компланарності трьох векторів $(\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{s_1})\cdot\vec{s_2}=0$, одержуємо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

<u>Зауваження 1</u>. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність служить умовою їх належності одній площині. Якщо ця умова не виконується, то прямі l_1 і l_2 є мимобіжними.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2, розглянемо вектор $\vec{a}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}$, який перпендикулярний до обох прямих.

Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1\,; y_2 - y_1\,; z_2 - z_1)$ на вектор $\vec{a}$.

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right| \Big/ |\vec{a}| = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \left(\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right)\right| \Big/ \left|\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right|.$$

Зауваження 2. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

Приклад

Знайти відстань між заданими прямими:

$$l_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+3}{2} \quad \text{і} \quad l_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}.$$

$$\vec{a} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (0-2\,;2-(-5)\,;3-(-3)) = (-2\,;7\,;6); \quad |\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21};$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}| = -2 \cdot (-4) + 7 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = 0; \quad d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|0|}{\sqrt{21}} = 0.$$

Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються.

На початок розділу

4. Взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі

зміст

4.1. Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням $l: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$; $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$.

Кут φ між ними доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{s}=(m;n;p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A;B;C)$ до 90° (рис. 12). Тоді

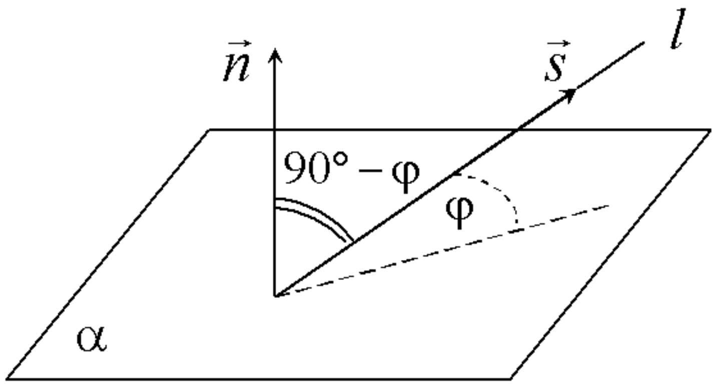


Рис. 12

$$\cos\left(90^\circ-\varphi\right)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини $\dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$.

Умова паралельності прямої та площини $Am+Bn+Cp=0$.

На початок розділу

4.2. Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0; \qquad l: \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0. \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини треба скласти і розв'язати систему їх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гауса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої в рівняння площини. Дістаємо рівняння для t

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

1) Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то вони перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t = -\left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right)/\left(Am + Bn + Cp\right).$$

2) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків не має. Пряма паралельна площині і не лежить на ній.

3) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

Приклад

Знайти проекцію N точки $M_0(2;\ -5;\ 4)$ на площину $\alpha\colon 3x + 2y - z - 6 = 0$.

Точка N служить основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 13).

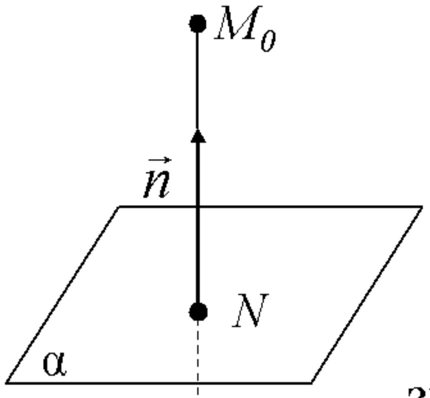


Рис. 13

Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна покласти $\vec{s} = \vec{n} = (3;\ 2;\ -1)$.

Тоді параметричні рівняння прямої M_0N:

$$x = 3t + 2;\ \ y = 2t - 5;\ \ z = -t + 4.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини

$$3(3t + 2) + 2(2t - 5) - (-t + 4) - 6 = 0;\quad t = -1.$$

Тоді

$$x = 3(-1) + 2 = -1;\quad y = 2(-1) - 5 = -7;\quad z = -(-1) + 4 = 5.$$

Отже, проекцією служить точка N(–1; –7; 5).

На початок розділу

4.3. Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ (рис. 14).

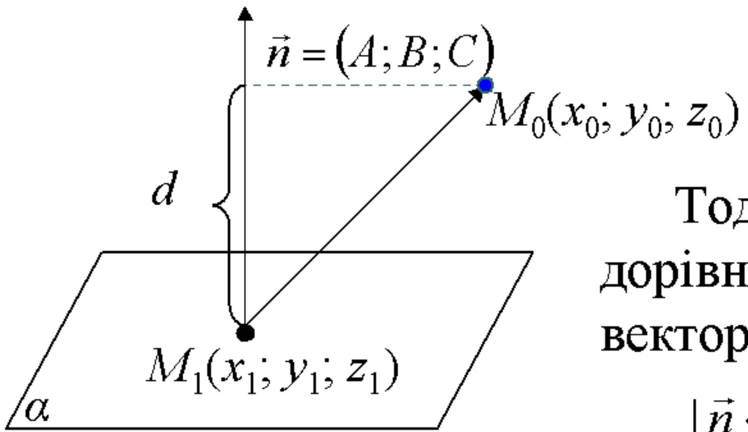


Рис. 14

Візьмемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ та побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1\,; y_0 - y_1\,; z_0 - z_1).$$

Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

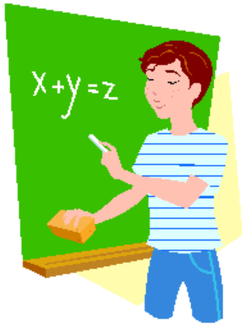
$$d = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, то $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Приклад

Знайти відстань d від точки $M_0(2;\, -\, 4;\, 3)$ до площини α: $3x - 2y - 6z - 1 = 0$. (Розв’язати самостійно).

На початок розділу



$$d=\frac{|3\cdot 2-2\cdot(-4)-6\cdot 3-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}}=$$

$$=\frac{|6+8-18-1|}{\sqrt{9+4+36}}=\frac{|-5|}{\sqrt{49}}=\frac{5}{7}.$$

4.4. Відстань від точки до прямої

Нехай треба знайти відстань d від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої l, яка задана параметричними рівняннями:

$$x = mt + x_0\,;\ \ y = nt + y_0\,;\ \ z = pt + z_0\,.$$

Розглянемо три способи визначення цієї відстані.

Спосіб 1. Візьмемо на прямій відому точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{s} = (m\,; n\,; p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0\,; y_1 - y_0\,; z_1 - z_0)$ (рис. 15). Площа S цього паралелограма

$$S = |\vec{s}\,| \cdot d \quad \text{або} \quad S = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\,|.$$

Звідси $d = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\,| / |\vec{s}\,|$.

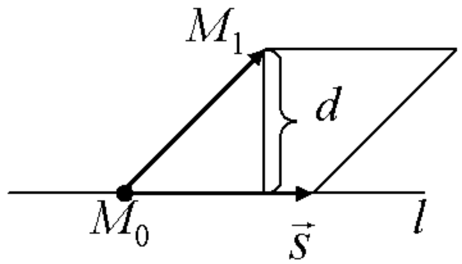


Рис. 15

Спосіб 2. Проведемо через точку M_1 площину α, яка перпендикулярна до прямої l (рис. 16). Вектор нормалі $\vec{n}$ площини α колінеарний напрямному вектору $\vec{s}$ прямої l. Можна покласти $\vec{n} = \vec{s} = (m\,; n\,; p)$. Тоді

$$\alpha:\ \ m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0.$$

Далі треба знайти точку N перетину прямої та площини. Ця точка служить основою перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на пряму l. Отже, $d = M_1N$.

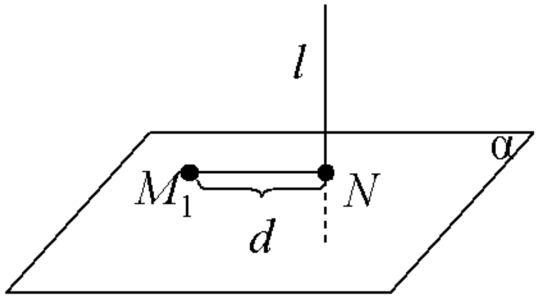


Рис. 16

<u>Спосіб 3</u>. Розглянемо функцію $u = d^{\,2}(t)$, яка дорівнює квадрату відстані

$$d(t) = \sqrt{(x_1 - mt - x_0)^2 + (y_1 - nt - y_0)^2 + (z_1 - pt - z_0)^2}$$

від точки M_1 до довільної точки прямої l.

Відстань d від точки M_1 до прямої l відповідає найменшому значенню цієї функції. Зі змісту задачі випливає, що мінімум існує і служить єдиним екстремальним значенням. Тому відповідне значення параметра t_m визначається однозначно з необхідної умови екстремуму $u'(t) = 0$:

$$-2m(x_1 - mt - x_0) - 2n(y_1 - nt - y_0) - 2p(z_1 - pt - z_0) = 0;$$

$$t_m = \frac{m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0)}{m^2 + n^2 + p^2}.$$

Тоді $d = d(t_m)$.

Приклад

Знайти відстань d від заданої точки M_1 до заданої прямої l: $M_1(2;\,3;\,-2)$,

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{2}.$$

Застосовуємо <u>спосіб 1</u>:

$$\vec{s}=(-1;-2;2);\quad |\vec{s}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=3;$$

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\left(2-(-1);\,3-2;\,-2-0\right)=(3;\,1;\,-2);$$

$$\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k};$$

$$|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|=\sqrt{2^2+4^2+5^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5};$$

$$d=|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|/|\vec{s}|=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}.$$

(<u>Способами 2 і 3</u> розв'язати задачу самостійно).

На початок розділу

Застосовуємо <u>спосіб 2</u>:

Проведемо через точку M_1 площину, вектор нормалі якої колінеарний вектору нормалі прямої:

$$\vec{n} = \vec{s} = (-1; -2; 2); \quad -1(x-2) - 2(y-3) + 2(z-(-2)) = 0;$$

$$x + 2y - 2z - 12 = 0.$$

Знайдемо точку перетину прямої та площини:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{2} = t; \qquad l: \begin{cases} x = -t - 1 \\ y = -2t + 2. \\ z = 2t \end{cases}$$

$$-t - 1 + 2(-2t + 2) - 2(2t) - 12 = 0;$$

$$t = -1; \quad x = 0; y = 4; z = -2.$$

$$N(0; 4; -2)$$

$$d = M_1N = \sqrt{(2-0)^2 + (3-4)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

Застосовуємо спосіб 3:

$$d(t)=\sqrt{\left(2-(-1)t-(-1)\right)^2+\left(3-(-2)t-2\right)^2+\left(-2-2t-0\right)^2}=$$

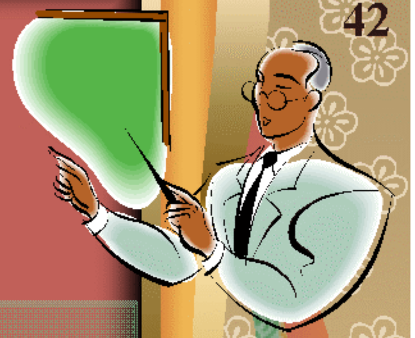
$$=\sqrt{(3+t)^2+(1+2t)^2+(-2-2t)^2}=$$

$$=\sqrt{9+6t+t^2+1+4t+4t^2+4+8t+4t^2}=\sqrt{9t^2+18t+14};$$

$$t_m=\frac{-1\left(2-(-1)\right)-2\left(3-2\right)+2\left(-2-0\right)}{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=\frac{-9}{9}=-1;$$

$$d(t_m)=\sqrt{9(-1)^2+18(-1)+14}=\sqrt{5}.$$

5. Поверхні другого порядку та інші поверхні



зміст