МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

О. В. БОРАКОВСЬКИЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З КУРСУ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(МОДУЛЬ ІІ)

*(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання
за напрямом підготовки 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього
середовища та збалансоване природокористування»)*

Харків
ХНАМГ
2012

Бораковський О. В. Конспект лекцій з курсу «Вища математика»: (модуль II). (для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування») / О. В. Бораковський; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. –Х.: ХНАМГ, 2012. – 64 с.

Автор: О. В. Бораковський.

Рецензент: . к. т. н. проф. С. О. Станішевський

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 3 від 26.10.2011 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В основу конспекту лекцій покладено програми вищої математики для студентів денної і заочної форм навчання факультетів інженерної екології міст і містобудівельного Харківської національної академії міського господарства (ХНАМГ).

Модуль II охоплює наступні розділи вищої математики: інтегральне числення, диференціальні рівняння, функції кількох змінних, комплексні числа.

Достатня кількість розв'язаних типових прикладів дає змогу студентам самостійно опанувати даний курс вищої математики й підготуватися до складання іспиту.

Конспект складено на основі курсів лекцій, які читалися автором на факультетах інженерної екології міст і містобудівельному.

Зауваження та пропозиції надсилайте на кафедру вищої математики ХНАМГ за адресою: 61002, м. Харків, вул. Революції, 12.

Змістовий модуль 2.1
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Визначення. Властивості. Таблиця основних невизначених інтегралів

Раніше, маючи функцію $F(x)=\sin x$, ми шукали її похідну і записували цей факт так: $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$.

Розглянемо обернену задачу.

Маємо функцію $f(x)=\cos x$. Треба відповісти на питання: похідною якої функції вона є.

Цей факт запишемо так:

$\int f(x)dx=F(x)+C$ або $\int \cos xdx=\sin x+C$.

Функція $F(x)$ має назву первісної для $f(x)$ на інтервалі (a,b), якщо $F(x)$ має похідну $x\in(a,b)$ та $F'(x)=f(x)$.

Якщо $F'(x)=f(x)$, то і $(F(x)+C)'$ також буде дорівнювати $f(x)$, бо $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)+0=f(x)$, де $C=const$.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$, або від виразу $f(x)dx$, є сукупність первісних виду $F(x)+C$, тобто $\int f(x)dx=F(x)+C$, де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз. Процес знаходження первісної функції називається інтегруванням.

Невизначений інтеграл не має геометричного змісту. Операція інтегрування розглядається як обернена до операції диференціювання.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$
3. $\int dF(x)=F(x)+C$
4. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$, $a=const$
5. $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$
6. Якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$, то

$\int f(u)du=F(u)+C$ – це властивість інваріантності формул інтегрування: якщо $\int \cos xdx=\sin x+C$, то

$$\int \cos\square\, d\,\square=\sin\square+C$$

де $\square$ – це будь-яка неперервна функція від x.

Таблиця основних невизначених інтегралів

I. $\int dx = x + C$

II. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$ при $m \neq -1$

III. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C$

IV. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + C$

VI. $\int e^x dx = e^x + C$

VII. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\,a} + C$

VIII. $\int sin\,xdx = -cos\,x + C$

IX. $\int cos\,xdx = sin\,x + C$

X. $\int sec^2\,xdx = tgx + C$

XI. $\int cos\,ec^2 xdx = -ctgx + C$

XII. $\int shxdx = chx + C$

XIII. $\int chxdx = shx + C$

XIV. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

XV. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

XVI. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\left|f(x)\right| + C$

XVII. $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

XVIII. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$

XIX. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

XX. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\dfrac{x}{a} + C$

XXI. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \lambda}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm \lambda}\right| + C$

XXII. $\int \dfrac{dx}{sin\,x} = ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C = ln\left|cos\,ecx - ctgx\right| + C$

XXIII. $\int \dfrac{dx}{cos\,x} = ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = ln\left|sec\,x + tgx\right| + C$

XXIV. $\int tgxdx = -ln\left|cos\,x\right| + C$

XXV. $\int ctgxdx = ln\left|sin\,x\right| + C$

Знаходження інтервалів за допомогою цієї таблиці має назву безпосереднього інтегрування.

Приклади.

1. $$\int\left(3\sqrt[3]{x} - \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}} + 2x\right)dx \underset{=======}{\overset{\text{власт. 4,5}}{}} 3\int x^{\frac{1}{3}} dx -$$

$$-4\int x^{-\frac{3}{5}} dx + 2\int xdx \underset{=======}{\overset{\text{форм. II}}{}} \frac{3\cdot 3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{5\cdot \cancel{4}\, x^{\frac{2}{5}}}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}\, x^2}{\cancel{2}} + C$$

2. $\int (x-2)^2\,dx = \int (x^2-4x+4)\,dx = \int x^2dx - 4\int xdx + 4\int dx =$

$= \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x + C;$

3. $\int (x-2)^{50}\,dx =$ як і у прикладі 2 ми маємо змогу розкласти по формулі бінома Н'ютона $(x-2)^{50}$ на суму 51 додатка, але краще зробити заміну змінної: $= \begin{vmatrix} x-2=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int t^{50}dt = \frac{t^{51}}{51} + c = \frac{(x-2)^{51}}{51} + C$.

Ще простіше цей приклад можливо розв'язати, сформувавши під знаком диференціала таку ж змінну, яка є у підінтегральній функції.

Згадаємо визначення диференціала, покажемо, що $dF(x) = d(F(x) \pm C)$ і використаємо властивість інваріантності формул інтегрування.

$$dF(x) = F'(x)dx$$

$$d(F(x) \pm C) = (F(x) \pm C)'dx = \left(F'(x) \pm \underset{0}{\underset{/\!/}{C'}} \right) dx = F'(x)dx = dF(x)$$

4. $\int (x-2)^{50}\,dx = \int (x-2)^{50}\,d(x-2) = \frac{(x-2)^{51}}{51} + C$

2. Заміна змінної у невизначеному інтегралі

1. Нехай $x = \varphi(t)$ – неперервно диференційована функція нової змінної t, тоді

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Приклади.

a) $\int \frac{cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \begin{vmatrix} \sqrt[3]{x}=t \\ x=t^3 \\ dx=3t^2dt \end{vmatrix} = \int \frac{cos\,t \cdot 3\cancel{t^2}\,dt}{\cancel{t^2}} = 3\,sin\,t + C = 3\,sin\sqrt[3]{x} + C$

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}} = \begin{vmatrix} \sqrt{x-4}=t; \\ x-4=t^2 \\ dx=2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{2\cancel{t}dt}{(t^2+4)\cdot\cancel{t}} = 2\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{2}{2}arctg\,\frac{t}{2} + C =$

$= arctg\,\frac{\sqrt{x-4}}{2} + C$

2. $u = \psi(x)$, де u − нова змінна тоді $\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx = \int f(u)du$

Приклад. $\int ln^4 x\frac{1}{x}dx = \left| \begin{matrix} ln\,x = u \\ \frac{1}{x}dx = du \end{matrix} \right| = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{ln^5 x}{5} + C$.

Зауваження. Якщо $\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right) + C$ тоді

$$\int f\left(ax+b\right)dx = \frac{1}{a}\int f\left(ax+b\right)d\left(ax+b\right) = \frac{1}{a}F\left(ax+b\right) + C.$$

Приклад. $\int cos\left(2x+3\right)dx = \frac{1}{2}sin\left(2x+3\right) + C$.

3. Інтегрування частинами

Розглянемо неперервно диференційовані функції $u = u\left(x\right)$ та $v = v\left(x\right)$.

Проінтегрувавши вираз $d(uv) = udv + vdu$, отримаємо формулу інтегрування частинами

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Інтегрування частинами застосовується коли знову отриманий інтеграл $\int vdu$ простіше або подібний попередньому $\int udv$.

Приклад.

a) $$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{cos\,xdx}_{dv} = \left| \begin{matrix} x = u \\ cos\,xdx = dv \\ dx = du \\ v = sin\,x + \underset{0}{\underset{/\!/}{\cancel{C}}} \end{matrix} \right| = \underbrace{x}_{u}\underbrace{sinx}_{v} - \int \underbrace{sin\,x}_{v}\underbrace{dx}_{du} = x\,sin\,x \cancel{-} cos\,x + C;$$

b) Спробуємо навпаки

$$(!)\int \underbrace{cos\,x}_{u_i}\underbrace{xdx}_{dv_i} = \left| \begin{matrix} cos\,x = u_1 \\ xdx = dv_1 \\ du_1 = -sin\,xdx \\ v_1 = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v_1}\cdot\underbrace{cos\,x}_{u_1} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v_1}\underbrace{\left(-sin\,x\right)dx}_{du_1}$$

У результаті хибного використання формули інтегрування частинами знову отриманий інтеграл виявився складніше попереднього.

Надамо таблицю рекомендацій застосування формули інтегрування частинами

$$\int \underbrace{P_n\left(x\right)}_{u}\underbrace{e^{ax}dx}_{dv} \qquad \int \underbrace{ln\,ax}_{u}\cdot\underbrace{P_n\left(x\right)dx}_{dv}$$

$$\int \underbrace{P_n\left(x\right)}_{u}\underbrace{sin\,axdx}_{dv} \qquad \int \underbrace{arcsin\,ax}_{u}\cdot\underbrace{P_n\left(x\right)dx}_{dv}$$

$$\int \underbrace{P_n\left(x\right)}_{u}\underbrace{cos\,axdx}_{dv} \qquad \int \underbrace{arccos\,ax}_{u}\cdot\underbrace{P_n\left(x\right)dx}_{dv}$$

$$\int \underbrace{arc\,tg\,ax}_{u} \cdot \underbrace{P_n(x)\,dx}_{dv}$$

У цьому випадку за u приймемо многочлен $P_n(x)$	У цьому випадку за u приймемо логарифмічну або обернену тригонометричну функцію.

Розглянемо приклад, так званого, зворотнього інтегралу, коли у разі першого застосування формули інтегрування частинами отримаємо інтеграл подібний попередньому.

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} e^x = u; \\ \cos x dx = dv; \\ du = e^x dx; \\ v = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} e^x = u_1 \\ \sin x dx = dv_1 \\ du_1 = e^x dx \\ v_1 = -\cos x \end{array} \right| = e^x \sin x - \left[e^x(-\cos x) + \int \cos x e^x dx \right] =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

тоді $J = e^x(\sin x + \cos x) - J$; $J = \dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$

Метод інтегрування частинами може бути застосований двічі або, навіть, тричі, у залежності від степеня многочленну $P_n(x)$

Приклад. $\int (x^2+1)e^x dx = \left| \begin{array}{c} x^2+1 = u \\ e^x dx = dv \\ 2xdx = du \\ v = e^x \end{array} \right| = (x^2+1)e^x - \int e^x x dx = \left| \begin{array}{c} x = u_1 \\ e^x dx = dv_1 \\ du_1 dx \\ v_1 = e^x \end{array} \right| =$

$$= (x^2+1)e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx \right] = (x^2+1)e^x - 2xe^x + e^x + C.$$

Завдання для самостійного виконання.

1. $\int \dfrac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$	**5.** $\int x^3 e^{x^2} dx$
2. $\int \dfrac{dx}{(x+4)\sqrt{x}}$	**6.** $\int \cos \ln x \, dx$
3. $\int x \ln 2x dx$	**7.** $\int (2x^2+x-3)\sin x dx$
4. $\int arctg \dfrac{x}{2} dx$	**8.** $\int x^2 \cos 3x dx$

4. Інтегрування раціональних дробів

Раціональний дріб це вираз виду $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ многочлени, що не мають спільних коренів, степеню n та m відповідно. Якщо $n< m$ – дріб правильний, якщо $n\ge m$ – неправильний.

Будь-який неправильний дріб, шляхом виділення цілої частини, може бути представлений у вигляді $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$, де $M(x)$– ціла частина, $\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ – правильний раціональний дріб, $k < m$.

1. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\,ln|x-a| + C$; де A, $a = const$;

$$\int \frac{3}{x-2}dx = 3\int \frac{d(x-2)}{x-2} = 3\,ln|x-2| + C.$$

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = A\int (x-a)^{-m}\,d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-m+1}}{1-m} + C$; $m \ne 1$.

$$\int \frac{5}{(x-1)^3} = 5\int (x-1)^{-3}\,d(x-1) = 5\frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C;$$

III. $$\int \frac{A}{x^2+px+q}dx = A\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\underbrace{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}}_{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} - \underbrace{\frac{p^2}{2}+q}_{\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}} =$$

($p^2 - 4q < 0$, тобто знаменник не має дійсних коренів)

Виділимо у знаменнику повний квадрат і застосуємо формулу

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C$$

$$= A\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Приклад.

$$\int\frac{3}{x^2+2x+10}dx=3\int\frac{dx}{x^2+2x+1+9}=3\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3^2}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

Зауваження. $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+px+q\right)$

де $\frac{b}{a}=p$; $\frac{c}{a}=q$. Якщо знаменник має дійсні корені, його можна розкласти на множники (дивись нижче), або також виділити повний квадрат.

IV. $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=A\int\frac{x+\frac{B}{A}}{x^2+px+q}dx=$

1) Виділимо у чисельнику похідну знаменника.
2) Розкладемо інтеграл на суму двох.
3) У першому застосуємо формулу $\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}$, а у другому виділимо повний квадрат, дивись випадок III.

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+2\frac{B}{A}+p-p}{x^2+px+q}dx=$$

$$\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\frac{A}{2}\left(2\frac{B}{A}-p\right)\int\frac{dx}{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}=$$

$$=\frac{A}{2}ln\left(x^2+px+q\right)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C;$$

Приклад.

$$\int\frac{5x+1}{x^2-2x+5}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x+\frac{2}{5}-2+2}{x^2-2x+5}dx=$$

$\langle 2x-2\rangle$ – похідна знаменника

$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx+\frac{\cancel{5}}{2}\left(\frac{2}{\cancel{5}}+\frac{10}{\cancel{5}}\right)\int\frac{d(x-1)}{\underbrace{x^2-2x+1+4}_{(x-1)^2+2^2}}=$$

$$=\frac{5}{2}ln\left(x^2-2x+5\right)+\frac{3}{\cancel{6}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}arctg\frac{x-1}{2}+C.$$

2. Інтегрування раціональних дробів, шляхом розкладання на найпростіші за допомогою невизначених коефіцієнтів.

Крок 1. Перевіримо чи правильний раціональний дріб. Якщо дріб неправильний, виділимо цілу частину шляхом ділення у стовпчик.

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \left(M(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \right) dx$$
$$(n \le m) \qquad\qquad (k < m)$$

Крок 2. Розкладемо на два інтеграли $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int M(x)dx + \int \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}dx$ і розглянемо другий із них

Крок 3. Представимо правильний раціональний дріб $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ як суму найпростіших з невизначеними коефіцієнтами, для чого розкладемо знаменник на лінійні та квадратичні множники:

$$\frac{R_k(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{m_1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{m_1-1}} + \frac{A_{m1}}{x-a} + \ldots + \tag{*}$$
$$+ \frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)^{n_1}} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+px+q)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{B_{n_1}x + C_{n_1}}{x^2+px+q} + \ldots$$

Крок 4. Знайдемо невизначені коефіцієнти *A, B, C*, для чого зведемо праву частину рівності (*) до спільного знаменника і розглянемо тільки чисельники. Така процедура має назву звільнення від знаменника. Далі, порівнявши коефіцієнти у лівій та правій частині рівності (*) при однакових степенях x, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої знайдемо невизначені коефіцієнти. Можемо піти іншим шляхом. Оскільки рівність (*) виконується для будь-яких x, то надаючи x певних значень, отримаємо невизначені коефіцієнти. У результаті отримаємо невизначені коефіцієнти. Інтеграл від правильної раціональної дробі представимо у вигляді суми інтегралів від найпростіших дробів. Розглянемо приклади.

Випадок 1. Знаменник має тільки дійсні різні корені

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - 2}{x^3 - x}dx = \int \left(2 + \frac{x^2 + 2x - 2}{x^3 - x} \right) dx =$$

Підінтегральний вираз – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину.

$$
\begin{array}{r|l}
\underline{-\begin{matrix} 2x^3+x^2+0x-2 \\ 2x^3 \qquad\quad -2x \end{matrix}} & \underline{\quad x^3-x \quad} \\
x^2+2x-2 & 2 - \text{ціла частина} \\
\text{залишок} &
\end{array}
$$

$$
= 2\int dx + \int \frac{x^2+2x-2}{x(x-1)(x+1)}dx = (**)
$$

Розглянемо правильний раціональний дріб

$$
\frac{x^2+2x-2}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}
$$

Звільнимося від знаменника

$$
x^2+2x-2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)
$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частині, отримаємо систему рівнянь

$$
\left.\begin{array}{l|l}
x^2 & 1 = A+B+C \\
x^1 & 2 = B-C \\
x^0 & -2 = -A
\end{array}\right\} \qquad A = 2; \qquad
\begin{array}{l}
\underline{\begin{cases} B+C=-1 \\ B-C=2 \end{cases} +} \\
2B = 1; \quad B = \dfrac{1}{2}; \\
\qquad C = -\dfrac{3}{2};
\end{array}
$$

Або простіше. Надаючи x значення, що дорівнюють дійсним кореням знаменника, одразу отримаємо невизначені коефіцієнти.

$$
\begin{array}{l|l}
x = 0 & -2 = -A; \ A = 2; \\
x = 1 & 1 + \cancel{2} - \cancel{2} = A\cdot 0 + 2B + C\cdot 0; \ B = \dfrac{1}{2}; \\
x = -1 & 1-2-2 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + 2C; \ C = -\dfrac{3}{2};
\end{array}
$$

$$
(**) = 2\int dx + 2\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1} =
$$

$$
= 2x + 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+1| + C;
$$

Випадок 2. Знаменник має дійсні корені, деякі з яких кратні.

$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3}dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int (x-1)^{-3}dx + \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1};$$

$$x^2+1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + (x-1)^2$$

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 1=-A; \quad A=-1; \\ x=1 & 2=B; \quad B=2; \\ x^3 & 0=A+D; \quad D=-A=1; \\ x^1 & 0=+3A+B-C+D; \quad C=-3+2+1=0 \end{array}$$

$$= -ln|x| + \frac{\cancel{2}(x-1)^{-2}}{-\cancel{2}} + ln|x-1| + ln\,C = ln\frac{C|x-1|}{|x|} - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Випадок 3. Серед коренів є дійсні і комплексно-спряжені.

$$\int \frac{3dx}{x^3-1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$3 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 3=A\cdot 3+(Bx+C)\cdot 0; \quad A=1; \\ x^2 & 0=A+B; \quad B=-A=-1; \\ x^0 & 3=A-C; \quad C=A-3=-2; \end{array}$$

$$= \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx =$$

$$\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\underbrace{x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{4}{4}}_{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} =$$

$$= ln|x-1| - \frac{1}{2}ln(x^2+x+1) - \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int \frac{x+1}{x(x-2)}dx$ **2.** $\int \frac{2x^2+x-1}{(x+1)^2(x-2)^2}dx$

3. $\int \frac{3x^2-1}{(x^2+4)(x-2)}dx$ **4.** $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

5. $\int \frac{x^2+1}{x^4+4}dx$, зауваження $\left[x^4+1=\left(x^2+2\right)^2-4x^2\right]$

5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ b) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Тут наші дії будуть аналогічні діям пунктів III і IV інтегрування найпростіших раціональних дробів.

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Спочатку виділимо під коренем повний квадрат, а потім, в залежності від знаків коефіцієнтів підкореневого виразу, скористаємося формулами $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm \lambda}}$ або $\int \frac{du}{\sqrt{a_1^2-u^2}}$

Приклад. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1+1}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=$

$$=ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$$

Приклад. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+4x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-2x+1-4\right)}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}arcsin\frac{x-1}{2}+C;$$

b) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Спочатку виділимо у чисельнику похідну підкореневого виразу, потім розіб’ємо на два інтеграли, у першому з яких використаємо формулу

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$, а для другого застосуємо випадок а).

Приклад. $\int \frac{x-1}{\sqrt{6x-x^2-8}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+2+6-6}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx =$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx + \frac{4}{2}\int \frac{d(x-3)}{\sqrt{-\left(x^2-6x+9-9+8\right)}} =$$

$$-(x-3)^2+1$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{-x^2+6x-8} + 2\,arcsin(x-3) + C.$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$ **2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

3. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ **4.** $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

6. Інтегрування тригонометричних функцій

1. Інтеграли, що мають вигляд $\int sin^n x\, cos^m x dx$

Розглянемо два випадки.

1) Принаймні один з показників *n* або *m* – непарне додатнє ціле число.

Якщо *n* додатнє непарне число, то зробимо підстановку $cos\, x = t$, а якщо *m* то $sin\, x = t$.

Розглянемо приклади.

1. $\int sin^3 x\, cos^2 x dx = \begin{vmatrix} cos\, x = t \\ -sin\, x dx = dt \end{vmatrix} =$

$$= \int sin^2 x\, cos^2 x\, sin\, x dx = -\int \left(1-t^2\right)t^2 dt =$$

$$= \int \left(t^4 - t^2\right)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + c = \frac{cos^5 x}{5} - \frac{cos^3 x}{3} + C;$$

2. $\int \frac{cos^3 x}{sin\, x}dx = \int \frac{cos^2 x\, cos\, x dx}{sin\, x} = \begin{vmatrix} sin\, x = t \\ cos\, x dx = dt \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{1-t^2}{t}dt = \int \left(\frac{1}{t} - t\right)dt = ln|t| - \frac{t^2}{2} + C = ln|sin\, x| - \frac{sin^2 x}{2} + C;$$

2) Обидва показники *n* та *m* – парні числа. Тоді скористаємося формулами

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x;\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$$

1. $$\int \sin^2 x\cos^2 xdx=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2xdx=$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

2. $$\int \sin^4 xdx=\int\left(\sin^2 x\right)^2 dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x=\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right]+C=$$
$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C;$$

2. <u>Інтеграли, що мають вигляд</u> $\int tg^m xdx$, $\left(\int ctg^m xdx\right)$,

де m – ціле додатнє число.

Скористаємося наступними формулами $tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, $ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$.

Приклад. $$\int tg^3 xdx=\int tg^2 xtgxdx=\int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$
$$=\int tgxdtgx-\int tgxdx=\left|\frac{1}{\cos^2 x}dx=dtgx\right|=\frac{tg^2 x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C$$

Приклад. $$\int ctg^4 xdx=\int ctg^2 x\cdot ctg^2 xdx=\int ctg^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=$$
$$=\left|\frac{1}{\sin^2 x}dx=-dctgx\right|=-\int ctg^2 xdctgx-\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=$$
$$=-\int ctg^2 xdctgx+\int dctgx+\int dx=-\frac{ctg^3 x}{3}+ctgx+x+C;$$

3. <u>Інтеграли, що мають вигляд</u> $\int tg^m x\frac{dx}{\cos^n x}$, $\left(\int ctg^m x\frac{dx}{\sin^n x}\right)$,

де n дадатнє парне число.

Скористаємося наступними формулами
$$\frac{1}{\cos^2 x}=tg^2 x+1,\quad \frac{1}{\sin^2 x}=ctg^2 x+1$$

Приклад. $\int tg^3x\frac{dx}{cos^4x}=\int tg^3x\frac{1}{cos^2x}\cdot\frac{1}{cos^2x}dx=$

$=\int tg^3x\left(tg^2x+1\right)dtgx=\int\left(tg^5x+tg^3x\right)dtgx==\frac{tg^6x}{6}+\frac{tg^4x}{4}+C$.

Приклад. $\int\frac{dx}{sin^6x}=\int\left(\frac{1}{sin^2x}\right)^2\frac{1}{sin^2x}dx=-\int\left(ctg^2x+1\right)^2dctgx=$

$=-\int\left(ctg^4x+2ctg^2x+1\right)dctgx=-\frac{ctg^5x}{5}-\frac{2}{3}ctg^3x+ctgx+C$;

4. <u>Інтеграли, що мають вигляд</u> $\int sin\,mx\cdot cos\,nxdx$, $\int sin\,mx\cdot sin\,nxdx$, $\int cos\,mx\cdot cos\,nxdx$.

   Для інтегрування скористаємося відповідними формулами:

$$sin\,mx\cdot cos\,nx=\frac{1}{2}\left[sin\left(m+n\right)x+sin\left(m-n\right)x\right]$$

$$cos\,mx\cdot cos\,nx=\frac{1}{2}\left[cos\left(m+n\right)x+cos\left(m-n\right)x\right]$$

$$sin\,mx\cdot sin\,nx=\frac{1}{2}\left[cos\left(m-n\right)x-cos\left(m+n\right)x\right]$$

Приклад. $\int sin\,3x\cdot cos\,2xdx=\frac{1}{2}\int\left(sin\,5x+sin\,x\right)dx=$

$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}cos\,5x-\frac{1}{2}cos\,x+C$.

5. <u>Інтеграли, що мають вигляд</u> $\int R\left(sin\,x,cos\,x\right)dx$

1) Якщо $sin\,x$ та $cos\,x$ входять у раціональну функцію R у першому ступені не перемножуючись одне з одним, то застосуємо, так звану, універсальну тригонометричну підстановку:

$$tg\frac{x}{2}=t,\qquad sin\,x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad cos\,x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

2) Якщо $R\left(sin\,x,cos\,x\right)$ є непарною функцією відносно $sin\,x$, тобто $R\left(-sin\,x,cos\,x\right)=-R\left(sin\,x,cos\,x\right)$, то застосовуємо підстановку $cos\,x=t$.

3) Якщо $R\left(sin\,x,cos\,x\right)$ є непарною функцією відносно $cos\,x$, тобто $R\left(sin\,x,-cos\,x\right)=-R\left(sin\,x,cos\,x\right)$ то застосовуємо підстановку $sin\,x=t$.

4) Якщо $R\left(sin\,x,cos\,x\right)$ є парною функцією відносно $sin\,x$ та $cos\,x$, тобто $R\left(-sin\,x,-cos\,x\right)=R\left(sin\,x,cos\,x\right)$, то застосовуємо підстановку $tgx=t$.

Тоді $sin\,x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $cos\,x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

Приклад. $\int \frac{dt}{\sin x + 1} = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2} = t, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+1} = 2\int \frac{\frac{dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{2t+1+t^2}{\cancel{1+t^2}}} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{-2}{t+1} + C = \frac{-2}{tg\frac{x}{2}+1} + C;$$

Приклад. $\int \frac{\cos x - \cos^3 x}{\sin^2 x - \sin^4 x} dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cos x dx}{\sin^2 x - \sin^4 x} =$

$$= \int \frac{t^2 dt}{t^2(1-t^2)} = -\int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{2} ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2} ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = ln\sqrt{\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}} + C\,;$$

Приклад. $\int \frac{dx}{2\sin x \cos x - \cos^2 x} = \left| \begin{matrix} tgx = t & \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; & dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2t-1} = \frac{1}{2} ln|2t-1| + C = ln\sqrt{2tgx-1} + C.$$

7. Тригонометричні підстановки

Метою тригонометричних підстановок є звільнення від квадратного кореня у підінтегральному виразі. Розглянемо наступні інтеграли де R є раціональною функцією.

1. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$, тут скористаємося підстановкою

$x = a\sin t \quad (x = a\cos t)$ де $dx = a\cos t dt$, $\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t$.

2. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$ – підстановка $x = atgt\,(x = actgt)$

$$dx = \frac{adt}{\cos^2 t}; \qquad \sqrt{a^2 + a^2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = a\sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t};$$

3. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ – підстановка $x=\dfrac{a}{\sin t}\left(x=\dfrac{a}{\cos t}\right)$

$$dx=-a\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt;\quad \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=a\frac{\cos t}{\sin t}$$

Розглянемо приклади для кожного випадку.

1. $$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{c}x=a\sin t\\ dx=a\cos t\,dt\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}{a^2\sin^2 t}a\cos t\,dt=$$

$$=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-ctgt-t+C=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\sin t=\dfrac{x}{a};t=\arcsin\dfrac{x}{a}\\ \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\end{array}\right|=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}\cdot\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot x}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

2. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\left|\begin{array}{c}x=atgt\\ dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt\end{array}\right|=\int\frac{\cancel{a}\,dt}{\cancel{a}tgt\sqrt{a^2+a^2tg^2t}\cos^2 t}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin t\dfrac{1}{\cos t}\cos^2 t}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{a}ln\left|\frac{1}{\sin t}-ctgt\right|+C=$$

$$\left|\begin{array}{c}ctgt=\dfrac{a}{x}\\ \dfrac{1}{\sin t}=\sqrt{1+ctg^2t}=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\end{array}\right|=\frac{1}{a}ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right|+C.$$

3. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\left|\begin{array}{c}x=\dfrac{a}{\sin t}\\ dx=-a\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}dt\end{array}\right|=-\int\frac{\dfrac{a}{\sin t}\cdot\dfrac{a\cos t}{\sin^2 t}dt}{\sqrt{\dfrac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}}=$$

$$=-a\int\frac{\sin^{\cancel{2}} t\cos t\,dt}{\sin^3 t\cos t}=-a\int\frac{dt}{\sin^2 t}=actgt+C=\left|\begin{array}{c}\sin t=\dfrac{a}{x}\\ \cos t=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}\end{array}\right|=$$

$$=a\frac{\sqrt{x^2-a^2}\cdot x}{x\cdot a}+C=\sqrt{x^2-a^2}+C.$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

2. $\int \frac{dx}{1-2\cos x}$

3. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x+4\sin x\cos x}$

4. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^3 x-\sin^2 x-1}$

5. $\int \sin^3 x dx$

6. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}dx$

7. $\int \sin 3x \sin x dx$

8. $\int \cos 3x \cos 2x dx$

9. $\int ctg^4 \frac{x}{2}dx$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

8. Визначення. Властивості. Методи інтегрування

Нехай функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на відрізку[a, b]. Розіб'ємо відрізок [a, b] на підінтервали точками $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$.

Позначимо $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. На кожному з підінтервалів $[x_{k-1},\ x_k]$ оберемо довільну точку $\xi_к$ і сформуємо інтегральні суми

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+...+f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку [a, b] зветься границя інтегральних сум, коли довжина найбільшого з підінтервалів прямує до нуля.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max \Delta_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Теорема існування визначеного інтеграла. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку [a, b], то границя інтегральних сум існує і не залежить від засобу розкладання відрізка [a, b] на підінтервали і від вибору точок $\xi_к$.

Якщо $f(x)>0$ на відрізку [a, b] , то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, з геометричної точки зору, дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженій лініями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ (Рис. 1).

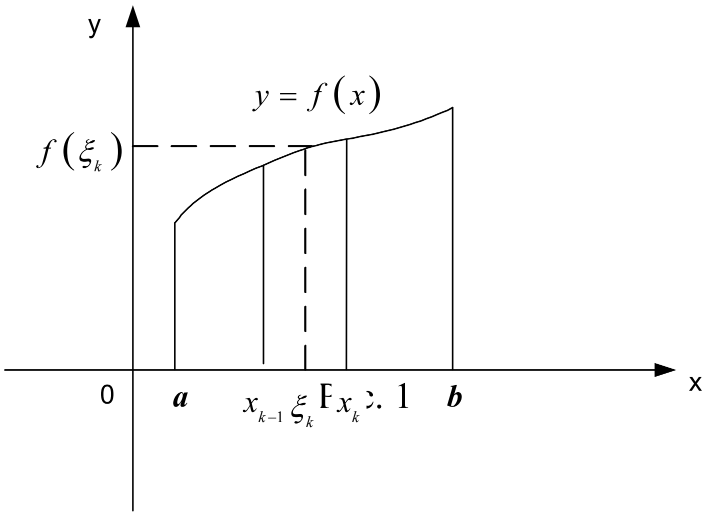

Рис. 1

Основні властивості визначеного інтеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, $c \in$[a, b].

4. $\int\limits_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x) \right] dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$.

5. $\int\limits_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx$, $\lambda = const$

6. Оцінка визначеного інтеграла. Якщо m і M найменше і найбільше значення функції $f(x)$ відповідно на відрізку [a, b], то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Вважаючи, що $f(x)$ неперервна функція на відрізку [a, b], то існує таке $f_{середнє}(x)$, що $f_{середнє}(x) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$

Обчислення визначеного інтеграла

1. Формула Ньютона-Лейбниця

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, де $F(x)$ − первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$

2. Інтегрування частинами

$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$ − неперервно диференційовані функції на відрізку [a, b].

3. Заміна змінної

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, де $x = \varphi(t)$ − неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$.

$$\alpha \le t \le \beta,\ \ a = \varphi(\alpha),\ \ b = \varphi(\beta),$$

$f[\varphi(t)]$ − неперервна функція на відрізку $[\alpha, \beta]$.

4. Якщо $f(x)$ − непарна функція, тобто область визначення симетрична відносно нуля і $f(-x) = -f(x)$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Якщо $f(x)$ − парна функція, тобто область визначення симетрична відносно нуля і $f(-x) = f(x)$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\left(ctg\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{6}\right) =$

$= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$

Приклад. $\int_1^e ln\,xdx = \begin{vmatrix} ln\,x = u; & du = \frac{1}{x}dx \\ dx = dv & v = x \end{vmatrix} = x\,ln\,x\Big|_1^e - \int_1^e \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}dx = x\,ln\,x\Big|_1^e - x\Big|_1^e =$

$= e\,ln\,e - 1\,ln1 - (e-1) = \cancel{e} - \cancel{e} + 1 = 1.$

Приклад. Оцінити інтеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+cos^2 x}$**;**

оскільки $0 \le cos^2 x \le 1$, то $m = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$**;**

$M = \frac{1}{1+0} = 1$**;** $m(b-a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \le \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+cos^2 x} \le 1\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = M(b-a)$

$$0,7854 = \frac{3,1416}{4} = \frac{\pi}{4} \le \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+cos^2 x} \le \frac{\pi}{2} = \frac{3,1416}{2} = 1,5708$$

Приклад. $\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = R\sin t \\ dx = R\cos t dt \\ x_1 = 0; \quad 0 = R\sin t_1; \quad t_1 = 0 \\ x_2 = R; \quad R = R\sin t_2; \quad t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t} \cdot R\cos t dt = R^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{R^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{R^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin 0\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi R^2}{4}.$$

Зауважимо, що це є площа чверті круга.

Приклад. $\int\limits_{-1}^{1} x^2 \arcsin x dx = 0$ Оскільки підінтегральний вираз є непарна функція, як добуток парної на непарну.

Приклад. $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{\cos^2 x} = 2\int\limits_0^{\pi/3} \dfrac{dx}{\cos^2 x} = 2tgx\Big|_0^{\pi/3} = 2\left(tg\dfrac{\pi}{3} - tg0\right) =$

$= 2tg\dfrac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$ (підінтегральний вираз парна функція).

9. Невласні інтеграли

Невласні інтеграли це:

1) Інтеграли на необмеженому проміжку:

$$\int\limits_a^{\infty} f\left(x\right)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx; \quad \int\limits_{-\infty}^{b} f\left(x\right)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$$

Якщо вище наведені границі існують і скінченні, то невласні інтеграли існують або збігаються і навпаки, якщо границі не існують, або дорівнюють нескінченності, то невласні інтеграли не існують або розбігаються.

2) Інтеграли від необмежених функцій. Якщо функція $f(x)$ необмежена у точці $c\in[a,b]$ і неперервана у всіх інших точках відрізку [a, b], то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$

Невласний інтеграл існує, або збігається, якщо існують обидві скінченні границі у правій частині вищенаведеної рівності і не існує або розбігається, якщо не існує хоча б одна з них.

Ознаки порівняння

1) Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ визначені і неперервні для усіх $x \ge a$, мають інтеграли на відрізку [a, A], де $A \ge a$, і $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ для усіх $x \ge a$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, навпаки з розбіжності інтеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$, причому $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$.

Геометричний зміст цієї ознаки такий. Якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченне число, то площа меншої області є також скінченне число і навпаки, якщо площа меншої області нескінченне велика величина, то площа більшої області є також нескінченно великою.

2) a) Якщо при $x \to 0$ функція $f(x) \ge 0$ є нескінченно малою порядка $p > 0$ у порівнянні з $\frac{1}{x}$, то інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ збігається при $p > 0$ і розбігається при $p \le 1$.

b) Якщо функція $f(x) \ge 0$ визначена і неперервна при $x \in [a,b)$ і є нескінченною величиною порядка p у порівнянні з $\frac{1}{b-x}$ при $x \to b-0$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається при $p < 0$ і розбігається при $p \ge 1$.

Або коротше

2) a) Якщо $x \to \infty$ $$\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \begin{cases} збігається\ при\ p > 1 \\ розбігається\ при\ p \le 1 \end{cases}$$

b) Якщо $x \in \left[a,b\right)$ $$\int_a^{\infty} \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} збігається\ при\ p<1 \\ розбігається\ при\ p \geq 1 \end{cases}$$

Приклад. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_2^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ – збігається, що випливає з ознаки 2 a).

Приклад. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} =$

$= 2\lim_{b\to\infty} arctgx\Big|_0^b = 2\lim_{b\to\infty}\left(arctgb - arctg0\right) = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$ – збігається.

Приклад. $\int_1^{\infty} \frac{ln\left(x+1\right)}{x+1}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b ln\left(x+1\right)d\,ln\left(x+1\right) =$

$= \lim_{b\to\infty} ln^2\left(x+1\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} b\left(\underbrace{ln^2\left(b+1\right) - ln^2 2}_{\to\infty}\right) = \infty$ – розбігається.

10. Застосування визначених інтегралів

Обчислення площі плаского фігури

Площа криволінійної трапеції обмеженої кривою $y = f\left(x\right)$, $f(x) \geq 0$, прямими $x=a$, $x=b$ і відрізком [a, b] осі OX обчислюється за формулою $S = \int_a^b f\left(x\right)dx$.

Якщо $f(x) \leq 0$ на [a, b], то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ теж від'ємний. За абсолютною величиною він дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції.

Площа фігури, обмеженої кривими $y = f_1\left(x\right)$ та $y = f_2\left(x\right)$, $\left[f_1\left(x\right) \leq f_2\left(x\right)\right]$ і прямими $x=a$, $x=b$ обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b \left[f_2\left(x\right) - f_1\left(x\right)\right]dx.$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, прямими $x=a$, $x=b$ та відрізком [a, b] що належить осі OX обчислюється за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt\,,$$

де t_1 і t_2 визначається з рівнянь $a = x(t_1)$; $b = x(t_2)$, $y(t) \geq 0$ якщо $t_1 \leq t \leq t_2$.

Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$, що задана у полярній системі координат, двома полярними радіусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.$$

Якщо площа обмежена кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, де $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$ і двома полярними радіусами $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ то формула наступна $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right) d\varphi$ (Рис. 2).

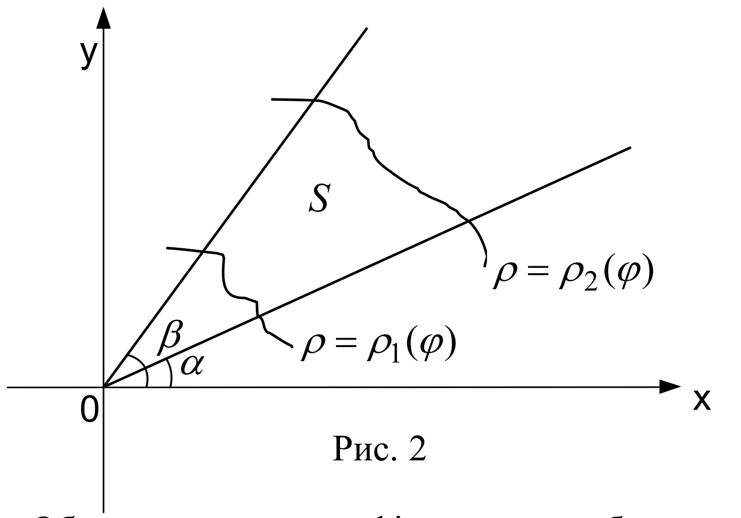

Рис. 2

Приклад. Обчислимо площу фігури, що обмежена лініями: $y = x^2$; $y = x + 2$

$y_1 = x^2$; $y_2 = x + 2$, $(y_2 \geq y_1)$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину $x^2 = x + 2$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$

Тоді $S = \int_{-1}^{2}\left(x + 2 - x^2\right)dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} + 2x\Bigg|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} =$

$= \frac{1}{2}(4-1) + 2(2+1) - \frac{1}{3}(8+1) = 4{,}5$ (квадратних одиниць)

Приклад. Обчислимо площу фігури обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - sin\,t)$, $y = a(1 - cost)$ та віссю *OX*.

Розв'язання. t змінюється від 0 до 2π. $dx = a(1-cost)dt$

$$S=\int_0^{2\pi} a^2(1-cost)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$a^2\left[\frac{3}{2}2\pi-2(\sin 2\pi-\sin 0)+\frac{1}{4}(\sin 4\pi-\sin 0)\right]=3\pi a^2\ (\text{квадратних одиниць})$$

Обчислення довжини пласкої кривої

Якщо крива $y=f(x)$ має на відрізку [a, b] неперервну похідну, то її довжина обчислюється за формулою

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Якщо крива задана у параметричній формі $x=x(t)$, $y=y(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовані функції від параметра t $(t_1\le t\le t_2)$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt.$$

Якщо крива задана у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, то довжина кривої буде

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi.$$

Приклад. $y=\ln\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right], L-$**?**

Розв'язання. $y'=\dfrac{\cos x}{\sin x}$; $L=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi/2}\sqrt{1+ctg^2x}\,dx=$

$$=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\frac{1}{\sin x}-ctgx\right|\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2}=\ln|1-0|-\ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=$$

$$=0-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=+\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3\ \text{(лінійних одиниць).}$$

Приклад. Обчислити довжину однієї арки циклоїди $x=t-\sin t$; $y=1-\cos t$.

Розв'язання.

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(1-\cos t\right)^2+\left(\sin t\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-2\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4\left(\cos\pi-\cos 0\right)=-4\left(-1-1\right)=8\left(\text{лінійних одиниць}\right)$$

Обчислення об'єму тіла

1. За знаними площинами паралельних перерізів.

Якщо відома площа будь-якого перерізу тіла площиною що перпендикулярна до осі *OX*, то ця площа є функцією від x, $S=S\left(x\right)$, де $x\in[a,b]$, і об'єм тіла обчислюється за формулою

$$V=\int_a^b S\left(x\right)dx\,.$$

2. Обчислення об'єму тіла обертання

Якщо криволінійна трапеція, що обмежена кривою $y=f\left(x\right)$, прямими $x=a$, $x=b$, $y=0$, обертається навколо осі *OX,* то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx\,.$$

Якщо ж фігура обмежена кривими $y=f_1\left(x\right)$ та $y=f_2\left(x\right)$, $\left[0\le f_1\left(x\right)\le f_2\left(x\right)\right]$, прямими $x=a$, $x=b$, і обертається навколо осі OX, тоді об'єм тіла обертання буде

$$V_x=\pi\int_a^b\left[f_2^2\left(x\right)-f_1^2\left(x\right)\right]dx\,.$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі *OX* фігури, що обмежена лініями $y=x^2$, $x=y^2$ (Рис. 3).

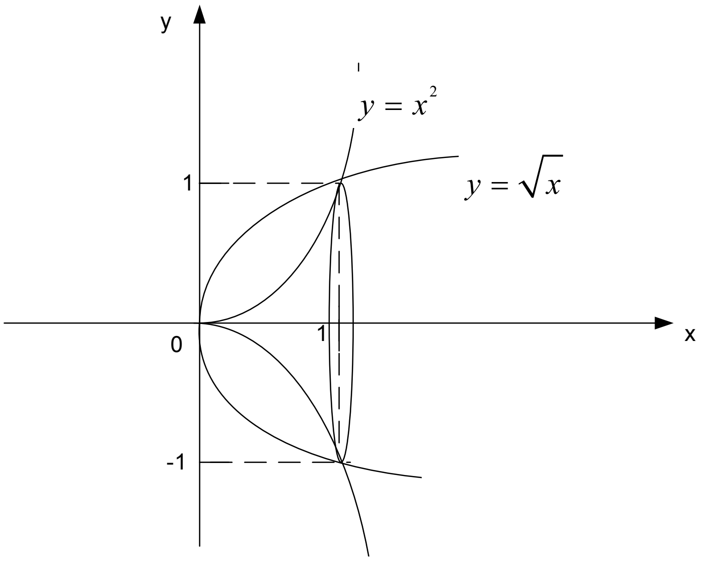

Рис. 3

Розв'язання. Знайдемо точки перетину $x = y^2$; $y = x^2 \Rightarrow y^2 = x^4$.
Тоді $x = x^4$, $x\left(x^3 - 1\right) = 0$; $x\left(x-1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$

$V_x = \pi\int\limits_0^1\left(x - x^4\right)dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \pi\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right] = \frac{3\pi}{10}$ (кубічних одиниць).

Обчислення площі поверхні обертання

Якщо дуга пласкої кривої $y = f\left(x\right)$, $\left(a \le x \le b\right)$ обертається навколо осі OX, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою

$$S_x = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx$$

Якщо крива задана у параметричній формі $x = x\left(t\right)$; $y = y\left(t\right)$,
$\left(t_1 \le t \le t_2\right)$

Тоді $S_x = 2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y\left(t\right)\sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}\,dt$.

Розглянемо приклади обчислення площі поверхонь обертання.

Приклад. $y = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$

Розв'язання. $S_x = 2\pi\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1 + \left(3x^2\right)^2}\,dx = 2\pi\int\limits_0^1\left(9x^4 + 1\right)^{\frac{1}{2}}d\,\frac{x^4}{4} =$

$= \left|x^3dx = d\,\frac{x^4}{4}\right| = \frac{2\pi}{4\cdot 9}\int\limits_0^1\left(9x^4 + 1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(9x^4 + 1\right) = \frac{\pi\cdot 2}{18}\frac{\left(9x^4 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 =$

$$=\frac{\pi}{27}\left[(9+1)^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{\pi}{27}\left[10\sqrt{10}-1\right] \text{ (квадратних одиниць).}$$

Приклад. $x=t-sin\,t$; $y=1-cos\,t$, $0\le t\le 2\pi$.

Розв'язання. $S_x=2\pi\int\limits_0^{2\pi}(1-cos\,t)\sqrt{(1-cos\,t)^2+sin^2 t}\,dx=$

$$=2\pi\int\limits_0^{2\pi}(1-cos\,t)\sqrt{1-2cos\,t+cos^2 t+sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{2\pi}(1-cos\,t)\sqrt{2(1-cos\,t)}\,dt=2\pi\int\limits_0^{2\pi}2\,sin^2\frac{t}{2}\sqrt{2\cdot 2\,sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=2\cdot 8\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(1-cos^2\frac{t}{2}\right)sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2}=-16\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(1-cos^2\frac{t}{2}\right)d\,cos\frac{t}{2}=$$

$$=-16\pi\left[cos\frac{t}{2}-\frac{cos^3\frac{t}{2}}{3}\right]_0^{2\pi}=-16\pi\left[-2+\frac{2}{3}\right]=\frac{64}{3}\pi \text{ (квадратних одиниць).}$$

За допомогою визначеного інтеграла можливо обчислювати статичні моменти, моменти інерції, координати центрів ваги пласких дуг і криволінійних трапецій.

Статичним моментом m_x матеріальної точки, що має масу m відносно осі OX є добуток маси m на відстань до осі. Моментом інерції i_x матеріальної точки масою m відносно осі OX є добуток маси m на квадрат відстані до осі. Відстань до осі OX це ордината точки, відстань до осі OY це абсциса точки. Статичним моментом, моментом інерції сукупності точок є сума моментів точок. Статичні моменти і моменти інерції пласкої кривої $y=f(x)$, $(a\le x\le b)$ обчислюється за формулами

$$M_x=\int\limits_a^b y\,dl;\quad M_y=\int\limits_a^b x\,dl;\quad J_x=\int\limits_a^b y^2 dl;\quad J_y=\int\limits_a^b x^2 dl$$

де $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ диференціал дуги кривої.

Статичні моменти і моменти інерції криволінійної трапеції, що обмежена кривою $y=f(x)$, віссю OX і прямими $x=a$, $x=b$ обчислюються за формулами

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_a^b y\,ds=\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2 dx;\quad M_y=\frac{1}{2}\int\limits_a^b x\,ds=\int\limits_a^b xy\,dx.$$

$$J_x=\frac{1}{3}\int\limits_a^b y^3 dx,\quad J_y=\int\limits_a^b x^2 ds=\int\limits_a^b x^2 y\,dx,$$

де $ds=y\,dx$ диференціал площі криволінійної трапеції.

Координати центру ваги однорідної дуги пласкої кривої $y=f(x)$,

$(a \le x \le b)$ обчислюються за формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{l}\int_a^b x\,dl, \quad \bar{y} = \frac{1}{l}\int_a^b y\,dl,$$

де $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, l – довжина дуги.

Координати центру ваги криволінійної трапеції обчислюються за формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{s}\int_a^b x\,ds = \frac{1}{s}\int_a^b xy\,dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2s}\int_a^b y\,ds = \frac{1}{2s}\int_a^b y^2\,dx,$$

де $ds = y\,dx$, s – площа фігури.

Приклад. Знайти M_x, J_x для кривої $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$.

Розв'язання. $M_x = \int_{-a}^{a} y\,dl$, де $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, $y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Тоді $M_x = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = a\int_{-a}^{a} dx = 2a^2$.

Знайдемо J_x.

$$J_x = \int_{-a}^{a} y^2\,dl = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = a\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2a\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ x = 0,\ t = 0 \\ x = a,\ t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 2a\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin t}\; a\cos t\,dt =$$

$$= a^3\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = a^3\left(t + \sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{2}.$$

Завдання для самостійного виконання

1. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$
2. $\int_0^{\pi/6} \frac{cos^2 2x}{cos\,x}\,dx$
3. $\int_{-1}^{1} x\ arctg\ x\ dx$
4. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}$
5. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$
6. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2\right)\left(x^2+9\right)}$
7. $\rho = a\,cos\,\varphi$, $\rho = 2a\,cos\,\varphi$ $\quad S - ?$
8. $y = 1 - ln\,cos\,x$ від $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$ $\quad L -$ **?**

9. $y=\frac{16}{x^2+4}$, $y=\frac{x^2}{2}$; $V_x-?$ 10. $y=x^3$ від $x=0$ до $x=\frac{1}{2}$. $S_x-?$

Змістовий модуль 2.2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Диференціальні рівняння першого порядку

Розв’язуючи задачі математики, фізики, та інших наук ми користуємося рівняннями, що зв’язують незалежну змінну, функцію та її похідні. Такі рівняння мають назву диференціальних. Уперше цей термін застосував німецький математик Г. Лейбниць у 1676 г.

Розв’язком диференціального рівняння є функція, яка обертає його у тотожність.

Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння має назву звичайного, якщо ж від двох та більше – диференціальним рівнянням у частинних похідних. Далі будемо розглядати звичайні диференціальні рівняння.

Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння зветься порядком цього рівняння.

Наприклад:

1) $y'+\frac{2}{x}y=y^2$ – звичайне диференціальне рівняння першого порядку;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-xy\frac{dy}{dx}=x^2$ – звичайне диференціальне рівняння другого порядку;

3) $F(x,y,y')=0$ – загальний вигляд звичайного диференціального рівняння першого порядку.

Загальним розв’язком звичайного диференціального рівняння першого порядку є функція $y=\varphi(x,C)$, де C – довільна стала.

Графіком загального розв’язку є сімейство інтегральних кривих, що мають вид $y=\varphi(x,C)$. Частим розв’язком є функція $y=\varphi(x,C_0)$, яка отримана з загального розв’язку при виконанні, так званих, початкових умов $y=y_0$, $x=x_0$, або так $y\big|_{x=x_0}=y_0$.

З геометричної точки зору частинний розв’язок – це інтегральна крива, яка проходить крізь точку $M_0(x_0,y_0)$. Диференціальне рівняння разом з початковими умовами має назву задачі Коші. Розв’язання диференціального рівняння зветься його інтегруванням.

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Розглянемо рівняння $y' = \dfrac{f_1(x)\varphi_1(y)}{f_2(x)\varphi_2(y)}$.

Вважаючи що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f_1(x)\varphi_1(y)}{f_2(x)\varphi_2(y)}$.

Якщо жодна з функцій не дорівнює тотожньо нулю, відокремимо змінні. Функції, що залежать від y і dy залишимо у лівій частині рівності, а функції, що залежать від x і dx перенесемо у праву.

$$\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx.$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності, отримаємо загальний розв'язок або загальний інтеграл

$$\int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy - \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = C.$$

Приклад. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y' = \dfrac{y\cos x}{\ln y}$.

Розв'язання. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{\ln y}$; $\dfrac{\ln y}{y}dy = \cos x dx$

$\int \ln y \dfrac{1}{y}dy = \int \cos x dx$; $\dfrac{1}{y}dy = d\ln y$, тоді

$\int \ln y d\ln y = \int \cos x dx$; $\dfrac{\ln^2 y}{2} = \sin x + C$.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' = e^{x+y}$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$.

Розв'язання. $\dfrac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$; $\dfrac{dy}{e^y} = e^x dx$.

$\int e^{-y}dy = \int e^x dx$; $-e^{-y} = e^x + C$.

Для знаходження C використаємо початкові умови $-e^0 = e^0 + C$; $C = -2$;

$e^x + e^{-y} = 2$; $\dfrac{1}{e^y} = 2 - e^x$; $e^y = \dfrac{1}{2 - e^x}$;

$\ln e^y = \ln\dfrac{1}{\left|2 - e^x\right|}$; $y = -\ln\left|2 - e^x\right|$.

2. Однорідні диференціальні рівняння

Рівняння виду $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де $P(x,y)$, $Q(x,y)$ однорідні функції одного і того ж виміру мають назву однорідних.

Функція $f(x,y)$ має назву однорідної, виміру *k,* якщо $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$, де λ − числовий множник.

Вимір однорідної функції це сукупний показник степеня x і y у кожному її додатку. Однорідне диференціальне рівняння зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними заміною $y = tx$, де t є функція від x. Тоді $dy = tdx + xdt$.

Приклад. $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$. Знайти загальний розв'язок.

Розв'язання. $y = tx$; $dy = tdx + xdt$;

$$(x+tx)dx + (tx-x)(tdx+xdt) = 0;$$

$$xdx + \cancel{txdx} + t^2xdx + tx^2dt - \cancel{xtdx} - x^2dt = 0;$$

$$x(1+t^2)dx = x^2(1-t)dt;$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1-t}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{1+t^2};$$

$$ln\, x = arctgt - \frac{1}{2}ln(1+t^2) + C;\ t = \frac{y}{x};$$

$$ln\, x = arctg\frac{y}{x} - \frac{1}{2}ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) + C.$$

Однорідне диференціальне рівняння можна звести до вигляду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

У такому вигляді воно матиме назву диференціального рівняння з однорідною правою частиною.

Розв'язок здійснюється за тією ж підстановкою $y = tx$; $y' = t'x + t$.

Приклад. Розв'язати задачу Коші, перетворивши рівняння у вигляд $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$(xy + 4x^2 + y^2)dx - x^2dy = 0$$

$$y(1) = 2$$

Розв'язання. Поділимо рівняння на x^2dx.

$$\frac{xy+4x^2+y^2}{x^2} = \frac{dy}{dx};\ y' = \frac{y}{x} + 4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2;\ y = tx;$$

$y' = t'x + t$. $\frac{y}{x} = t$. Тоді

$$t'x + \cancel{t} = 4 + \cancel{t} + t^2;\ \frac{dt}{dx}\cdot x = t^2 + 4;$$

Відокремимо змінні $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t^2+2^2}$ і проінтегруємо

$$ln\, x = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C;\ t = \frac{y}{x};$$

$ln\,x=\frac{1}{2}arctg\frac{y}{2x}+C$; Використовуючи початкові умови знайдемо частинний розв'язок

$ln1=\frac{1}{2}arctg\frac{2}{2\cdot 1}+C$; $0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+C$; $C=-\frac{\pi}{8}$;

$arctg\frac{y}{2x}=2ln|x|+\frac{\pi}{4}$.

3. Лінійні диференціальні рівняння

Лінійні диференціальні рівняння мають вигляд $y'+P(x)y=Q(x)$,

де y' та y входять у рівняння у першому ступені не перемножуючись одне з одним, $P(x)$, $Q(x)$ – функції, що залежать від x. Розглянемо також нелінійне рівняння Бернуллі $y'+P(x)y=Q(x)y^m$; $(m\neq 0;1)$, що може бути зведено до лінійного завдяки заміні $z=y^{1-m}$. Тоді $\frac{1}{1-m}z'+P(x)z=Q(x)$.

Ці рівняння можуть бути розв'язані за допомогою метода варіації довільної сталої або за методом Бернуллі.

Розглянемо метод Бернуллі. Нехай $U=U(x)$; $V=V(x)$ – функції, що залежать від x. Оберемо $y=U\cdot V$ і підставимо у рівняння $y'+P(x)y=Q(x)$.

Отримаємо $U'V+UV'+P(x)U\cdot V=Q(x)$. Згрупуємо другий та третій доданки $U'V+U\left[V'+P(x)V\right]=Q(x)$

Оберемо функцію V таким чином, щоб вираз у квадратних дужках дорівнював нулю. При цьому зауважимо, що функція U залишиться довільною.

Рівняння $V'+P(x)V=0$ є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Тоді $\frac{dV}{dx}=-P(x)V$; $\frac{dV}{V}=-P(x)dx$.

Проінтегрувавши отримаємо $lnV=-\int P(x)dx+\underset{0}{\cancel{C}}$. Оберемо $C=0$. Нам достатньо будь-якого частинного розв'язку, що оберне вираз у квадратних дужках у нуль.

Таким чином $V=e^{-\int p(x)dx}$. Тоді $\frac{dU}{dx}e^{-\int p(x)dx}=Q(x)$; $\frac{dU}{dx}e^{\int p(x)dx}\;\; Q(x)dx$.

Це також диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, інтегруючи яке отримаємо

$$U=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Тоді $y=U\cdot V=\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]e^{-\int p(x)dx}$.

Розглянемо приклади.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' - \frac{1}{x} y = x^3$.

Розв'язання. Застосуємо метод Бернуллі.

$$y = UV;\ y' = U'V + UV';$$

$$U'V + UV' - \frac{1}{x} U \cdot V = x^3;$$

$$U'V + U\left[V' - \frac{1}{x}V\right] = x^3;$$

$$V' - \frac{1}{x}V = 0;\ \frac{dV}{dx} = \frac{V}{x};\ \int \frac{dV}{V} = \int \frac{dx}{x};$$

$$lnV = ln\,x + \underset{0}{\underset{/\!/}{\cancel{C}}}\ \Big| \Rightarrow V = x$$

$$\frac{dU}{dx} \cdot x + U \cdot 0 = x^3;\ \int dU = \int x^2 dx;\ U = \frac{x^3}{3} + C$$

Тоді $y = U \cdot V = x\left(\frac{x^3}{3} + C\right)$ – загальний розв'язок.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $(x-2)y' - y = y^2$ з початковими умовами $y(4) = 1$.

Розв'язання. Це рівняння Бернуллі:

$$y' - \frac{1}{x-2} y = \frac{y^2}{x-2}.$$

Застосуємо метод Бернуллі: $y = UV$; $y' = U'V + UV'$.

Тоді $U'V + UV' - \frac{1}{x-2} U \cdot V = \frac{U^2V^2}{x-2}$

$U'V + U\left[V' - \frac{V}{x-2}\right] = \frac{U^2V^2}{x-2}$.

$\frac{dV}{dx} = \frac{V}{x-2}$; $\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x-2}$; $ln|V| = ln|x-2|$; $V = x-2$;

тоді $\frac{dU}{dx}(x-2) = \frac{U^2(x-2)^2}{(x-2)}$;

$\int U^{-2} dU = \int dx$; $-\frac{1}{U} = x + C$; $U = -\frac{1}{x+C}$; $y = UV = -\frac{x-2}{x+C}$.

Знайдемо C. $1 = -\frac{4-2}{4+C}$; $4 + C = -2$; $C = -6$. Тоді $y = \frac{2-x}{x-6}$;

Інколи, для визначення типу диференціального рівняння, доцільно розглянути x як функцію від y.

Приклад. Знайти загальний розв'язок $y'(x + y^2) = y$.

Розв'язання. Якщо $x = x(y)$, то $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y}$. Тоді

$$\frac{1}{x'}\left(x + y^2\right) = y;\ yx' = x + y^2;\ x' - \frac{1}{y}x = y.$$

Тобто маємо $x' + P(y)x = Q(y)$.

Це лінійне диференціальне рівняння відносно x та x'.

Застосуємо метод Бернуллі $x = U \cdot V$, де $U = U(y)$; $V = V(y)$.

$x' = U'V + UV'$. $U'V + UV' - \frac{1}{y}U \cdot V = y$;

$U'V + U\left[V' - \frac{1}{y}V\right] = y$; $\frac{dV}{dy} - \frac{1}{y}V = 0$; $\int\frac{dV}{V} = \int\frac{dy}{y}$ $V = y$;

Тоді $\frac{dU}{dy} \cdot y = y$; $\int dU = \int dy$;

$U = y + C$; $x = U \cdot V = y(y + C)$.

2. Диференціальні рівняння вищих порядків

Розглянемо наступні типи рівнянь

a) $y^{(n)} = f(x)$

b) $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$, не містить шуканої функції

c) $F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$, не містить незалежної змінної.

a) $y^{(n)} = f(x)$. Такі рівняння розв'язуються шляхом n-кратного інтегрування.

Приклад. $y''' = sin\,x$. Розв'язати рівняння при початкових умовах $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = 2$.

Розв'язання. $y''' = \frac{d}{dx}(y'') = sin\,x$.

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними для y''

$$\int d(y'') = \int sin\,xdx;\ y'' = -cos\,x + C_1$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = -cos\,x + C.$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними для y'

$\int d(y') = \int(-cos\,x + C_1)dx$; $y' = -sin\,x + C_1x + C_2$.

Тоді $\int dy = \int(-sin\,x + C_1x + C_2)dx$

$y = cos\,x + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_3$.

Для пошуку C_1, C_2, C_3 застосуємо початкові умови

$y(0) = 0$; $0 = cos\,0 + C_1\cdot 0 + C_2\cdot 0 + C_3$; $C_3 = -1$;

$y'(0) = 1$; $1 = -0 + C_1 0 + C_2$; $C_2 = 1$;

$y''(0) = 2$; $2 = -cos\,0 + C_1$; $C_1 = 3$

Тоді $y = cos\,x + \dfrac{3}{2}x^2 + x - 1$.

b) $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$. Не містить шуканої функції.

Порядок цього рівняння може бути знижений на k одиниць, якщо зробити заміну $z = y^{(k)}$. Тоді: $F\left(x, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0$. Тобто нижчу похідну позначимо новою функцією Z.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = \dfrac{y'}{x} + 1$.

Розв'язання. Якщо $y' = z$. то $y'' = z'$. Тоді $z' = \dfrac{z}{x} + 1$.

Це рівняння має вигляд $z' = f\left(\dfrac{z}{x}\right)$. Зробимо підстановку

$z = tx$; $z' = t'x + t$. Тоді $t'x + \cancel{t} = \cancel{t} + 1$; $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$; $dt = \dfrac{dx}{x}$

$\int dt = \int \dfrac{dx}{x}$; $t = ln\,x + C_1$; $\dfrac{z}{x} = ln\,x + C_1$

$z = x\,ln\,x + C_1x$; $y'\,x\,ln\,x + C_1x$.

Відокремимо змінні $dy = \left(x\,ln\,x + C_1x\right)dx$

$y = \int x\,ln\,x dx + C_1\int x dx$.

Проінтегруємо частинами

$$\begin{vmatrix} ln\,x = U \\ xdx = dV \\ dU = \dfrac{1}{x}dx \\ V = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix}.$$

Тоді $y = \dfrac{x^2}{2}ln\,x - \int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx + C_1\int x dx = \dfrac{x^2}{2}ln\,x - \dfrac{x^2}{4} + C_1\dfrac{x^2}{4} + C_2$.

c) $F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$. Це рівняння не містить незалежної змінної.

За незалежну змінну приймемо саму функцію. Тоді $y' = z$; $y'' = z\cdot z'$.

$y''=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=z'\cdot z$, за правилом диференціювання складної функції.

$$y'''=z\left[z\frac{d^2z}{dy^2}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]=z\left[zz''+\left(z'\right)^2\right]$$

Зауваження. Нова функція z залежить від y

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $yy''=\left(y'\right)^2$; $y(0)=1$; $y(0)=2$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $y'=z$. Тоді $y''=z'z$. Отримаємо $yz'z=z^2$ або $y\frac{dz}{dy}=z$.

Відокремимо змінні і проінтегруємо

$$\frac{dz}{z}=\frac{dy}{y};\quad \int\frac{dz}{z}=\int\frac{dy}{y};$$

$ln\,z=ln\,y+ln\,C_1$.

Довільну сталу надамо у вигляді логарифму.

Тоді $z=C_1y$ або $\frac{dy}{dx}=C_1y$. Інтегруємо

$$\frac{dy}{y}=C_1dx;\ \int\frac{dy}{y}=\int C_1dx;\ ln\,y=C_1x+C_2$$

$$y=e^{C_1x+C_2}$$

Використаємо початкові умови для пошуку C_1 і C_2 $y=e^{C_1x+C_2}$; $y(0)=1$;

$$y'=C_1e^{C_1x+C_2};$$

$y'(0)=2$;

$1=e^{C_1\cdot0+C_2}$; $e^{C_2}=1$; $C_2=0$; $2=C_1\ e^{C_1\cdot0}$; $C_1=2$, тоді $y=e^{2x}$.

3. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Рівняння, що має вигляд $a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)$, де a_0, a_1, a_2 – дійсні числа і y, y', y'' присутні у рівнянні у першому ступеню, не перемножуючись одне з одним має назву лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР), якщо ж $f(x)=0$ – то лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР).

Структура загального розв'язку ЛНДР має вигляд

$$y=y_0+\overline{y}\text{, де}$$

y_0 – загальний розв'язок ЛОДР,

$\overline{y}$ – частинний розв'язок ЛНДР

Загальний розв'язок ЛОДР (y_0) залежить від виду коренів характеристичного рівняння $a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$, де ступінь числа k відповідає порядку похідної. Корені знайдемо за формулою

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}.$$

a) Кожному дійсному простому (не кратному) кореню k у загальному розв’язку відповідає доданок виду Ce^{kx}, тобто

$$y_0 = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

b) Кожному дійсному кратному кореню $k_1 = k_2 = k$ у загальному розв’язку відповідає доданок $\left(C_1 + xC_2\right)e^{kx}$, тобто $y_0 = \left(C_1 + xC_2\right)e^{kx}$.

c) Кожній парі комплексно-спряжених коренів виду $k = \alpha \pm i\beta$ у загальному розв’язку відповідає доданок $e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$, тобто $y_0 = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок ЛОДР $y'' - y' - 2y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - k - 2 = 0$.

$k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+18}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$, тоді $y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок ЛОДР $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$. $\left(k_1 - 3\right)^2 = 0$; $k_1 = k_2 = 3$. Тоді $y_0 = \left(C_1 + xC_2\right)e^{3x}$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок ЛОДР $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 2 = 0$

$k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm i$.

Тоді $y_0 = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.

Приклад. Знайти частинний розв’язок ЛОДР $y'' + y' - 2y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$.

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 + k - 2 = 0$; $k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1e^{x} + C_2e^{-2x}; \\ y_0' &= C_1e^{x} - 2C_2e^{-2x}; \end{aligned} \quad \begin{cases} 0 = C_1 + C_2; & C_2 = -C_1; \\ 3 = C_1 - 2C_2; & C_1 = 1 \end{cases}$$

$C_2 = -1$, тоді $y_0 = e^{x} - e^{-2x}$

Для пошуку частинного розв’язку ЛНДР $\overline{y}$ застосовується метод варіації довільної сталої або, якщо права частина $f(x)$ має вигляд $f\left(x\right) = e^{\alpha x}\left(P_n\left(x\right)\cos \beta x + Q_m\left(x\right)\sin \beta x\right)$ – метод підбору частинного розв’язку (метод невизначених коефіцієнтів).

У цьому випадку $\overline{y}$ шукаємо у вигляді

$$\overline{y} = x^r e^{\alpha x} \left(P_l(x) cos\, \beta x + Q_l(x) sin\, \beta x \right), \text{ де}$$

$l = max\{m, n\}$, r – кратність кореня $\alpha + i\beta$ у характеристичному рівнянні.

Якщо у правій частині присутні лише $cos\, \beta x$ або лише $sin\, \beta x$, то у частинному розв'язку присутні як $cos\, \beta x$ так і $sin\, \beta x$.

Зауважимо, що $P_0(x) = A$; $P_1(x) = Ax + B$; $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ – многочлени ступенів, відповідно нуль, один, два з невизначеними коефіцієнтами.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів підставимо $\overline{y}$ у ЛНДР і порівняємо коефіцієнти при однакових ступенях x, $sin\, \beta x$, $cos\, \beta x$.

Якщо права частина ЛНДР має вигляд $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$ за вище наведеною схемою.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + y = x^2$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $y'' + 2y' + y = 0$

$k^2 + 2k + 1 = 0$; $(k+1)^2 = 0$; $k_1 = k_2 = -1$;

$y_0 = (c_1 + xC_2)e^{-x}$; $y = y_0 + \overline{y}$.

$f(x) = x^2$. Тут $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $P_2(x) = 1 \cdot x^2 + 0x + 0$.

$\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ – не є коренем характеристичного рівняння. Тоді $\overline{y} = x^{\circ} e^{\circ x} \left[\left(Ax^2 + Bx + C \right) cos\, 0x + \left(Dx^2 + Ex + F \right) sin\, 0x \right] =$

$= Ax^2 + Bx + C;$

Підставимо $\overline{y}$ у рівняння та порівняємо коефіцієнти у лівій і правій частинах при однакових степенях x.

1	$\overline{y} = Ax^2 + Bx + C$
2	$\overline{y}' = 2Ax + B$
1	$\overline{y}'' = 2A$

$$Ax^2 + Bx + C + 4Ax + 2B + 2A = 1x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A = 1 \\ x & B + 4A = 0;\ \ B = -4 \\ x^{\circ} & C + 2B + 2A = 0;\ \ C = -2A - 2B = -2 + 8 = 6; \end{array}$$

тоді $\overline{y} = x^2 - 4x + 6$ і загальний розв'язок матиме вигляд: $y = y_0 + \overline{y} = (C_1 + xC_2)e^{-x} + x^2 - 4x + 6$.

Приклад. Розв'язати задачу Коші $y'' + 4y' + 3y = e^{-x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння для $y''+4y'+3y=0$.

$k^2+4k+3=0$; $k_{1,2}=\dfrac{-4\pm 2}{2}=\begin{cases}-1\\-3\end{cases}$

$y_0=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$, де $\alpha_1=-1$; $\alpha_2=-3$.

$\beta_1=0$; $\beta_2=0$.

У правій частині $\alpha=-1$; $\beta=0$.

Таким чином $\overline{y}=Axe^{-x}$. Степень x дорівнює одиниці, так як $\alpha=-1$ є коренем характеристичного рівняння кратності один. Підставимо $\overline{y}$ у рівняння і порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах

$$\begin{array}{c|l}
3 & \overline{y}=Ax\cdot \overline{e}^{-x} \\
4 & \overline{y}'=Ae^{-x}-Axe^{-x} \\
1 & \overline{y}''=-Ae^{-x}-Ae^{-x}+Axe^{-x} \\
\hline
 & 3\cancel{Axe^{-x}}+4Ae^{-x}-4\cancel{Axe^{-x}}-2Ae^{-x}+\cancel{Axe^{-x}}=4e^{-x}
\end{array}$$

$$2A=4;\ A=2$$

Тоді $y=y_0+\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+2xe^{-x}$;

Знайдемо C_1 і C_2 з початкових умов $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+2xe^{-x}$; $0=C_1+C_2$;
$y'=-C_1e^{-x}-3C_2e^{-3x}+2e^{-x}-2xe^{-x}$; $1=-C_1-3C_2+2$

$$\begin{cases}C_1=-C_2;\\ C_1+3C_2=1;\ \ 2C_2=1;\ \ C_2=\dfrac{1}{2};\ \ C_1=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Остаточно: $y=-\dfrac{1}{2}e^{-x}+\dfrac{1}{2}e^{-3x}+2xe^{-x}$;

Приклад. Розв'язати задачу Коші

$y''+y=x\cos x$

$y(0)=1$

$y'(0)=\dfrac{5}{4}$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $y''+y=0$; $k^2+1=0$

$k^2=-1$; $k_{1,2}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$; $\alpha=0$; $\beta=1$; $y_0=C_1\cos x+C_2\sin x$; $f(x)=x\cdot\cos x$. У частинному розв'язку мають бути присутні як «косинуси» так і «синуси».

$x=0+1x$. Тоді $\overline{y}=x^2\left[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right]e^{0x}$.

Для правої частини $f(x)=x\cos x$; $\alpha=0$; $\beta=1$: $\alpha+\beta i=0+1i$ є коренем кратності «один» у характеристичному рівнянні, тому $r=1$.

Тоді $\overline{y}=x\left[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right]$.

Підставимо $\overline{y}$ у вихідне рівняння і порівняємо коефіцієнти у лівій і правій частині при однакових членах

1	$\bar{y}=\left(Ax^2+Bx\right)\cos x+\left(Cx^2+Dx\right)\sin x$
0	$\bar{y}'=\left(2Ax+B\right)\cos x-\left(Ax^2+Bx\right)\sin x+\left(2Cx+D\right)\sin x+\left(Cx^2+Dx\right)\cos x$
1	$\bar{y}''=2A\cos x-\left(2Ax+B\right)\sin x-\left(2Ax+B\right)\sin x-\left(Ax^2+Bx\right)\cos x+$ $+2C\sin x+\left(2C+D\right)\cos x+\left(2Cx+D\right)\cos x-\left(Cx^2+Dx\right)\sin x$

	x^2	$A-A=0$
$\cos x$	x^1	$B-B+2C+2C=1;\ \ 4C=1;\ \ C=\dfrac{1}{4};$
	x^0	$2A+D+D=0;\ \ A+D=0$
	x^2	$C-C=0$
$\sin x$	x^1	$D-2A-2A-D=0;\ \ A=0;$
	x^0	$-B-B+2C=0;\ \ -B+C=0$

$A=0;\ \ B=C=\dfrac{1}{4};\ \ D=0;\ \ \bar{y}=x\left(\dfrac{1}{4}\cos x+\dfrac{1}{4}x\sin x\right)$

Знайдемо C_1 і C_2 з початкових умов

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{4}\cos x+\frac{x^2}{4}\sin x$$

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{4}\cos x-\frac{x}{4}\sin x+\frac{x}{2}\sin x+\frac{x^2}{4}\cos x$$

$$1=C_1+0\cdot C_2+0+0;\ \ C_1=1;$$

$$\frac{5}{4}=-0+C_2+\frac{1}{4}-0+0+0;\ \ C_2=1;$$

Тоді розв’язок задачі Коші є $y=\cos x+\sin x+\dfrac{x}{4}\cos x+\dfrac{x^2}{4}\sin x$.

4. Системи диференціальних рівнянь

У багатьох науково-технічних задачах буває потрібно знайти одразу декілька функцій, що пов’язані диференціальними рівняннями які утворюють систему.

Система диференціальних рівнянь це сукупність рівнянь, кожне з яких включає незалежну змінну, шукані функції та їх похідні.

Розглянемо найпростішу нормальну систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(t,x,y)\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=f_2(t,x,y)\end{cases},$$

де t – незалежна змінна, $x = x(t)$, $y = y(t)$. Якщо функції f_1 і f_2 лінійні відносно x і y, то система має назву лінійної.

Іноді нормальну систему вдається звести до одного рівняння другого порядку, що включає одну функцію. Для цього треба продиференціювати одне з рівнянь і підставити у інше, виключивши одну з невідомих функцій. Цей метод має назву метода виключення.

У деяких випадках, комбінуючи рівняння системи, після нескладних перетворень вдається отримати, так звані, інтегровані комбінації, які легко інтегрувати.

Розглянемо приклади.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1 & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1 & (2) \end{cases}$$

Наступна дія (1) – (2): $x' - y' = y - x$, або $(x - y)' = -(x - y)$.

Зробимо підстановку $p = x - y$, тоді $p' + p = 0$, або $\dfrac{dp}{dt} = -p$, $\dfrac{dp}{p} = -t$.

Інтегруємо: $\int \dfrac{dp}{p} = -\int dt$, $\ln p - \ln C_1 = -t$, $p = C_1 e^{-t}$.

Складемо другу інтегровану комбінацію (1) + (2): $x' + y' = x + y + 2$.

Зробимо підстановку $z = x + y$, тоді $z' = z + 2$, або $\dfrac{dz}{z+2} = dt$, $\int \dfrac{dz}{z+2} = \int dt$,

$\ln(z+2) - \ln C_2 = t$, $\dfrac{z+2}{C_2} = e^t$, $z + 2 = C_2 e^t$. Звідки $x + y = C_2 e^t - 2$.

Таким чином $x - y = C_1 e^{-t}$, $x + y = C_2 e^t - 2$.

Звідки $x = \dfrac{1}{2} C_1 e^{-t} + \dfrac{1}{2} C_2 e^t - 1$,

$$y = \frac{1}{2} C_2 e^t - \frac{1}{2} C_1 e^{-t} - 1$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y & (1) \\ y' = 2x - 3y & (2) \end{cases}$$

Розв'язання. Із (1): $x'' = 4x' - 3y'$

Підставимо y' із (2): $x'' = 4x' - 3(2x - 3y)$ або $x'' = 4x' + 6x = 9y$

Із (1) $3y = 4x - x'$, $9y = 12x - 3x'$, тоді

$x'' = 4x' + 6x = 12x - 3x'$, або $x'' = x' + 6x = 0$.

Складемо характеристичне рівняння

$k^2 - k - 6 = 0$, звідки $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$,

тоді $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$.

Знайдемо похідну $x' = 3C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-2t}$, тоді

$$y = \frac{4x - x'}{3} = \frac{4C_1 e^{3t} + 4C_2 e^{-2t} - 3C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-2t}}{3} = \frac{1}{3} C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-2t}$$

Таким чином, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t},$$

$$y = \frac{1}{3} C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}.$$

Завдання для самостійного розв'язку

Розв'язати рівняння

1. $yy' + \dfrac{x}{\sin y} = 0$ 2. $y' = xe^{y}$.

3. $xydy - \left(y^2 + 2x^2\right)dx = 0$.

4. $y' = \dfrac{y}{x} - \sin\dfrac{y}{x}$.

5. $y' - yctgx = \cos ecx$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

6. $(y^4 + 2x)y' = y,\ \ y(1) = 1$.

7. $y'' = xe^{-x},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2$.

8. $2xy'''y' = (y')^2 - 4$.

9. $y''' = y'e^{y},\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$.

10. $y'' - y = x\sin x$.

11. $y'' + 9y = \cos 3x,\ \ y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

12. $y'' - 6y' + 25y = \sin x$.

Змістовий модуль 2.3
ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

1. Область визначення функції

Розглянемо дві не порожні множини D і U. Якщо кожній парі елементів x, y з множини D за деяким правилом (законом) поставлено у відповідність один і тільки один елемент z з множини U, то кажуть, що на множині D задано відображення або функцію, тобто $z = f(x, y)$.

Цей факт можливо записати так

$$f : D \to U \text{ або } D \xrightarrow{f} U$$

де D – область визначення функції;

U – область значень функції.

Областю визначення функції може бути площина XOY, або її частини, включаючи межу або ні.

Для знаходження області визначення функції кількох змінних використовують загально-математичні закони: так вираз під коренем парного ступеня має бути не від'ємним, вираз під знаком логарифму – додатнім, знаменник функції не має дорівнювати нулю і таке інше.

Лініями рівня функції $z = f(x, y)$ звуть лінії площини XOY, значення функції над якими стале $f(x, y) = C$.

Найпростіший приклад це лінії однакових висот гір на географічній мапі. Поверхню рівня функції трьох незалежних змінних $U = f\left(x, y, z\right)$ зветься поверхня, значення функції на якій стале $C = f\left(x, y, z\right)$.

Приклад. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. $R^2 - x^2 - y^2 \geq 0$; $x^2 + y^2 \leq R^2$

це коло радіусу R, включаючи межу (Рис. 4).

Приклад. Знайти область визначення функції $z = ln\left(R^2 - x^2 - y^2\right)$.

Розв'язання. $R^2 - x^2 - y^2 > 0$; $x^2 + y^2 < R^2$

це внутрішня частина кола радіусу R (Рис. 5).

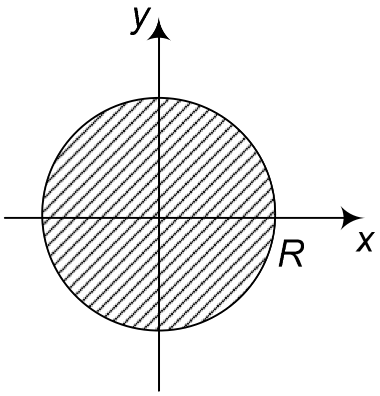

Рис. 4

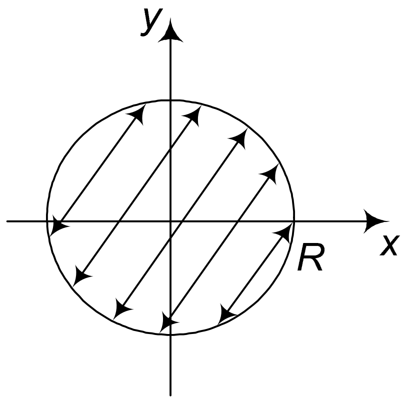

Рис. 5

Приклад. Знайти область визначення функції $z = arcsin\left(x - y\right)$.

Розв'язання. Область визначення арксинус $\left[-1;1\right]$.

Тоді $-1 \le x - y \le 1$; $x - y \le 1$; $y \ge x - 1$; $x - y \ge -1$; $y \le x + 1$ (Рис. 6).

Приклад. Знайти лінії рівняння функції $z = x - y$.

Розв'язання. $x - y = C$; $y = x - C$ (Рис. 7).

Над кожною з цих ліній функція стала.

Приклад. Знайти поверхні рівня функції $U = x^2 + y^2 + z^2$.

Розв'язання. $C = x^2 + y^2 + z^2$, $C \ge 0$;

Це система концентричних сфер із радіусом $\sqrt{C}$.

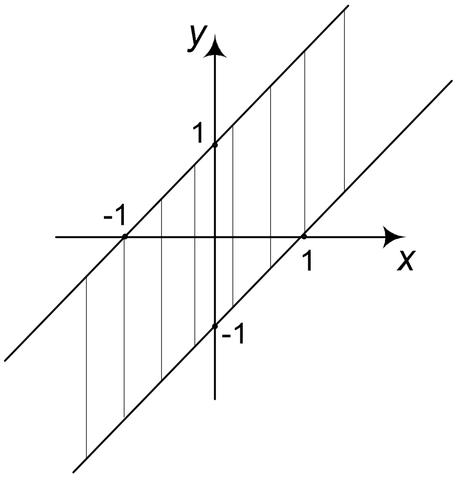

Рис. 6

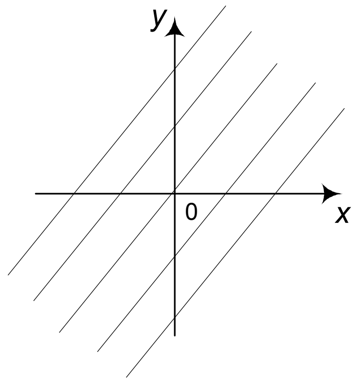

Рис. 7

2. Частинні похідні. Диференціал

Частинна похідна від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній x обчислюється за формулою $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}$, при цьому змінна y залишається сталою. Частинна похідна від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній y обчислюється за формулою $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}$, при цьому змінна x залишається сталою.

При обчисленні частинних похідних ми користуємося формулами й правилами диференціювання функції однієї незалежної змінної.

Приклад. Обчислити $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ якщо $z = arctg\frac{x^2 + 1}{y}$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2 + 1}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x = \frac{2xy}{y^2 + \left(x^2 + 1\right)^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x^2+1}{y}\right)^2}\cdot\left(x^2+1\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{x^2+1}{y^2+\left(x^2+1\right)^2}.$$

Частинні похідні другого порядку це частинні похідні від частинних похідних першого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

За цими ж правилами ми маємо змогу обчислити частинні похідні більш високих порядків.

Зауважимо, що мішані частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ від неперервних функцій дорівнюють одне одному.

Приклад. Довести, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, якщо $z=\left(x^2+1\right)\left(y^3-1\right)$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y^3-1\right)2x$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2\left(x^2+1\right)$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\cdot 3y^2=6xy^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=3y^2\cdot 2x=6xy^2$. Що й треба було довести.

Приклад. Перевірити, що $z=ln\left(y^2-x^2\right)^x$ задовольняє рівнянню

$$x\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zy}{x}.$$

Розв'язання. Перетворимо функцію $z=ln\left(y^2-x^2\right)^x=x\cdot ln\left(y^2-x^2\right)$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1\cdot ln\left(y^2-x^2\right)+x\cdot\frac{(-2)x}{y^2-x^2}=ln\left(y^2-x^2\right)-\frac{-2x^2}{y^2-x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2-x^2}\cdot 2y=\frac{2xy}{y^2-x^2}.$$

Підставимо у рівняння

$$x\cdot\frac{2xy}{y^2-x^2}+y\,ln\left(y^2-x^2\right)-\frac{2x^2y}{y^2-x^2}=\frac{y}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,ln\left(y^2-x^2\right).$$

Що й треба було довести.

Для обчислення похідної від складених функцій застосуємо наступні формули. Якщо $z=f\left(x,y\right)$, де $x=\varphi\left(t\right)$; $y=\psi\left(t\right)$ і $f\left(x,y\right)$, $\varphi\left(t\right)$, $\psi\left(t\right)$ мають похідні, то

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial\psi}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Якщо $z = f(x,y)$ і $y = \varphi(x)$, то $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x}$.

Якщо $z = f(x,y)$, де $x = \varphi(\xi,\eta)$; $y = \psi(\xi,\eta)$,

то $\dfrac{\partial z}{\partial \xi} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \eta}$.

Використовуючи ці формули отримаємо формули для похідних функцій, що задані неявно.

Якщо $y = y(x)$ і $F(x,y) = 0$, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{і} \quad y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}; \quad \text{якщо} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Якщо $z = \varphi(x,y)$ і $F(x,y,z) = 0$, то $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Приклад. Обчислити $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z = ln\left(x^2 + y^2\right)$, $x = r\,cos\,t$, $y = r\,sin\,t$.

Розв'язання. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \cdot r\left(-sin\,t\right) + \dfrac{2y}{x^2 + y^2} r\,cos\,t =$

$$= \frac{2r}{x^2 + y^2}\left(y\,cos\,t - x\,sin\,t\right) = \frac{2r\left(r\,sin\,t\,cos\,t - r\,cos\,t\,sin\,t\right)}{r^2\left(cos^2 t + sin^2 t\right)} =$$

$$= \frac{2\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}}\left(sin\,t\,cos\,t - sin\,t\,cos\,t\right) = 0.$$

Приклад. Обчислити $\dfrac{dy}{dx}$ від неявної функції $x^2 - cos\,y = y$.

Розв'язання $F(x,y) = x^2 - cos\,y - y = 0$; $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\dfrac{2x}{sin\,y - 1} = \dfrac{2x}{1 - sin\,y}$.

Повним приростом функції $z = f(x,y)$ у точці $M(x,y)$ є $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$, де Δx, Δy – прирости аргументів.

Функція $z = f(x,y)$ має назву диференційованої у точці $M(x,y)$, якщо у цій точці повний приріст функції дорівнює

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + O(\rho)$, де $\rho = \sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2}$, $O(\rho)$ – величина більш високого порядку малості, ніж ρ.

Повним диференціалом функції $z = f(x,y)$ є головна частина повного приросту Δz, лінійна відносно Δx і Δy

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

Для функції $U = f(x, y, z)$ $\quad dU = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial z}dz$.

Якщо $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то $\Delta z \approx dz$, що дає формулу для наближених обчислень $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x}_{|M} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}_{|M} \Delta y$.

3. Похідна за напрямом. Градієнт функції

Похідна функція $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{MM}$, це $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{|\overrightarrow{MM_1}| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|\overrightarrow{MM_1}|} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho}$, де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Якщо функція $f(x, y)$ має похідну, то $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$, де α − кут між віссю OX і вектором $\vec{l}$.

Для функції $U = f(x,y,z)$

$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ − напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, $\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\right)$.

Градієнтом функції $U = f(x,y,z)$ у точці $M(x,y,z)$ зветься вектор

$$\overrightarrow{gradU} = \frac{\partial U}{\partial x}_{|M}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}_{|M}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}_{|M}\vec{k} .$$

Градієнт вказує напрям найбільшого зросту функції U у точці M. Тому похідна за напрямом градієнта має найбільше значення

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{\overrightarrow{gradU}} = \left|\overrightarrow{gradU}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} .$$

Градієнт функції і похідна за напрямом вектора $\vec{l}$ зв'язані формулою

$$\frac{\partial U}{\partial l} = Пp_l\, \overrightarrow{gradU} .$$

Приклад. Знайти похідну функції $U = x^3y^2z$ у точці $M(1;1;1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MM_1}$, де $M_1(3;2;3)$, градієнт та модуль градієнта у точці M.

Розв'язання. Складемо вектор $\overrightarrow{MM_1}$ і визначимо його напрямні косинуси.

$\overrightarrow{MM}_1 = (3-1)\vec{i} + (2-1)\vec{j} + (3-1)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$,

$\left|\overrightarrow{MM}_1\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

$\cos\alpha = \dfrac{2}{3}, \quad \cos\beta = \dfrac{1}{3}, \quad \cos\gamma = \dfrac{2}{3}$.

Обчислимо похідну за напрямом $\overrightarrow{MM_1}$ у точці M.

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = 3x^2y^2z$; $\dfrac{\partial U}{\partial x\big|_M} = 3\cdot1\cdot1\cdot1 = 3$; $\dfrac{\partial U}{\partial y} = x^3 2yz$; $\dfrac{\partial U}{\partial y\big|_M} = 1\cdot2\cdot1\cdot1 = 2$;

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^3y^2;\ \frac{\partial U}{\partial z\big|_M} = 1\cdot1 = 1.$$

Тоді $\dfrac{\partial U}{\partial MM_1} = 3\cdot\dfrac{2}{3} + 2\cdot\dfrac{1}{3} + 1\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{3}$; $\overrightarrow{gradU}_{/M} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$;

$\left|\overrightarrow{gradU}_{/M}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$.

Перевіримо, що $\left|\overrightarrow{gradU}_{/M}\right| \geq \dfrac{\partial U}{\partial MM_{1/M}}$: $\sqrt{14} \geq \dfrac{10}{3}$; $9\cdot14 \geq 100$; $126 \geq 100$,

Дійсно, це так.

4. Дотична площина та нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні $F(x,y,z) = 0$ у точці $M(x_0, y_0, z_0)$ є площина, що містить у собі усі дотичні до кривих які проведені на поверхні через точку M.

Нормаль до поверхні це пряма, що проходить через точку дотику M, перпендикулярно до дотичної площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x,y,z) = 0$, то рівняння дотичної площини у точці $M(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі має вигляд $\dfrac{(x - x_0)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \dfrac{(y - y_0)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \dfrac{(z - z_0)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_M}$.

Якщо ж поверхня задана рівнянням $z = f(x,y)$, то рівняння дотичної площини має вигляд $z - z_0 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y - y_0)$, а рівняння нормалі має вигляд $\dfrac{(x-x_0)}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \dfrac{(y-y_0)}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \dfrac{(z-z_0)}{-1}$.

Приклад. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 + y^2 + 1$ у точці $M(1,2,3)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні у точці $M(1,2,3)$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\Big|_M = 2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y\Big|_M = 4.$. Тоді рівняння дотичної площини $z-3=2(x-1)+4(y-2)$, або $2x+4y-z-7=0$.

Рівняння нормалі $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$.

Приклад. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ у точці $M(2;2;3)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні у точці $M(2;2;3)$ до поверхні $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\Big|_M = 4; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y\Big|_M = 4; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z\Big|_M = -6.$$

Тоді рівняння дотичної площини буде $4(x-2)+4(y-2)-6(z-3)=0$,
або $4x+4y-6z+2=0$, $2x+2y-3z+1=0$,
а рівняння нормалі буде мати вигляд

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{x-3}{-6}, \text{ або } \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{x-3}{-3}.$$

5. Екстремум функції двох незалежних змінних. Найбільше та найменше значення функції у замкненій області

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена у деякій області D і точка $M(x_0, y_0) \in D$.

Точка $M(x_0, y_0)$ є точкою максимуму (мінімуму) функції $z = f(x,y)$ якщо існує такий ε-окіл точки $M(x_0, y_0)$, що для кожної точки (x,y), що не дорівнює (x_0, y_0) із цього ε-околу виконується нерівність $f(x,y) < f(x_0, y_0)$, ($f(x,y) > f(x_0, y_0)$).

Значення функції у точці $M(x_0, y_0)$ називається максимумом (мінімумом) функції.

Максимум і мінімум функції звуться її екстремумами.

Необхідні умови екстремуму: якщо у точці $M(x_0, y_0)$ функція $f(x,y)$ має екстремум, то

$$\frac{\partial f\left(x_0 y_0\right)}{\partial x}=0;\ \frac{\partial f\left(x_0 y_0\right)}{\partial y}=0.$$

Така точка зветься стаціонарною. Не кожна стаціонарна точка є точкою екстремуму. Достатні умови екстремуму.

Нехай $M(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка.

Складемо $\Delta = AC - B^2$, де $A=\frac{\partial f^2\left(x_0 y_0\right)}{\partial x^2}$; $C=\frac{\partial^2 f\left(x_0 y_0\right)}{\partial y^2}$; $B=\frac{\partial^2 f\left(x_0 y_0\right)}{\partial x \partial y}$.

Тоді, якщо $\Delta=\begin{cases} >0, \textit{екстремум існує} \begin{cases} \max,\ A<0,(C<0) \\ \min,\ A>0,(C>0) \end{cases} \\ <0, \textit{екстремум не існує} \\ =0\ \textit{невизначеність}\ (\textit{потрібні додаткові дослідження}) \end{cases}$

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z = xy^2(1+x-y)$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки

$$z=xy^2+x^2y^2-xy^3;\ \frac{\partial z}{\partial x}=y^2+2xy^2-y^3=y^2\left(1+2x-y\right)=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2xy+2x^2y-3xy^2=xy\left(2+2x-3y\right)=0$$

$M_1\left(0;0\right)$; $M_2:\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 2x-3y=-2 \end{cases}\ M_2\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Система $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$ має розв'язок, якщо $y=0$ при будь-якому x.

Складемо Δ.

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^2$; $\quad A_{M_1}=0$; $\quad A_{M_2}=\frac{1}{2}$;

$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2y+4xy-3y^2$; $\quad B_{M_1}=0$; $\quad B_{M_2}=-\frac{1}{4}$;

$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x+2x^2-6xy$; $\quad C_{M_1}=0$; $\quad C_{M_2}=\frac{3}{8}$.

Якщо $y=0$, то $A=B=C=0$ і $\Delta=0$ – невизначеність. $\Delta_{M_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{8}>0$, екстремум існує – мінімум, так як $A>0\left(C>0\right)$

$$Z_{min}\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\right)=-\frac{1}{64}.$$

Для визначення найбільшого та найменшого значення функції у замкненій області необхідно :

1) знайти стаціонарні точки всередині області, визначити значення функції у цих точках;
2) дослідити функцію на екстремум на межах області, знайти екстремальні значення;
3) обчислити значення функції у кутових точках межі, якщо такі є;
4) відібрати з усіх цих значень найбільше та найменше.

Приклад. Обчислити найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 4y$ у області, що обмежена прямими $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 3$

Розв'язання. Побудуємо область

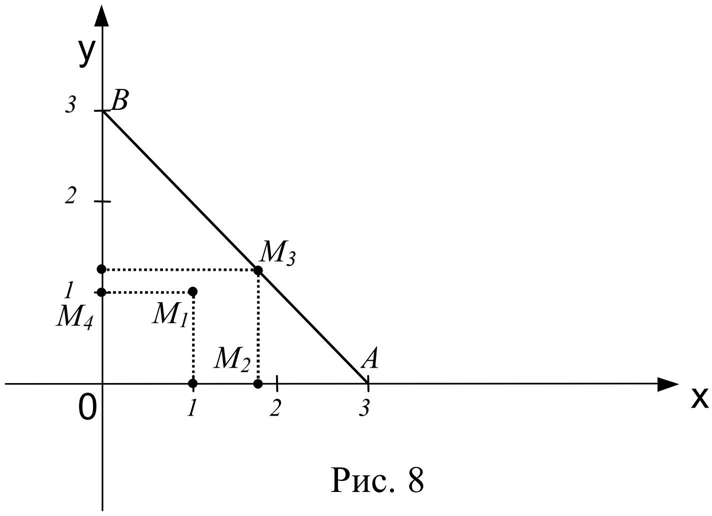

Рис. 8

Знайдемо стаціонарні точки.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2 = 0; \quad x = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y - 4 = 0; \quad y = 1;$$

$M_1(1;1)$

$z(1;1) = 1 + 2 - 2 - 4 = -3$.

Розглянемо межі області:

OA: $\quad y = 0; \quad z = x^2 - 2x, \quad z' = 2x - 2 = 0;$

$\quad z'' = 2 > 0, \quad x = 1; \quad M_2(1;0)$.

AB: $\quad x + y = 3, \quad y = 3 - x, \quad z = x^2 + 2(3 - x) - 2x - 4(3 - x) =$

$= x^2 + 2(9 - 6x + x^2) - 2x - 12 + 4x = 3x^2 - 10x + 6;$

$z' = 6x - 10 = 0; \quad x = \frac{5}{3}; \quad y = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3};$

$$z'' = 6 > 0; \qquad M_3\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

BO: $\quad x = 0$; $\quad z = 2y^2 - 4y$; $\quad z' = 4y - 4 = 0$; $\quad y = 1$.

$$z'' = 4 > 0; \qquad M_4(0;1)$$

Обчислимо значення функції у точках M_1, M_2, M_3, M_4 та у кутових точках O, A, B і оберемо з цих значень найбільше – M та найменше m.

M_1: $\quad z(1;1) = -3$ – найменше значення m

M_2: $\quad z(1;0) = -1$

M_3: $\quad z(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}) = -\frac{7}{3}$

M_4: $\quad z(0;1) = -2$

O: $\quad z(0;0) = 0$

A: $\quad z(3;0) = 3$

B: $\quad z(0;3) = 6$ – найбільше значення M

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти область визначення функції, лінії (поверхні) рівня.

1\. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$ $\quad$ 2. $z = \sqrt{cos\left(x^2 + y^2\right)}$ $\quad$ 3. $u = x + y + z$.

Перевірити, чи задовольняє функція даному рівнянню

1\. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ $\quad$ 2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ $\quad$ 3. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$

де $u = \frac{xy}{x + y}$ $\quad$ де $u = arctg\frac{x + y}{1 - xy}$ $\quad$ де $U = ln\left(x^2 - y^2\right)$

Дослідити на екстремум:

1\. $z = xy\left(10 - x - y\right)$ $\quad$ 2. $z = \left(x - 2\right)^2 + y^2 + 2$ $\quad$ 3. $z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$

Змістовий модуль 2.4
КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Комплексні числа мають вигляд $z = x + iy$, де x та y дійсні числа;

$x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина комплексного числа z;

$y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина комплексного числа z;

i – уявна одиниця, – корінь рівняння $i^2 = -1$, або $\sqrt{-1}$.

Геометрично комплексне число $z = x + iy$ зображається точкою координатної площини XOY, яка у цьому разі має назву площини комплексної змінної z.

Співставимо полюс полярної системи координат з початком прямокутної і розглянемо (рис. 9)

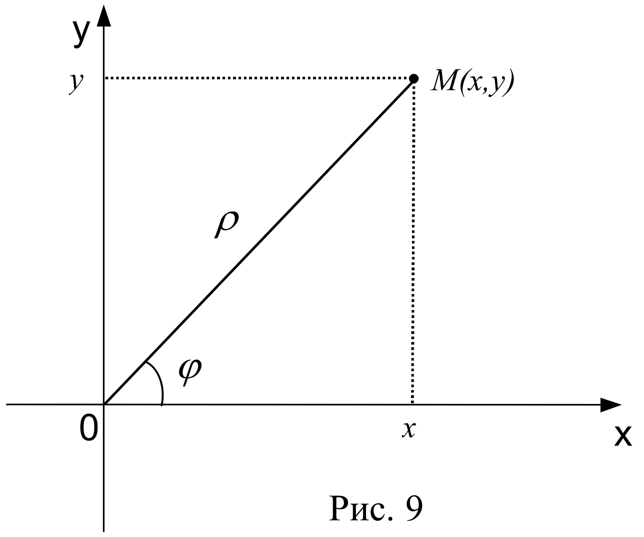

Рис. 9

Полярні координати точки M, що зображує комплексне число z мають назву модуля та аргументу комплексного числа.

Позначимо $\rho = |z|$; $\varphi = \arg z$, де $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$;

Тригонометрична форма комплексного числа z має вигляд $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Для однозначного визначення комплексного числа z використовують поняття головного аргументу: $\arg z \in (-\pi; \pi]$,

тоді $Argz = \arg z + 2k\pi$, або $Argz = \varphi + 2k\pi$, $k \in Z$.

Якщо комплексне число z дорівнює нулю, то його модуль $\rho = 0$, а аргумент не визначено. В інших випадках модуль ρ завжди додатній, а аргумент однозначно визначається за формулами.

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Розглянемо два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$.

Або у тригонометричній формі

$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Комплексні числа z_1 та z_2 дорівнюють одне одному якщо $x_1 = x_2$ та $y_1 = y_2$.

Або у тригонометричній формі

$z_1 = z_2$, якщо $|z_1| = |z_2|$ та $\arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi$, де k – ціле.

Комплексні числа $z = x + iy$ та $\bar{z} = x - iy$ мають назву спряжених комплексних чисел.

У геометричній формі $|z| = |\bar{z}|$, $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Дії над комплексними числами.

Додавання. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. Властивості операції додавання:

1) асоціативність: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

2) комутативність $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Різниця комплексних чисел

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Зауважимо, що числа $z_2 = x_2 + iy_2$ та $-z_2 = -x_2 - iy_2$ мають назву протилежних. Таким чином щоб отримати різницю двох чисел треба до першого z_1 додати протилежне другому z_2.

Якщо ми розглянемо комплексне число z як радіус вектор точки $M(x, y)$, то операції додавання та різниці двох комплексних чисел z_1 та z_2 можна розглядати як операції над векторами $\overrightarrow{z_1}$ та $\overrightarrow{z_2}$, (рис. 10).

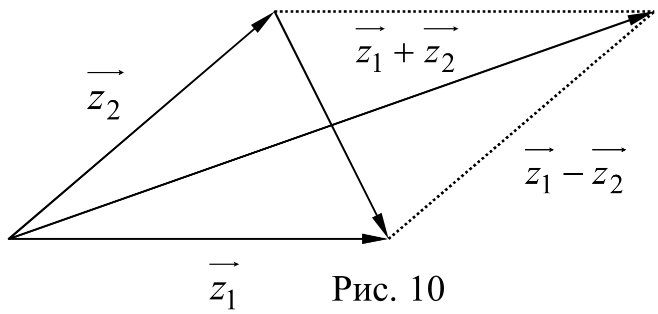

Рис. 10

Добуток двох комплексних чисел

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Добуток двох комплексних чисел розглядаємо як добуток двочленів, вважаючи, що $i^2 = -1$.

У тригонометричній формі

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Властивості добутку комплексних чисел

1) асоціативність: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

2) комутативність $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

3) розподільчий закон, відносно додавання (дистрибутивність) $z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Частка двох комплексних чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, або у тригонометричній формі

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$

Піднесення до *n*-го степеню комплексного числа

$z^n = (x + iy)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot iy + ... + (iy)^n$, де

n – ціле додатне число, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, …

або у загальному вигляді $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

У тригонометричній формі $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $z^n = \rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де n – ціле, як додатне так і від'ємне число

Якщо $\rho = 1$, має місце формула Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Корінь *n*-го степеня числа *Z*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

де n – ціле додатне число, $k = 0, 1, 2..., n-1$.

Геометрично корені n-го степеня числа Z зображуються точками на колі з центром у початку координат, радіусом $\sqrt[n]{\rho}$, центральні кути між якими дорівнюють $\frac{2\pi}{n}$.

Вважаючи на векторне зображення комплексних чисел легко встановити наступні співвідношення між їх модулями.

$$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 + z_2 + ... + z_k| \le |z_1| + |z_2| + ... + |z_k|,$$

$$|z_1 + z_2| \ge \left||z_1| + |z_2|\right|, \quad |z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad |z^n| = |\overline{z}|^n.$$

Розглянемо приклади.

Приклад. Надати комплексні числа $1, i, -1, -i$ у тригонометричній формі.

Розв'язання.

$1 = 1 + 0i = 1(\cos 0 + i\sin 0)$;

$i = 0 + 1i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

$-1=-1+0i=1(\cos\pi+i\sin\pi)$;

$-i=0-1i=1\left(\cos-\dfrac{\pi}{2}+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$; див. рис. 11

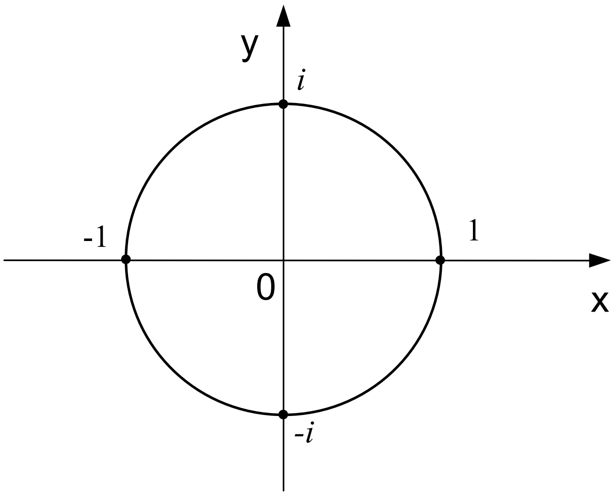

Рис. 11

Приклад. Знайти z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$,

якщо $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_1=1+\sqrt{3}\,i$

Розв'язання.

$z_1+z_2=\sqrt{3}+1+(1+\sqrt{3})i$,

$z_1-z_2=\sqrt{3}-1+(1-\sqrt{3})i$,

$z_1\cdot z_2=(\sqrt{3}+1)\cdot(1+\sqrt{3}\,i)=\sqrt{3}+3i+i-\sqrt{3}=4i$,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(\sqrt{3}+i)(1-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)}=\frac{\sqrt{3}-3i+i+\sqrt{3}}{1+3}=\frac{2\sqrt{3}-2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Приклад. Обчислити $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$.

Розв'язання. Скористуємося формулою Муавра $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$. Так як модуль числа $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ дорівнює одиниці $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right|=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=1$, то

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{12}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12}=$$

$$= \cos\frac{12\pi}{6} + i\sin\frac{12\pi}{6} = 1 + 0i = 1.$$

Приклад. Розв’язати рівняння $z^3 + 8i = 0$.

Розв’язання. $z^3 = -8i$.

Запишемо число $-i$ у тригонометричній формі

$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(-90°) + i\sin(-90°).$$

Скористаємося формулою для кореня n-го степеня з комплексного числа при $n = 3$.

$$z = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{\cos(-90°) + i\sin(-90°)}.$$

$$z = 2\left[\cos\frac{-90° + 360°k}{3} + i\sin\frac{-90° + 360°k}{3} =\right]$$

$$= 2\left[\cos(-30° + 120°k) + i\sin(-30° + 120°k)\right]$$

$$k = 0: \quad z_0 = 2\left[\cos(-30°) + i\sin(-30°)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] = \sqrt{3} - i.$$

$$k = 1: \quad z_1 = 2\left[\cos 90° + i\sin 90°\right] = 2\left[0 + i\right] = 2i$$

$$k = 2: \quad z_2 = 2\left[\cos 210° + i\sin 210°\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right] = -\sqrt{3} - i.$$

Кореням двочленного рівняння відповідають вершини рівнобічного трикутника, що вписаний у коло, радіуса $r = 2$ з центром у початку координат (рис. 12)

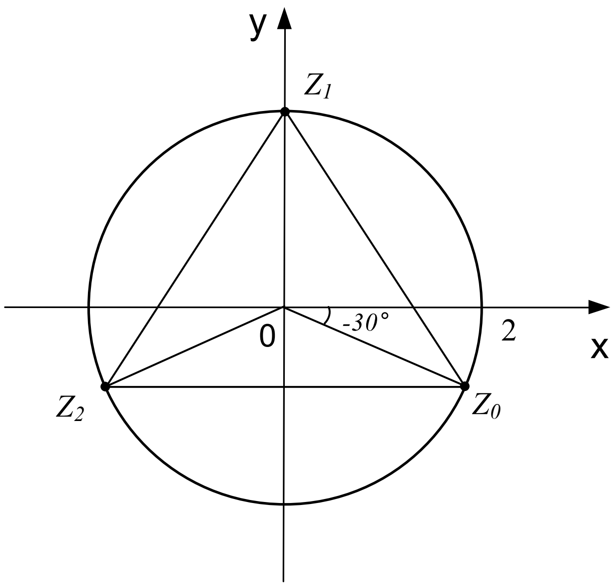

Рис. 12

Завдання для самостійного виконання

1. Представити комплексні числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі і знайти $\dfrac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$.
2. Виразити $\cos 5\varphi$ та $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$, використовуючи формулу Муавра.
3. Обчислити вираз $(2+3i)^3$.
4. Розв’язати рівняння $z^5 + 32i = 0$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. – М. Наука. 1973. – 720 с.
2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова, Высшая математика в упражнениях и задачах ч. I – М. Высш. школа, 1980. – 320 с.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. Наука. 1985. – 384 с.
4. Станішевський С. О. Вища математика. – Харків. ХНАМГ, 2005, –270 с.
5. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1966. – 366 с.
6. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – Київ: «Видавництво А.С.К.», 2003. – 648 с.
7. Печеніжський Ю. Є., Станішевський С. О., Тихонович О. Ю. Посібник для розв’язування задач з вищої математики. – Х.: ХНАМГ, 2003. – 125 с.
8. Бораковський О. В., Ропавка О. І. Посібник для розв’язання задач з вищої математики на англійській мові. Handbook for problem solving in higher mathematics – Х.: ХНАМГ, 2009. – 195 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

БОРАКОВСЬКИЙ Олександр Васильович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(МОДУЛЬ ІІ)

(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання
за напрямом підготовки 6.040106 «Екологія, охорона навколишнього
середовища та збалансоване природокористування»)

Відповідальний за випуск *С. О. Станішевський*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *О. А. Балашова*

План 2011, поз. 95 Л

Підп. до друку 13.12.2011 Формат 60x84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 3,76
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №4064 від 12.05.2011 р.