

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

**А.І. Колосов, А.В. Якунін, С.М. Ламтюгова**

**АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ  
У ПРЕЗЕНТАЦІЯХ**

**ЧАСТИНА II:  
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ  
У ПРОСТОРИ**

**Харків – ХНАМГ – 2010**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА



До друку дозволяю

Проректор

М.П. Пан

**А.І. Колосов, А.В. Якунін, С.М. Ламтюгова**

## **АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРЕЗЕНТАЦІЯХ**

**ЧАСТИНА II:**

### **АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРИ**

**Електронний альбом дидактичних матеріалів  
для студентів 1 і 2 курсів денної та заочної форм навчання  
за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”,  
спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”**

**Харків – ХНАМГ – 2010**

УДК 514.123

**Колосов А.І., Якунін А.В., Ламтюгова С.М.**

**Аналітична геометрія у презентаціях. Частина II: Аналітична геометрія у просторі:**  
Електронний альбом дидактичних матеріалів до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів 1 і 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”, спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”. – Х: ХНАМГ, 2010. – 79 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. М.Й. Кадець

Рекомендовано кафедрою вищої математики,  
протокол № 10 від 26.05.2010 р.



# Зміст

<i>Передмова</i> .....	<u>7</u>
<i>Інструкція по застосуванню</i> .....	<u>8</u>
<i>1. Декартова прямокутна система координат у просторі</i> .....	<u>10</u>
<i>2. Площина в просторі</i> .....	<u>13</u>
<i>2.1. Основні типи рівняння площини</i> .....	<u>14</u>
<i>2.1.1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектору</i> .....	<u>14</u>
<i>2.1.2. Загальне рівняння площини</i> .....	<u>15</u>
<i>2.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки</i> .....	<u>18</u>
<i>2.1.4. Рівняння площини у відрізках на осях</i> .....	<u>20</u>
<i>2.2. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин</i> .....	<u>22</u>
<i>2.3. Умова перетину трьох площин в одній точці</i> .....	<u>24</u>
<i>3. Пряма в просторі</i> .....	<u>25</u>
<i>3.1. Основні типи рівняння прямої</i> .....	<u>26</u>

3.1.1. Канонічні рівняння прямої.....	<u>26</u>
3.1.2. Параметричні рівняння прямої.....	<u>27</u>
3.1.3. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.....	<u>28</u>
3.1.4. Загальні рівняння прямої.....	<u>29</u>
3.2. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності та паралельності двох прямих.....	<u>31</u>
3.3. Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими.....	<u>32</u>
4. Взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі.....	<u>34</u>
4.1. Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини.....	<u>35</u>
4.2. Перетин прямої з площиною.....	<u>36</u>
4.3. Відстань від точки до площини.....	<u>38</u>
4.4. Відстань від точки до прямої.....	<u>39</u>
5. Поверхні другого порядку та інші поверхні.....	<u>42</u>

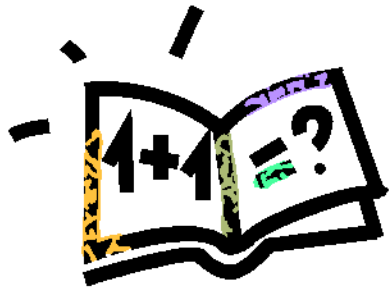
5.1. Загальне рівняння поверхні другого порядку.....	<u>43</u>
5.2. Сфера.....	<u>44</u>
5.3. Циліндричні поверхні.....	<u>46</u>
5.3.1. Еліптичний циліндр.....	<u>48</u>
5.3.2. Гіперболічний циліндр.....	<u>49</u>
5.3.3. Параболічний циліндр.....	<u>50</u>
5.4. Конічні поверхні. Конус другого порядку.....	<u>51</u>
5.5. Поверхні обертання. Тор.....	<u>53</u>
5.6. Еліпсоїд.....	<u>57</u>
5.7. Однопорожнинний гіперболоїд.....	<u>59</u>
5.8. Двопорожнинний гіперболоїд.....	<u>61</u>
5.9. Еліптичний параболоїд.....	<u>63</u>
5.10. Гіперболічний параболоїд.....	<u>65</u>
5.11. Односторонні поверхні.....	<u>66</u>
5.11.1. Стрічка Мебіуса.....	<u>66</u>
5.11.2. Пляшка Клейна.....	<u>67</u>
Список літератури.....	<u>68</u>



## Передмова

У цьому альбомі стисло викладено навчальні елементи розділу “Аналітична геометрія у просторі”, що відповідають діючим програмам курсу вищої математики для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв’язків без надмірної строгості викладу з об’єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання.

Зібрані в альбомі дидактичні матеріали призначені для студентів електротехнічних спеціальностей.




## *Інструкція по застосуванню*

Альбом дидактичних матеріалів «Аналітична геометрія у презентаціях. Частина II: Аналітична геометрія у просторі» створено в програмі Power Point у вигляді слайд-шоу.

Презентація подана в режимі «Тільки для читання», тому редагування слайдів не можливе.

Гіперпосилання в змісті та спеціальні кнопки на початку кожного розділу задають перехід на потрібну сторінку (розділ чи пункт). У кінці кожного пункту є кнопка «на початок розділу», де в свою чергу є кнопка «зміст». Далі зі змісту можна перейти в будь-який розділ чи пункт, який цікавить. У презентації є приховані слайди, що уточнюють окремі поняття, на які можна перейти по гіперпосиланням, що розміщені по тексту.



Кнопка  містить посилання на інформацію, що розрахована на самостійне опрацювання.

Можна вийти з презентації в будь-який момент. Для цього потрібно натиснути на клавіатурі клавішу Esc або клікнути правою кнопкою миші, після чого з'явиться керуюче меню, де останнім пунктом буде режим "Закінчити показ". Із цього ж меню можна перейти на будь-який вибраний слайд (не обов'язково в тому порядку, що пропонує презентація).

У друкованому варіанті – неповна демонстраційна збірка пропонованих матеріалів. Повна версія посібника з анімацією, рисунками та опрацьованими самостійними завданнями – тільки в електронному вигляді.

Побажання та пропозиції для покращення приймаються за електронною адресою: [vm\\_kolosov@ksame.kharkov.ua](mailto:vm_kolosov@ksame.kharkov.ua)



# 1. Декартова прямокутна система координат у просторі

Три взаємно перпендикулярні координатні прямі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  зі спільним *початком*  $O$  утворюють *декартову прямокутну систему координат у просторі* (рис. 1).

$Ox$  – *вісь абсцис*,  $Oy$  – *вісь ординат*,  $Oz$  – *вісь амплікат*

Положення довільної точки  $M$  однозначно визначається її *координатами*  $M(x; y; z)$ .

*Відстань між довільними двома точками*  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  і  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

*Координати точки*  $M(x; y; z)$ , яка ділить заданий відрізок у заданому *відношенні*, обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо точка  $M$  ділить відрізок  $M_1M_2$  пополам, то  $\lambda = 1$ . Тоді *координати середини відрізка* визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

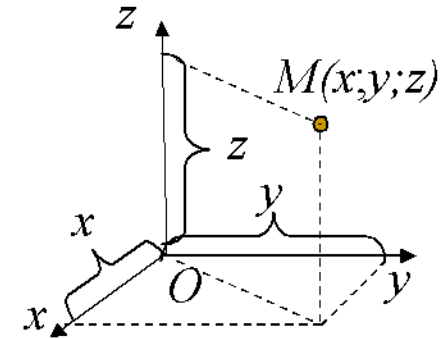


Рис. 1



## Приклад

Трикутник  $ABC$  задано координатами вершин  $A(2;-1;4)$ ,  $B(3;2;-6)$ ,  $C(-5;0;2)$ . Побудувати  $\triangle ABC$  в системі координат. Знайти довжину медіани  $AM$  (рис. 2).

Нехай  $M$  – середина сторони  $BC$ :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1;$$

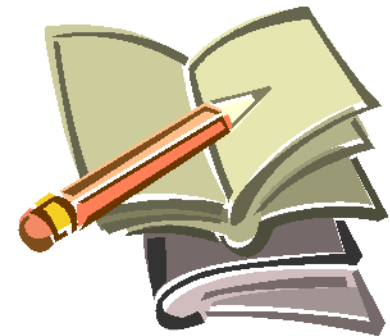
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1;$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{-6 + 2}{2} = -2;$$

$$M(-1;1;-2).$$

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

$$AM = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - (-1))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{49} = 7.$$



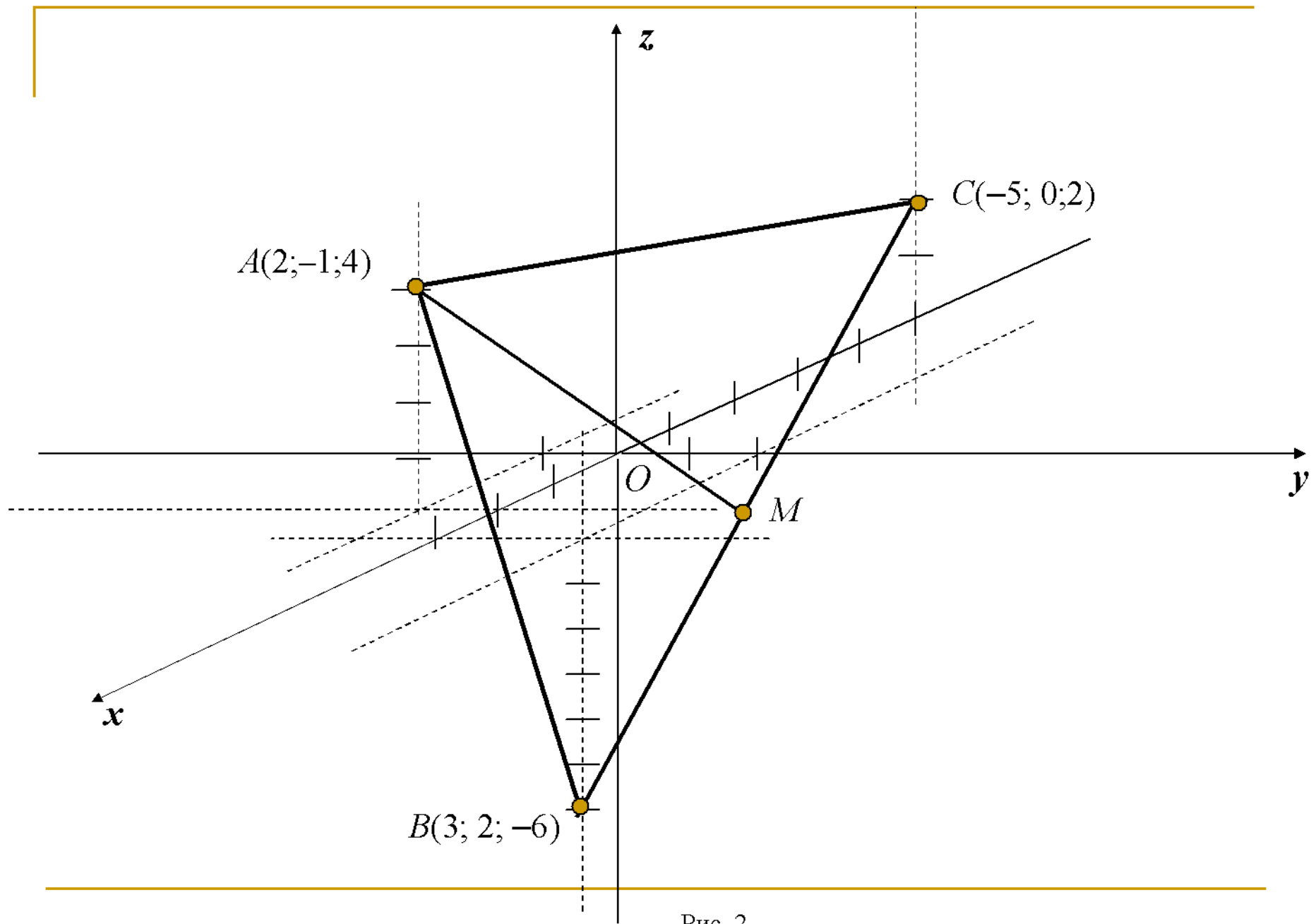


Рис. 2





## 2. Площина в просторі.

### 2.1. Основні типи рівняння площини

2.1.1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

2.1.2. Загальне рівняння площини

2.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

2.1.4. Рівняння площини у відрізках на осях

2.2. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

2.3. Умова перетину трьох площин в одній точці

## 2.1. Основні типи рівняння площини

### 2.1.1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині  $\alpha$  задана точка  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  і відомий **вектор нормалі**  $\vec{n} = (A; B; C) \neq \vec{0}$  (рис. 3).

Візьмемо довільну точку  $M(x; y; z)$  на цій площині та побудуємо вектор  $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ .

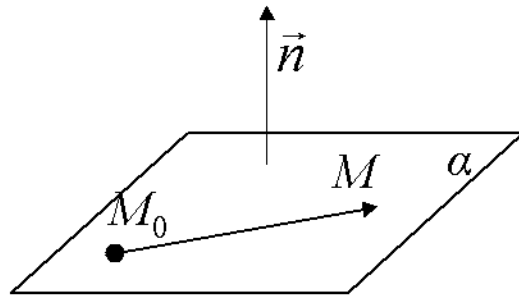


Рис. 3

Точка  $M$  належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор  $\overline{M_0M}$  перпендикулярний до нормалі  $\vec{n}$ .

Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо  $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$ , або в координатній формі

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  – **рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.**



## 2.1.2. Загальне рівняння площини

Розкриємо дужки в рівнянні  $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$  і отримаємо  $Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$ . Згрупуємо сталі величини та позначимо  $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ . Тоді одержимо

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

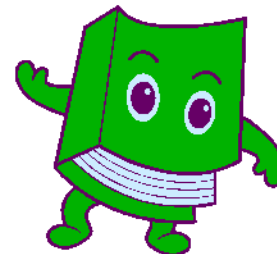
– *загальне рівняння площини*, що є лінійним відносно координат  $x, y, z$ , причому хоча б один з коефіцієнтів  $A, B, C$  відмінний від нуля, тобто

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Зауваження. Загальне рівняння площини визначається з точністю до сталого множника.

Рівняння довільної площини можна звести до загального вигляду.

Теорема. Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат  $x, y, z$ . Кожному лінійному рівнянню зі змінними  $x, y, z$  відповідає деяка площина.





Особливості розміщення площини, коли один або декілька коефіцієнтів її загального рівняння дорівнюють нулю:

$A = 0$ , тоді площина  $Bu + Cz + D = 0$  паралельна осі  $Ox$ ;

$B = 0$ , тоді площина  $Ax + Cz + D = 0$  паралельна осі  $Oy$ ;

$C = 0$ , тоді площина  $Ax + Bu + D = 0$  паралельна осі  $Oz$  (рис. 4);

$D = 0$ , тоді площина  $Ax + Bu + Cz = 0$  проходить через початок координат (рис. 5);

$A = 0$  і  $B = 0$ , тоді площина  $Cz + D = 0$  перпендикулярна до осі  $Oz$  (рис. 6);

$A = 0$  і  $C = 0$ , тоді площина  $Bu + D = 0$  перпендикулярна до осі  $Oy$ ;

$B = 0$  і  $C = 0$ , тоді площина  $Ax + D = 0$  перпендикулярна до осі  $Ox$ ;

$A = 0$  і  $D = 0$ , тоді площина  $Bu + Cz = 0$  проходить через вісь  $Ox$ ;

$B = 0$  і  $D = 0$ , тоді площина  $Ax + Cz = 0$  проходить через вісь  $Oy$ ;

$C = 0$  і  $D = 0$ , тоді площина  $Ax + Bu = 0$  проходить через вісь  $Oz$ ;

площина  $z = 0$  – координатна площина  $Oxy$ ;

площина  $y = 0$  – координатна площина  $Oxz$ ;

площина  $x = 0$  – координатна площина  $Oyz$ .

