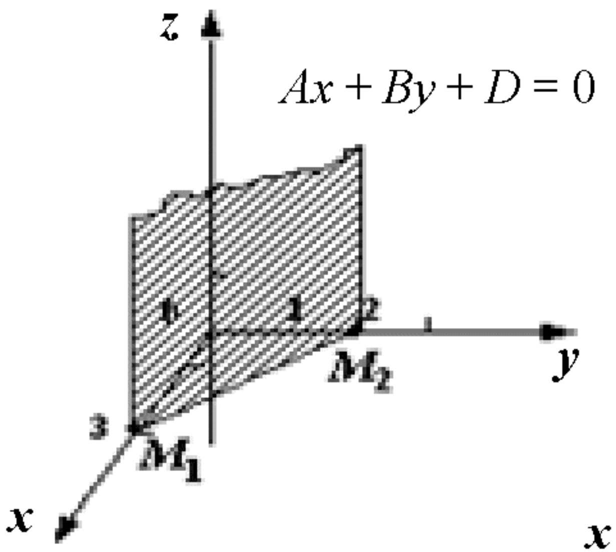


Рис. 4

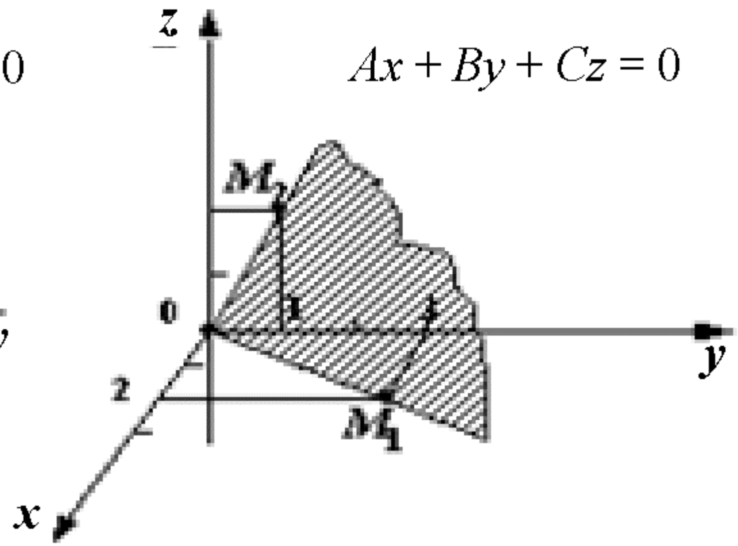


Рис. 5

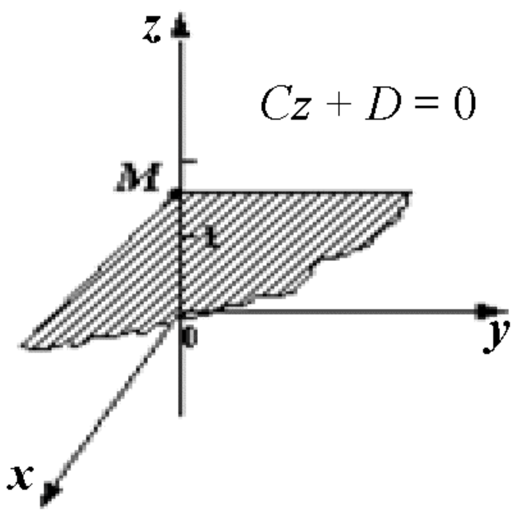
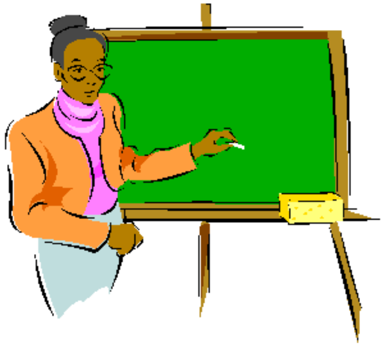


Рис. 6



Приклад 1

Дано три точки $M(2; -1; 3)$, $N(-5; -6; 0)$ і $P(-1; -3; -1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{NP}$.

$$M \in \alpha; \quad \vec{n} = \overrightarrow{NP} \perp \alpha;$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{NP} = \left(-1-(-5);\ -3-(-6);\ -1-0\right) = \left(4;\ 3;\ -1\right);$$

$$4(x-2) + 3(y-(-1)) + (-1)(z-3) = 0;$$

$$4x - 8 + 3y + 3 - z + 3 = 0;$$

$$4x + 3y - z - 2 = 0.$$

На початок розділу

2.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ і $M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 7).

Візьмемо довільну точку $M(x;\, y;\, z)$ на цій площині та побудуємо три вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$, що виходять з однієї точки M_1.

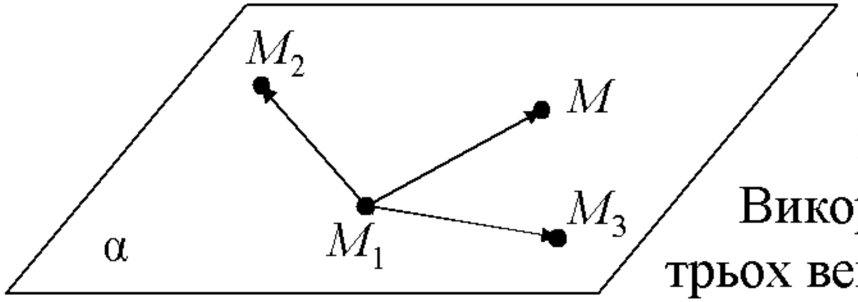


Рис. 7

Точка $M(x;\, y;\, z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні.

Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

або в координатній формі
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

– ***рівняння площини, що проходить через три задані точки***.

Приклад 1

Дано три точки $M(1;\ -1;\ 2)$, $N(5;\ -6;\ 0)$ і $P(1;\ -3;\ -1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 5-1 & -6-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -3-(-1) & -1-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)(15-4) - (y+1)(-12-0) + (z-2)(-8-0) = 0;$$

$$11(x-1) + 12(y+1) - 8(z-2) = 0; \quad 11x - 11 + 12y + 12 - 8z + 16 = 0;$$

$$11x + 12y - 8z + 17 = 0.$$

Приклад 2

(виконати самостійно)

Написати загальне рівняння площини α, що проходить через три точки $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(4;\ -1;\ -1)$ і $C(2;\ 0;\ 2)$.

На початок розділу

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-(-1) & z-2 \\ 4-3 & -1-(-1) & -1-2 \\ 2-1 & 0-(-1) & 2-2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-3)\,(0+3) - (y+1)\,(0+3) + (z-2)\,(1-0) = 0;$$

$$3\,(x-3) - 3\,(y+1) + (z-2) = 0;$$

$$3x - 9 - 3y - 3 + z - 2 = 0;$$

$$3x - 3y + z - 14 = 0.$$

2.1.4. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;\,0;\,0)$, $M_2(0;\,b;\,0)$ і $M_3(0;\,0;\,c)$ (рис. 8).

Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, маємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0; \quad bcx + acy + abz - abc = 0;$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$ – ***рівняння площини у відрізках на осях***.

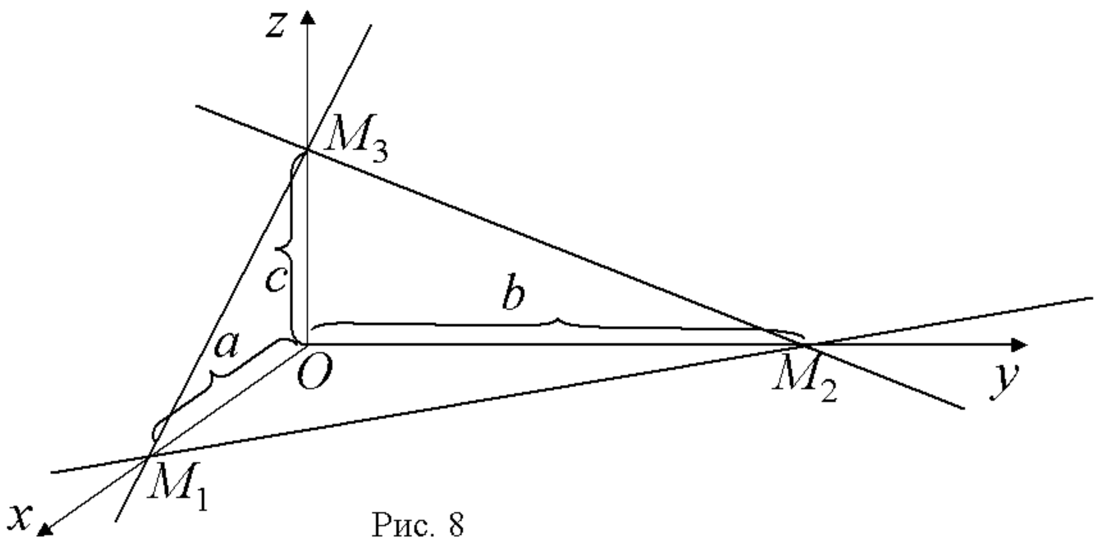


Рис. 8

Приклад 1

Звести загальне рівняння площини $6x - y + 4z + 12 = 0$ до вигляду рівняння у відрізках на осях.

$$6x - y + 4z = -12 \quad \Big|:(-12); \qquad \frac{x}{-2} + \frac{y}{12} + \frac{z}{-3} = 1.$$

Приклад 2

Знайти точки перетину площини α: $3x - 2y + 6z - 12 = 0$ з координатними осями і зобразити площину, побудувавши її сліди – лінії перетину з координатними площинами (рис. 9).

$$\alpha \cap Ox: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} a = 4 \\ M_1(4;0;0) \end{matrix};$$

$$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} b = -6 \\ M_2(0;-6;0) \end{matrix};$$

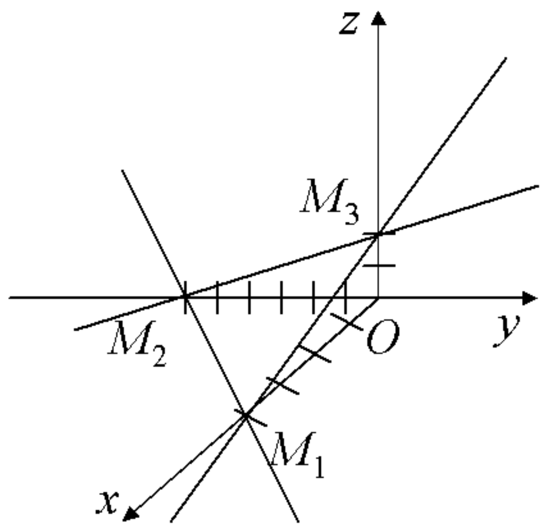


Рис. 9

$$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} c = 2 \\ M_3(0;0;2) \end{matrix}.$$

На початок розділу

2.2 Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\vec{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 10). Отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

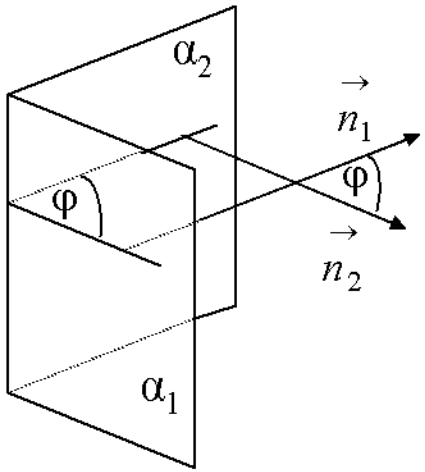


Рис. 10

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин

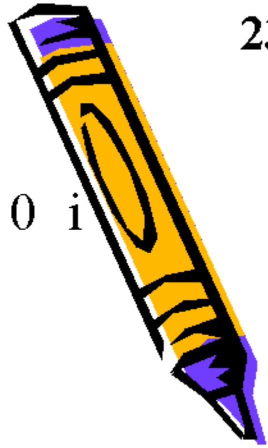
$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$



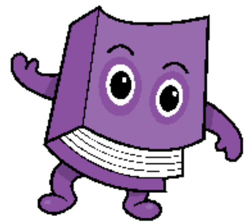
Приклад 1

Знайти кут між заданою площиною α_1: $-2x-3y+2z+1=0$ і координатною площиною Oxy.

$$\overrightarrow{n_1}=(-2;-3;2);\quad \alpha_2:\ z=0;\quad \overrightarrow{n_2}=\vec{k}=(0;0;1);$$

$$\cos\varphi=\frac{-2\cdot 0+(-3)\cdot 0+2\cdot 1}{\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{17}};$$

$$\varphi=\arccos\left(2/\sqrt{17}\right).$$



Приклад 2

Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M(3;\ 2;\ -4)$ паралельно площині $x-2y+z-4=0$.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;\quad A(x-3)+B(y-2)+C(z+4)=0;$$

Із умови паралельності двох площин – $\dfrac{A}{1}=\dfrac{B}{-2}=\dfrac{C}{1}(=t)$.

$$A=t,\ B=-2t,\ C=t;\qquad t(x-3)-2t(y-2)+t(z+4)=0;$$

$$tx-3t-2ty+4t+tz+4t=0\ |\ (:t);\qquad x-3-2y+4+z+4=0;$$

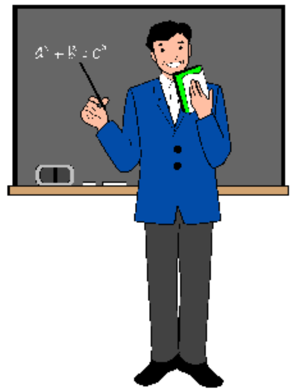
$$x-2y+z+5=0.$$

На початок розділу

2.3. Умова перетину трьох площин у одній точці

Три площини α_i: $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ (i=1,2,3) перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли квадратна система, складена з рівнянь цих площин, має єдиний розв'язок. Тобто, коли визначник системи відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$



Приклад

Знайти точку перетину трьох площин:
$2x - 4y + 3z - 1 = 0$, $3x - y + 5z - 2 = 0$, $4x + 3y + 4z = 0$.

Розв'язати самостійно. Використати метод Крамера.

На початок розділу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 27 - 80 + 12 + 48 - 30 = -31;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 18 + 0 + 0 + 32 - 15 = 31;$$

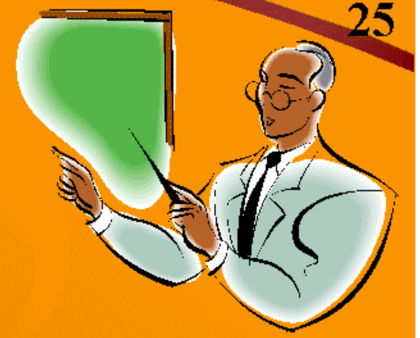
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 0 + 20 - 24 - 12 - 0 = 0;$$

$M(-1;\ 0;\ 1)$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 9 - 32 + 4 + 0 - 12 = -31.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{31}{-31} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-31} = 0; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-31}{-31} = 1;$$

3. Пряма в просторі.



3.1. Основні типи рівняння прямої

3.1.1. Канонічні рівняння прямої

3.1.2. Параметричні рівняння прямої

3.1.3. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

3.1.4. Загальні рівняння прямої

3.2. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності і паралельності двох прямих

3.3. Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

зміст

3.1. Основні типи рівняння прямої

3.1.1. Канонічні рівняння прямої

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{s}=(m;n;p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 11).

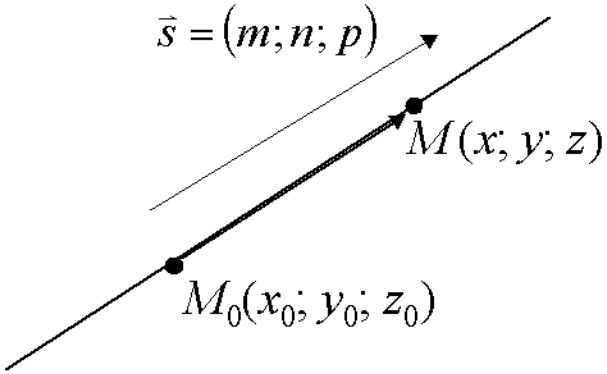


Рис. 11

Візьмемо довільну точку $M(x;\ y;\ z)$ на цій прямій та побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0).$$

Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний (паралельний) вектору $\vec{s}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

– ***канонічні рівняння прямої***.

На початок розділу

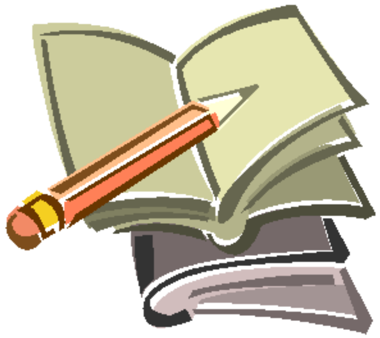
3.1.2. Параметричні рівняння прямої

Якщо в канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m}=t; \qquad \frac{y-y_0}{n}=t; \qquad \frac{z-z_0}{p}=t;$$



$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}$$

– ***параметричні рівняння прямої***, де змінна t служить параметром.

Приклад

Пряма задана своїми канонічними рівняннями

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{0}.$$

Записати параметричні рівняння цієї прямої. (Розв'язати самостійно).

На початок розділу

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0} = t;$$

$$\frac{x}{2} = t; \qquad \frac{y-1}{3} = t; \qquad \frac{z+1}{0} = t;$$

$$\begin{cases} x = 2t + 0 \\ y = 3t + 1; \\ z = 0t - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + 1. \\ z = -1 \end{cases}$$

3.1.3. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1\,;\, y_2 - y_1\,;\, z_2 - z_1\right).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

Приклад

Складати рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-1;\, 2;\, 0)$ і $M_2(2;\, 4;\, -3)$.

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z-0}{-3-0};$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-3}.$$

На початок розділу

3.1.4. Загальні рівняння прямої

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l служить лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

називається ***загальними рівняннями прямої***.

<u>Зауваження 1</u>. Загальні рівняння прямої визначаються неоднозначно.

<u>Зауваження 2</u>. Рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

де λ – параметр, задає пучок площин, які проходять через пряму l.