Властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо строки його замінити стовпцями, а стовпці відповідними строками.
2. Загальний множник елементів рядка або стовпця можна винести за знак визначника.
3. Якщо елементи одного рядка (стовпця) дорівнюють або пропорційні відповідним елементам іншого рідка (стовпця), то визначник дорівнює нулю.
4. При перестановці двох рядків (стовпців), визначник змінює знак на протилежний.
5. Визначник, що має рядок (стовпець), який складається тільки з нулів, дорівнює нулю.
6. Визначник не змінюється, якщо до елементів рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне й теж число.

Визначники можна обчислювати, отримуючи за шостою властивістю попередньо нулі у рядку або стовпці.

Приклад. Обчислити визначник третього порядку:

а) отримуючи попередньо нулі у першому стовпці;

б) розкладаючи його по першому рядку;

в) за формулою Саррюса.

Розв'язання. Позначимо рядки римськими цифрами.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ II \\ III \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ II + I \cdot (-2) = \\ III + I \cdot 3 \end{matrix} .$$

На цьому етапі можна зупинитися і обчислити визначник, розкладаючи його за елементами першого стовпця. Тоді отримаємо:

$$\Delta_3 = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 10 - (-4) = 14 .$$

Якщо ж ми отримаємо нулі під головною діагоналлю, то визначник буде дорівнювати добутку елементів головної діагоналі:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III + II \cdot (-2) \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 14 = 14 .$$

Обчислення Δ_3 шляхом розкладання за елементами *I*-го рядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(5 - (-16)) - 2(2 - (-12) + 3(-8 - (-15)) = 21 - 28 + 21 = 14 .$$

Обчислення Δ_3 за формулою Саррюса:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) \cdot 3 -$$

$$-(-3) \cdot 5 \cdot 3 - (-4) \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 5 - 21 - 24 + 45 + 16 - 4 = 14 .$$

Для обчислення визначників четвертого і вищих порядків, треба попередньо отримати нулі у будь-якому рядку або стовпці, а потім розкласти визначник по ньому.

2. Матриці й дії над ними

При переході від однієї системи координат до іншої ми маємо змогу виразити координати точки в одній системі координат через координати точки в іншій за допомогою лінійного перетворення:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z'; \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z'; \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{cases}$$

Таблиця $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається матрицею цього лінійного перетворення, а визначник $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ визначником лінійного перетворення.

Якщо $\det A \neq 0$ матриця називається не виродженою або не особою, якщо $\det A = 0$, – виродженою або особою. Числа a_{ij} називаються елементами матриці, де i – номер рядка, а j – номер стовпця, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Якщо $m = n$ матриця називається квадратною, якщо $m \neq n$ – прямокутною.

Дві матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ дорівнюють одна одній тоді і тільки тоді коли є рівними їх відповідні елементи, тобто $a_{ij} = b_{ij} \quad (i, j = 1,2,3)$.

Сумою (різницею) двох матриць називається матриця, що визначається рівністю $A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$.

Добутком числа m на матрицю A називається матриця $mA = \begin{pmatrix} m a_{11} & m a_{12} & m a_{13} \\ m a_{21} & m a_{22} & m a_{23} \\ m a_{31} & m a_{32} & m a_{33} \end{pmatrix}$.

Добуток двох матриць A і B визначається рівністю

$$AB = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j3} \end{pmatrix},$$

тобто перший рядок матриці A формує перший рядок матриці-добутку шляхом множення поелементно на перший, другий та третій стовпці матриці B відповідно і так далі. Елемент матриці-добутку, що стоїть у i-тому рядку і j-му стовпці дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-того рядка матриці A і j-го стовпця матриці B.

У загальному вигляді $AB \neq BA$, тобто операція множення матриць не комутативна.

Визначник добутку двох матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Нульова матриця – це матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

сума цієї матриці і будь якої матриці A дорівнює матриці A: $A + 0 = A$.

Одиничною матрицею називається матриця , у якої елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а усі інші нулю.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $AE = EA = A$. Будь яка невироджена квадратна матриця A має обернену матрицю A^{-1}, таку, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$ де $A_{i,j}$ - алгебраїчне доповнення елементів $a_{i,j}$ у визначнику матриці A.

На практиці краще користуватися формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix},$$ де $A_{i,j}^T$ - алгебраїчне доповнення елементів $a_{i,j}$ у транспонованому визначнику матриці A.

Приклад. Знайти обернену матрицю A^{-1}. Зробити перевірку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку обчислимо визначник матриці $\det A = \Delta$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + \cancel{8} + 9 - \cancel{8} - 3 + 12 = 14$$

Знайдемо транспоновану матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тепер знайдемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & 7 & 0\\ 10 & -6 & 2\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7\cdot1+7\cdot3+0\cdot4 & -7\cdot2+ \\ 10\cdot1-6\cdot3+2\cdot4 & 10\cdot2- \\ 1\cdot1+5\cdot3-4\cdot4 & 1\cdot2+\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}+7\cdot2+0\cdot3 & -7\cdot1+7\cdot1+0\cdot(-2)\\ -6\cdot2+2\cdot3 & 10\cdot1-6\cdot1+2\cdot(-2)\\ +5\cdot2-4\cdot3 & 1\cdot1+5\cdot1+4\cdot2\end{matrix}\Bigg)=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}14 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Зауважимо, що множити можна квадратні матриці однакового розміру або прямокутні матриці , якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. У добутку отримаємо матрицю з числом рядків першої і числом стовпців другої матриці.

Приклад. Знайти добуток матриць

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad \text{і}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\cdot1+2(-1)+3\cdot2 & 1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1\\ -1\cdot1+0(-1)+2\cdot2 & (-1)\cdot3+0\cdot2+2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Рангом матриці A ($rangA$ або $r(A)$) звуть найвищий порядок мінору матриці A, відмінного від нуля. Таких мінорів може бути декілька. Будь який мінор матриці що не дорівнює нулю, порядок якого дорівнює рангу матриці має назву базисного.

Матриці A і B звуть еквівалентними ($A\sim B$) якщо $r(A)=r(B)$.

Ранг матриці не змінюється від елементарних перетворень, під якими розуміють:

1) заміну рядків стовпцями, а стовпців відповідними рядками;

2) перестановку рядків або стовпців;
3) викреслювання рядка (стовпця), усі елементи якого дорівнюють нулю;
4) множення будь якого рядка (стовпця) на число;
5) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), домножених на відповідне число.

Приклад. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Елемент $a_{11} = 1$. Отже ранг матриці A не менший від одиниці. Далі беремо елементи, що стоять на перетині перших двох рядків і перших двох стовпців.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1.$$

Отже ранг матриці A принаймні дорівнює двом. Мінором наступного порядку буде визначник матриці A. Обчислимо його.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 8 + 0 - 6 - 2 - 0 = -17.$$

Отже ранг матриці A дорівнює трьом $r(A) = 3$.

Цей спосіб пошуку рангу матриці A має назву «спосіб обвідних мінорів».

За допомогою елементарних перетворень можна знаходити ранги матриць більшого розміру. Для цього початкову матрицю зводять до вигляду, у якому усі елементи дорівнюють нулям або одиницям. Кількість одиниць і визначить ранг матриці.

Приклад. Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв’язання. Поміняємо перший і другий стовпці місцями

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3&2\\0&-1&2&1\\4&5&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&0&2&1\\5&4&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&2&5&3\\0&-6&-15&-9\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ II+I\\ III+I(-5)\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&2&5&3\\0&-2&-5&-3\end{pmatrix}\sim\begin{array}{cccc}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&5&3\\0&-2&-5&-3\end{pmatrix}\\ \quad II+I(-2)\ III+I(-3)\ IV+I(-2)\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&5&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ III+II\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\ III-II\ \ IV-II\end{array}.\ \text{Отже } r(A)=2.$$

3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ ------------------\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases},$$

де $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ – невідомі, a_{ij} – коефіцієнти системи,

$b_1,\ b_2,\ldots,b_n$ – вільні члени.

Розв’язком системи називається сукупність n чисел, які при підстановці у систему замість невідомих перетворюють кожне рівняння системи у тотожність.

Система, яка має хоча б один розв’язок називається сумісною і несумісною, коли жодного розв’язка нема.

Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв’язок і невизначеною, якщо розв’язків більше ніж один.

Система називається однорідною, якщо усі вільні члени дорівнюють нулю і неоднорідною, якщо хоча б одне з b_i відмінно від нуля.

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Такі системи називаються крамерівськими і можуть бути розв'язані за методом Крамера.

Визначником Δ системи називається визначник, що складається з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначником Δ_k називається визначник, отриманий з визначника Δ заміною k-го стовпця, стовпцем вільних членів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} ... a_{1,k-1} \, b_1 \, a_{1,k+1} ... a_{1n} \\ a_{21} ... a_{2,k-1} \, b_2 \, a_{2,k+1} ... a_{2n} \\ ------------- \\ a_{n1} ... a_{n,k-1} \, b_1 \, a_{n,k+1} ... a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник Δ крамерівської системи відрізняється від нуля, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \; ... \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Якщо ж $\Delta = 0$, то маємо два випадки:

а) система несумісна, коли хоча б один із $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n \neq 0$;

б) система невизначена, коли усі $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n = 0$.

Розглядаючи однорідну систему рівнянь, зазначимо, що вона завжди сумісна, бо завжди існує тотожний розв'язок: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Таким чином, якщо визначник Δ однорідної системи відрізняється від нуля ($\Delta \neq 0$), то система має єдиний нульовий розв'язок. Якщо ж $\Delta = 0$, матимемо нескінченну кількість розв'язків.

Зауважимо, що метод Крамера доцільно використовувати для розв'язання систем другого або третього порядку у зв'язку з трудомісткістю обчислення визначників.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за методом Крамера.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 3x + 2y + z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + \cancel{8} + 9 - \cancel{8} - 3 + 12 = 14;$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\left[-16 + \cancel{4} + 15 - \cancel{4} - 12 + 20\right] = 14;$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\left[\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 4\left[-5 - 1 - 4(-3 - 2) + 3 - 10\right] = 4\left[-6 + 20 - 7\right] = 28;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 80 + 72 - 64 - 30 - 24 = 42;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2; \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$$

Перевірка. Підставимо отримані значення, наприклад, у перше рівняння системи.

$1 + 2 \cdot 2 + 3 = 8$ тобто 8 = 8. Отримали тотожність.

Приклад. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0, \\ x + 3y + z = 0, \\ 3x + y + z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 3 + 2 - 18 - 1 - 1 = -12 \neq 0 .$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $x = y = z = 0$.

Приклад. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + 9z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 18 - 1 + 2 - 27 - 4 = 0 .$$

Отже система невизначена і одне з рівнянь є наслідком двох інших. Виразимо невідомі x та y через z. Розглянемо перше і третє рівняння:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 3x + 2y = z \\ x + y = -2z \quad \Big| \; (-2) \end{cases}$$

$$\overline{\quad x + 0y = 5z \quad}$$ Отже $x = 5z$;

Із другого рівняння $y = -2z - 5z = -7z$;

Надаючи z довільні значення, отримаємо нескінченну множину розв'язків: $x = 5z$; $y = -7z$; $z = z$; або так: $x = 5k$; $y = -7k$; $z = k$; $k \in R$.

Розглянемо матричний метод розв'язання системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Зауважимо, що цей метод доцільно використовувати для розв'язання системи не дуже високого порядку, скажімо, до третього, включно.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Запишемо систему у матричній формі.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad AX = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – невироджена матриця системи, тобто $\det A = \varDelta \neq 0$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів.

Розв'язуючи матричне рівняння $AX = B$, отримаємо $X = A^{-1} \cdot B$. Отже

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varDelta} \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varDelta} \begin{pmatrix} A_{11}^T b_1 & + & A_{12}^T b_2 & + & A_{13}^T b_3 \\ A_{21}^T b_1 & + & A_{22}^T b_2 & + & A_{23}^T b_3 \\ A_{31}^T b_1 & + & A_{32}^T b_2 & + & A_{33}^T b_3 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему у матричній формі. $AX = B$ звідки $X = A^{-1} \cdot B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Знайдемо визначник Δ, транспоновану A^T і обернену A^{-1} матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + \cancel{8} + 9 - \cancel{8} - 3 + 12 = 14;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -7 \cdot 8 + 7 \cdot 10 + 0 \cdot 4 \\ 10 \cdot 8 - 6 \cdot 10 + 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 8 + 5 \cdot 10 - 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Перевірка. Підставимо отримані значення наприклад, у перше рівняння системи $1 + 2 \cdot 2 + 3 = 8$; $8 = 8$. Отримали тотожність.

Найбільш ефективним і універсальним методом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гауса, який базується на послідовному виключенні невідомих. Розглянемо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases}$$

На першому етапі (прямий хід) система зводиться до ступінчастого виду, шляхом елементарних перетворень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------------ \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + ... + a_{kn}x_n = b_n \end{cases},$$

де $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, $i = \overline{1,k}$. Коефіцієнти a_{ii} називаються головними елементами системи. На другому етапі (зворотній хід) послідовно визначаємо невідомі зі ступінчастої системи.

Тепер детальніше. Прямий хід.

На перше місце ставимо рівняння, у якого коефіцієнт при першому невідомому відрізняється від нуля. Нехай $a_{11} \ne 0$.

Перетворимо систему таким чином, щоб виключити невідомі x_1 в усіх рівняннях, крім першого. Для чого помножимо перше рівняння на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ і почленно додамо до другого. Далі помножимо перше рівняння на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ і почленно додамо до третього. Продовжуючи цей процес, отримаємо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ ------------------ \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + ... + a_{mn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases},$$

де $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(ij = \overline{2,m})$ - нові значення коефіцієнтів і правих частин, отриманих після першого шагу.

Далі, враховуючи $a_{22}^{(1)} \neq 0$ головним елементом, виключимо невідоме x_2 з усіх рівнянь системи, крім першого і другого. І так продовжуємо цей процес, доки це можливо.

Якщо у процесі зведення системи до ступінчастого вигляду, з'являються нульові рівняння, тобто $(0=0)$ їх відкинемо, а якщо рівняння виду $0=b_i$, де $b_i \neq 0$ – це буде означати несумісність системи.

Зворотній хід. Розв'язання ступінчастої системи. З останнього рівняння виразимо невідоме x_k через невідомі $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Потім з передостаннього рівняння, знаючи x_k, виразимо x_{k-1} через $x_{k+1}, \ldots, x_n$ і так далі знайдемо $x_{k-1}, \ldots, x_1$. Надаючи вільним невідомим $x_{k+1}, \ldots, x_n$ довільні значення, отримаємо нескінченну множину розв'язків системи.

Якщо ж ступінчаста система буде трикутною, тобто $k=n$, то іcходна система матиме єдиний розв'язок. Тоді з останнього рівняння знайдемо x_n, з передостаннього x_{n-1} і так далі, – з першого x_1.

На практиці зручніше працювати не з системою, а з її розширеною матрицею, виконуючи елементарні перетворення з її рядками. Зручніше зробити коефіцієнт при першому невідомому у першому рівнянні рівним одиниці, для чого можна переставити рядки, а може й стовпці розширеної матриці, або ж поділити його на $a_{11} \neq 1$.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}.$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи і проведемо елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} II \\ I \\ III \\ VI \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ II + I(-2) \\ III + I(-3) \\ IV + I(-7) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV + II(-2). \end{array}$$

Таким чином ми отримали ступінчасту систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 + 0 \cdot x_4 = 2 \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}.$$

Виразимо x_1 та x_2 через x_3 та x_4:

$$\begin{array}{l} x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4 \\ x_1 = 2 + x_2 + 5x_3 = 2 - 3 - 13x_3 + 5x_4 + 5x_3 \end{array},$$

отже загальний розв'язок системи: $\begin{cases} x_1 = -8x_3 + 5x_4 - 1 \\ x_2 = -13x_3 + 5x_4 - 3 \end{cases}$

Надаючи x_3 та x_4 довільні значення, отримаємо нескінченну множину часткових розв'язків.

Наприклад. Якщо $x_3 = 0$; $x_4 = 0$, то $x_1 = -1$; $x_2 = -3$.

Якщо $x_3 = 1$; $x_4 = 1$, то $x_1 = -4$; $x_2 = -11$.

Приклад. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}.$$

Розв'язання. Проведемо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I(-2) \\ III + I(-3) \\ IV + I(-5) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + I(2) \\ IV + II(6) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \\ IV + III(-3) \end{array} .$$

Бачимо, що четверте рівняння є слідством перших трьох. Отримаємо систему.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \qquad\quad x_2 = 1 \\ \qquad\quad x_3 = 1 \end{cases}$$

Звідси, випроваджуючи зворотний хід, матимемо $x_3 = 1$; $x_2 = 1$; $x_1 = 1$.

Відповідь на питання про існування розв'язків системи m лінійних рівнянь з n невідомими дає теорема Кронекера-Капеллі, яку приймемо без доведення.

Теорема. Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної матриці системи.

А відповідь про кількість розв'язків сумісної системи дають наступні теореми.

Теорема. Якщо ранг сумісної системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Теорема. Якщо ранг сумісної системи менше кількості невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків.

4. Вектори

Визначення. Вектор – це направлений відрізок. Позначають вектор двома буквами зі стрілкою $\overrightarrow{AB}$, де точка A – початок вектору, точка B – кінець, або однією маленькою буквою $\vec{a}$ зі стрілкою, або виділяють жирним шрифтом.

Вільний вектор це вектор який без зміни довжини й напрямку може бути перенесений у будь-яку точку простору.

Вектор можна представити у вигляді розкладання по осях координат або по ортах:

$$\boxed{\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}} \; ,$$

де a_x, a_y, a_k – проекції вектора на відповідні осі координат; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори або орти.

Вектори $a_x \overrightarrow{i}$, $a_y \overrightarrow{j}$, $a_z \overrightarrow{k}$ мають назви складових або компоненти вектора по осях координат.

Довжина вектора або модуль позначається $|\vec{a}|$ і дорівнює

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \; .$$

Напрям вектора $\vec{a}$ визначається кутами α, β, γ з осями координат. Косинуси цих кутів (так звані напрямні косинуси) обчислюють за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Напрямні косинуси вектора зв'язані співвідношенням

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Графічно два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ додаються і віднімаються за правилом паралелограма (рис. 21).

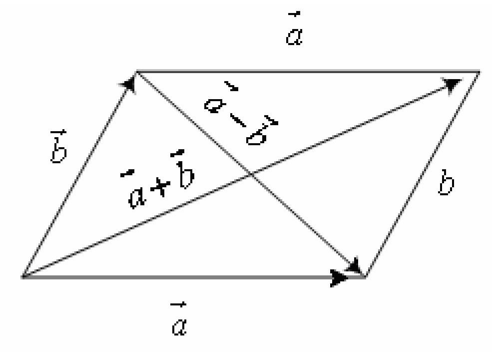

Рис. 21

Сума кількох векторів визначається за правилом багатокутника (рис. 22).

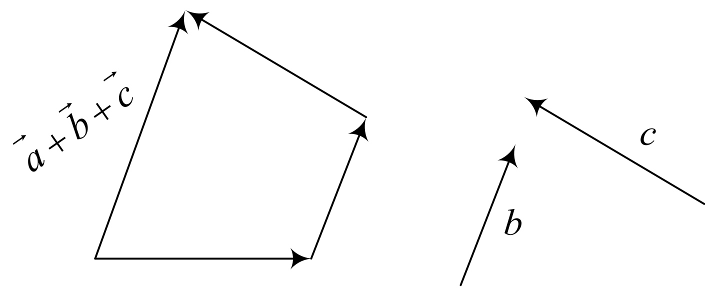

Рис. 22

Добуток вектора $\vec{a}$ на скалярний множник m визначається за формулою

$$\boxed{m\vec{a} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k}\,.}$$

Якщо $m > 0$, то вектори $\vec{a}$ і $m\vec{a}$ паралельні (колінеарні) і мають один і той же напрямок.

Якщо $m < 0$, то вектори $\vec{a}$ і $m\vec{a}$ протилежні. Одиничний вектор $\overrightarrow{a_0}$, того ж напрямку, що і $\vec{a}$ дорівнює $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$, де $O(0,0,0)$, а $M(x,y,z)$ має назву радіус-вектор точки M, позначається $\vec{r}(M)$ або просто $\vec{r}$ і дорівнює $\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ може бути записаний у вигляді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$,

де $\overrightarrow{r_B}$ – радіус-вектор точки B, а $\overrightarrow{r_A}$ – радіус-вектор точки A.

Приклад. Знайти проекції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ на осі координат і його напрямні косинуси якщо $A(0;0;1)$; $B(3;2;1)$; $C(4;6;5)$; $D(1;6;3)$.

$$\overrightarrow{AB} = (3-0)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = (1-4)\vec{i} + (6-6)\vec{j} + (3-5)\vec{k} = -3\vec{i} - 0\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (3-3)\vec{i} + (2+0)\vec{j} + (0-2)\vec{k} = 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Отже $a_x = 0$; $a_y = 2$; $a_z = -2$.

Знайдемо модуль вектора $|\vec{a}|$: $\quad |\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

Напрямні косинуси: $\cos\alpha = \dfrac{0}{2\sqrt{2}} = 0$; $\cos\beta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\gamma = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Перевіримо. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; $\quad 0 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$; $\quad 1 = 1$.

Скалярний добуток векторів. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута φ між ними

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi}, \text{ де } \varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Скалярний добуток можна визначити й так:

$$\boxed{\vec{a}, \vec{b} = |\vec{a}| \cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}},$$

так як $|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = Пр_{\vec{b}}\vec{a}$ (рис. 23), а $|\vec{b}| \cdot \cos\varphi = Пр_{\vec{a}}\vec{b}$.

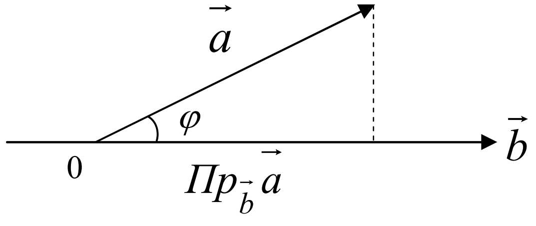

Рис. 23

Таким чином, скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з них на проекцію другого на напрямок першого.

Властивості скалярного добутку:

1) комутативність $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$:

$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, а $\left(\vec{b},\vec{a}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right)$.

Так як $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$ як добуток чисел і $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{a}}\right)$. $\blacksquare$

2) асоціативність відносно множника на число $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a},\vec{b})$:

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot Пр_{\vec{b}}\lambda\vec{a}=\lambda\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a},\vec{b})$. $\blacksquare$

3) операції додавання і скалярного множення векторів зв'язані дистрибутивним законом множення відносно додавання (розподільча властивість):

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\left|\vec{a}\right|\cdot Пр_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=\left|\vec{a}\right|\cdot(Пр_{\vec{a}}\vec{b}+Пр_{\vec{a}}\vec{c})=\left|\vec{a}\right|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{b}+\left|\vec{a}\right|\cdot Пр_{\vec{a}}\vec{c}=$

$=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$. $\blacksquare$

4) скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини:

$\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{a}\right|^2$. $\blacksquare$

звідси $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$.

5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\left|\vec{a}\right|=0$, або $\left|\vec{b}\right|=0$, або $\left|\vec{a}\right|\perp\left|\vec{b}\right|$.

Звідси $\vec{i}\,\vec{j}=\vec{j}\vec{k}=\vec{k}\,\vec{i}=0$.

Ураховуючи властивості 4) і 5), якщо $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ та $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то $\vec{a}\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a},\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\sqrt{{b_x}^2 + {b_y}^2 + {b_z}^2}}.}$$

Звідси умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

З фізичної точки зору скалярний добуток постійної сили $\vec{F}$ та путі $\vec{S}$ є робота $A = |\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cos(\widehat{\vec{F}\vec{S}})$.

Приклад. Обчислити $(5\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Розв'язання. $(5\vec{a} + 3\vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 5\vec{a}^2 - 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{b}\cdot\vec{a} - 3\vec{b}^2 =$

$= 5a^2 - 3b^2 = 20 - 12 = 8$.

Приклад. Знайти одиничний вектор, того ж напряму, що й вектор $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо модуль вектора $\vec{a}$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Тоді $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$.

Перевіримо $|\overrightarrow{a_0}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$.

Векторний добуток векторів. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, який позначають $[\vec{a},\vec{b}]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$, є вектор $\vec{c}$ (рис. 24), що визначається такими трьома умовами:

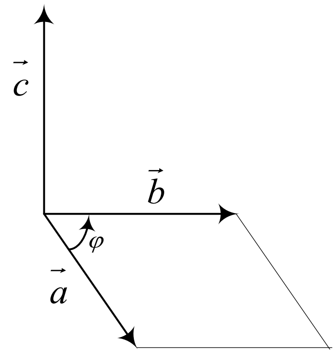

Рис. 24

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний як до $\vec{a}$ так і до $\vec{b}$, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) довжина вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\boxed{|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})}$;

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, що не належать одній площині (не колінеарні), утворюють праву тройку; тобто, якщо дивитись з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється проти руху годинникової стрілки і ліву – якщо за рухом годинникової стрілки.

Властивості векторного добутку:

1) зміна місця множників дає протилежний вектор $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ колінеарні, мають одинакові модулі (площа паралелограма таж сама), але протилежно спрямовані (трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$ протилежно орієнтовані).

Отже $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

3) асоціативність відносно скалярного множника:
$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$.

Нехай $\lambda > 0$, вектор $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, вектор $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ також перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (вектори $\vec{a}$ і $\lambda \vec{a}$ належать одній площині). Отже вектори $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ і $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ колінеарні і напрямки їх співпадають. Вони мають однакову довжину:

$\left|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\right| = \lambda\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \lambda\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ і

$\left|(\lambda\vec{a})\times\vec{b}\right| = \left|\lambda\vec{a}\right|\times\vec{b}\cdot\sin(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}}) = \lambda\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Звідси $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = \lambda\vec{a}\times\vec{b}$.

Доведення при $\lambda < 0$ аналогічне;

3) два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нулю $\vec{a}\,||\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$.

$\Downarrow$

Якщо $\vec{a}\,||\,\vec{b}$, то кут між ними дорівнює $0°$ або $180°$. Але тоді $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0$. Отже $\vec{a}\times\vec{b} = 0$.

Якщо ж $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, то $\left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{b}\right|\cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0$. Але тоді $\varphi = \widehat{\vec{a},\vec{b}} = 0$ або $\varphi = 180°$, тобто $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

Зокрема $\vec{i}\times\vec{i} + \vec{j}\times\vec{j} + \vec{k}\times\vec{k} = 0$;

3) векторний добуток має розподільчу властивість: $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$.

Векторний добуток векторів $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ обчислюється за формулою:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}\ .$$

Ця формула перевіряється безпосереднім перемноженням двох векторів.

Звідси встановлення колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \vec{a}\,||\,\vec{b}$.

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює $S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, а площа трикутника

$$\boxed{S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}\ .$$

Приклад. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо векторний добуток:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}.$$

Тоді $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = \frac{49}{2}$ (кв. од.).

Приклад. Обчислити площу паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ і $3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 30°$.

Розв'язання. Маємо $\overrightarrow{(a + 3b)} \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} =$

$= -8\vec{a} \times \vec{b}$.

Тоді $S = 8\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin 30° = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 4$ (кв. од.).

Мішаний добуток трьох векторів. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ тобто $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Позначається $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Модуль мішаного добутку векторів $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, які відкладені від однієї точки:

$$\boxed{V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|}\ .$$

Властивості мішаного добутку:

1) мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, якщо:

а) хоча б один з цих векторів дорівнює нулю;

б) два з векторів паралельні (колінеарні);

в) усі три вектори паралельні одній площині (компланарні);

2) мішаний добуток не зміниться, якщо у ньому змінити місцями знаки векторного і скалярного множення, тобто

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}}\;;$$

3) мішаний добуток не зміниться при круговій перестановці векторів

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$;

4) при перестановці будь-яких двох векторів мішаний добуток змінить тільки знак: $\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,;$ $\quad\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,;$ $\quad\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}=-\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Мішаний добуток векторів: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}}\;.$$

З властивостей мішаного добутку трьох ненульових векторів випливає необхідна і достатня умова компланарності: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.

Припустимо, що це так. Тоді можливо було б побудувати паралелепіпед з об'ємом $V\neq 0$. Але $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\pm V$, тоді $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\neq 0$ а це суперечить умові $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.

Навпаки, нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні. Тоді вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ – перпендикулярний до площини, якій належать (або паралельні) вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ і $\vec{d}\perp\vec{c}$.

Звідси $\left(\vec{d}\cdot\vec{c}\right)=0$, тобто $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ дорівнює

$$\boxed{V_{пар}=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|}\ .$$

Об'єм трикутної піраміди, що побудована на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ дорівнює:

$$\boxed{V_{nip}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|}\ .$$

Мішаний добуток дає можливість визначити взаємну орієнтацію векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ у просторі. Якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, то вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву тройку векторів, а якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$, – ліву.

Приклад. Обчислити об'єм піраміди, яка має вершину у точках: $A(1;2;3)$; $B(0;-1;1)$; $C(2;5;2)$; $D(3;0;-2)$. Знайти площу грані ABC і косинус кута BAD.

Розв'язання. Складемо вектори:

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(0-1)\vec{i}+(-1-2)\vec{j}+(1-3)\vec{k}=-\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}=(-1;-3;-2)$;

$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(1;3;-1)$; $\quad \vec{c}=\overrightarrow{AD}=(2;-2;-5)$.

Знайдемо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}-1 & -3 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & -5\end{vmatrix}=15+6+4+12+2-15=24.$$

Звідси $V_{nip}=\frac{1}{6}\cdot 24=4$ (куб. од.).

Площа грані ABC дорівнює:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -3 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\vec{i}\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|9\vec{i}-3\vec{j}+0\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{9^2+3^2}=\frac{\sqrt{90}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{10} \text{ (кв. од.).}$$

Косинус кута BAD – це косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Звідси $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{c}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\dfrac{-2+6+10}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\sqrt{2^2+2^2+5^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}\sqrt{33}}=\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{33}}\approx 0{,}651.$

5. Пряма лінія і площина у просторі. Поверхні другого порядку

Площина. Нормальне рівняння площини у векторній формі має вигляд:

$$\boxed{\vec{r}\cdot\vec{n}=\rho},$$

де $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ радіус-вектор довільної точки $M(x,y,z)$ площини; $\vec{n}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma$ – одиничний вектор, що має напрямок перпендикуляра до площини, проведений з початку координат; α,β,γ – кути, що утворюються цим перпендикуляром з осями координат; ρ – довжина цього перпендикуляра. Переходячи до координат у скалярному добутку, отримаємо нормальне рівняння площини у координатній формі:

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\rho=0},$$

Будь-яке рівняння першого степеня $Ax+By+Cz+D=0$, при умові $A^2+B^2+C^2\neq 0$, задає площину у просторі і має назву загального рівняння площини. Коефіцієнти A,B,C – можна розглядати, як компоненти вектора нормалі $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ до площини.

Для отримання нормального рівняння, треба загальне рівняння площини помножити на нормуючий множник $\mu=\pm\dfrac{1}{N}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знак якого обирається з умови $\mu D<0$, тобто знаки μ і D протилежні.

Розглянемо часткові випадки розташування площини $Ax+By+Cz+D=0$, у просторі:

$A=0$; площина паралельна осі Ox;

$B=0$; площина паралельна осі Oy;

$C=0$; площина паралельна осі Oz;

$D=0$; площина проходить через початок координат;

$A=B=0$; площина перпендикулярна осі Oz (паралельна площині xOy);

$A=C=0$; площина перпендикулярна осі Oy (паралельна площині xOz);

$B=C=0$; площина перпендикулярна осі Ox (паралельна площині yOz);

$A=D=0$; площина проходить через ось Ox;

$B=D=0$; площина проходить через ось Oy;

$C=D=0$; площина проходить через ось Oz;

$A=B=D=0$; співпадає за площиною xOy ($z=0$);

$A=C=D=0$; співпадає за площиною xOz ($y=0$);

$B=C=D=0$; співпадає за площиною yOz ($x=0$);

Якщо у загальному рівнянні площини $D\neq 0$ (тобто площина не проходить через початок координат), то поділивши усі частини рівняння на $-D$, отримаємо рівняння площини у відрізках

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1},$$

де $a=-\dfrac{D}{A}$; $b=-\dfrac{D}{B}$; $c=-\dfrac{D}{C}$ – точки перетину площини з осями Ox, Oy, Oz.

Кут φ між площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ визначається як кут між нормалями до цих площин за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}.$$

Звідси умова паралельності двох площин:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}\ .$$

Умова перпендикулярності:

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0}\ .$$

Відстань точки $M(x_0,y_0,z_0)$ від площини $Ax+By+Cz+D=0$ визначається за формулою

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\ .$$

Зазначимо, що вираз під знаком модуля буде додатнім, якщо точка $M(x_0,y_0,z_0)$ і початок координат розташовані по різні боки від площини і від'ємним – якщо по один бік.

Рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0,y_0,z_0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ має вигляд:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}\ .$$

При довільних A, B, C отримаємо рівняння в'язки площин, що проходять через точку M_0.

Рівняння $\boxed{A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$, при довільному λ задає жмуток площин, що проходять через пряму перетину площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$, $M_3(\vec{r}_3)$, де $\vec{r}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{r}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, $\vec{r}_3=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, отримаємо з умови компланарності векторів. $\vec{r}-\vec{r}_1$, $\vec{r}_2-\vec{r}_1$, $\vec{r}_3-\vec{r}_1$, де $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ – радіус-вектор довільної точки M шуканої площини:

$$\boxed{(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}-\vec{r}_2)(\vec{r}-\vec{r}_3)=0}\ ,$$

або в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянемо деякі приклади:

Приклад. Скласти нормальне рівняння площини $x+2y-2z+9=0$.

Розв'язання. Знайдемо нормуючий множник $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \pm\dfrac{1}{3}$.

Знак оберемо з умови $\mu D<0$. Так як $D=9>0$, то $\mu=-\dfrac{1}{3}$.

Тоді нормальне рівняння площини матиме вигляд $-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{2}{3}z-3=0$,

де $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$; $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$; $\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$; $\rho=3$ – відстань площини від початку координат.

Приклад. Обчислити відстань точки $M(3;5;-2)$ від площини $2x+2y-z-9=0$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для обчислення відстані точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ від площини $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 3+2\cdot 5+(-1)(-2)-9|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|6+10+2-9|}{3}=3.$$

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму перетину площин $4x+y+z-2=0$, $3x+2y-z+3=0$ і точку $M(1;2;3)$.

Розв'язання. Складемо рівняння жмутка площин: $4x+y+z-2+\lambda(3x+2y-z+3)=0$.

Із цього жмутка оберемо площину, яка проходить через точку $M(1;2;3)$.

$4\cdot 1+2+3-2+\lambda(3\cdot 1+2\cdot 2-3+3)=0$, $\quad 7+7\lambda=0$, $\quad \lambda=-1$.

Звідси $4x+y+z-2-(3x+2y-z+3)=0$, $\quad x-y+2z-5=0$.

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;-1;-2)$ та перпендикулярна до площин: $2x - y + z + 4 = 0$ і $x - 3y + 2z + 1 = 0$.

Розв'язання. За вектор нормалі шуканої площини оберемо вектор перпендикулярний до нормалей даних площини, тобто $\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, де $\vec{N}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{N}_2 = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}.$$

Тепер складемо рівняння площини яка проходить через точку M і має вектор нормалі $\vec{N}$: $(x-1) + (-1)(y+1) + (-3)(z+2) = 0$ або $x - y - 3z - 8 = 0$.

Приклад. Із точки $M(2;4;3)$ проведені перпендикуляри до осей координат. Скласти рівняння площини, яка проходить через основи цих перпендикулярів.

Розв'язання. Основи цих перпендикулярів і будуть координатами точки M. Тобто необхідно скласти рівняння площини яка відсікає на осях координат відрізки відповідно 2, 4 і 3. Скористуємось рівнянням площини у відрізках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Тоді $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$ і є шукане рівняння тут $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$.

Пряма лінія у просторі. Пряма у просторі може бути визначена рівняннями двох площин, що перетинаються по цій прямій:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, паралельно вектору $\vec{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ мають вигляд:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}}$$ або

$$\boxed{\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}},$$

де α,β,γ – кути, які утворює пряма з осями координат.

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\ \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\ \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}.$$

Від канонічних рівнянь, вводячи параметр t, неважко перейти до параметричних:

$$\begin{cases} x=lt+x_1, \\ y=mt+y_1, \\ z=nt+z_1. \end{cases}$$

Косинус кута φ між двома прямими $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ і $\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_1}{m_2}=\frac{z-z_1}{n_2}$ визначається за формулою:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}}.$$

Звідси умова паралельності двох прямих:

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}}$$

і умова перпендикулярності двох прямих:

$$\boxed{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0}.$$

Необхідна і достатня умова знаходження двох прямих, що задані їх канонічними рівняннями, в одній площині (умова компланарності двох прямих):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо l_1, m_1, n_1 не пропорційні l_2, m_2, n_2, то дане співвідношення є необхідною і достатньою умовою перетину двох прямих у просторі.

Синус кута φ між прямою $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}}\ .$$

Звідси умова паралельності прямої і площини:

$$\boxed{Al + Bm + Cn = 0}\ .$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\boxed{\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}}\ .$$

Для визначення точки перетину прямої $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ або у параметричній формі $x = lt + x_1$, $y = mt + y_1$, $z = nt + z_1$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$ необхідно розв'язати їх рівняння:

$$A(lt + x_1) + B(mt + y_1) + C(nt + z_1) + D = 0 \text{ або}$$

$$Alt + Bmt + Cnt + D + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \text{ або } (Al + Bm + Cn)t + D_1 = 0,$$

$$\text{де } D_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

Якщо $Al + Bm + Cn \neq 0$, то пряма перетинає площину. Точка перетину обчислюється з рівняння. Якщо $Al + Bm + Cn = 0$, а $D \neq 0$, то пряма належить площині.

Розглянемо приклади.

Приклад. Скласти канонічне рівняння прямої, яку задано перетином двох площин: $x - y + 3z - 2 = 0$ і $x + 2y - z - 6 = 0$.

Розв'язання. Кожна з площин має свій вектор нормалі: $\vec{N}_1 = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Вектор $\vec{s}$, вздовж якого проходить пряма, перпендикулярний як до вектора $\vec{N}_1$ так і до вектора $\vec{N}_2$. Тоді $\vec{s} = N_1 \times N_2$. Знайдемо його:

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$$

Для визначення координат точки M, через яку проходить шукана пряма, треба знайти точку перетину її з однією з координатних площин. Нехай це буде площина yOz. Тобто у рівняння площини треба підставити $x = 0$. Маємо:

$$\begin{cases} -y + 3z - 2 = 0 \\ 2y - z - 6 = 0 \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ + \\ \end{matrix}\right|\begin{matrix} \\ + \\ 3 \end{matrix}\right|$$

$$5z - 10 = 0, \quad z = 2$$

$$5y - 20 = 0, \quad y = 4.$$

Тепер запишемо канонічні рівняння прямої, яка проходить через знайдену точку $M(0;4;2)$ паралельно вектору $\vec{s} = -5\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$:

$$\frac{x}{-5} = \frac{y-4}{10} = \frac{z-2}{5} \quad \text{або} \quad \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

Існує й другий спосіб розв'язання: виключаючи спочатку y, а потім z з рівнянь площини, отримаємо:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 2 = 0 \\ 3x + 2y - z - 6 = 0 \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ + \\ \end{matrix}\right|\begin{matrix} \\ + \\ 3 \end{matrix}\right|$$

$$5x + 5z - 10 = 0, \quad -5x = 5z - 10; \; -10x = 10(z-2).$$

$$10x + 5y - 20 = 0, \quad -10x = 5y - 20; \; -10x = 5(y-4).$$

Таким чином: $-10x = 5(y-4) = 10(z-z)$ або $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

Приклад. Дана точка $M(1;2;3)$ і площина $x + 2y + -z - 8 = 0$. Визначити координати точки N, симетричної до точки M, відносно даної площини.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;2;3)$, перпендикулярно до площини $x + 2y + -z - 8 = 0$, що має вектор нормалі $\vec{N} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Для обчислення точки перетину цієї прямої з площиною, запишемо рівняння прямої у параметричній формі:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} = t.$$

Звідси $x = t + 1$; $y = 2t + 2$; $z = -t + 3$.

Підставимо x, y, z у рівняння площини та обчислимо параметр t:

$$t + 1 + 4t + 4 + t - 3 - 8 = 0,\ \ 6t = 6,\ \ t = 1.$$

Знайдемо координати точки перетину прямої з площиною:

$$\bar{x} = t + 1 = 1 + 1 = 2;\quad \bar{y} = 2t + 2 = 2 + 2 = 4;\quad \bar{z} = -t + 3 = 2.$$

Точка перетину є серединою відрізка між точками M і N, тобто

$$\bar{x} = \frac{x_M + x_N}{2};\ \ \bar{y} = \frac{y_M + y_N}{2};\ \ \bar{z} = \frac{z_M + z_N}{2};$$

$$2 = \frac{1 + x_N}{2};\ \ 4 = \frac{2 + y_N}{2};\ \ 2 = \frac{3 + z_N}{2}.$$

Звідси $x_N = 3$; $y_N = 6$; $z_N = 1$.

Отже, $N(3;6;1)$.

Приклад. Обчислити кути, які утворює пряма $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ x - 3z + 8 = 0 \end{cases}$ з осями координат.

Розв'язання. Складемо канонічні рівняння прямої: $x = 2y + 5$, $x = 3z - 8$.

Тоді $x = 2y + 5 = 3z - 8$, $x = 2\left(y + \frac{5}{2}\right) = 3\left(z - \frac{8}{3}\right)$, $\frac{x}{6} = \frac{y + \frac{5}{2}}{3} = \frac{z - \frac{8}{3}}{2}$.

Звідси: $l = 6$; $m = 3$; $n = 2$; $\vec{s} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

$$\text{Тоді} \quad \cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{6}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{6}{7};$$

$$\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{3}{7}; \;\; \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{2}{7}.$$

Поверхні другого порядку. Будь яке рівняння другого степеня відносно x, y, z виду $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$, де принаймні один за коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля, визначає поверхню другого порядку у просторі.

Розглянемо поверхні другого порядку та їх найпростіші (канонічні) рівняння.

Сфера. У декартовій системі координат сфера, що має центр у точці $C(x_0, y_0, z_0)$ і радіус R (рис. 25) визначається рівнянням

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

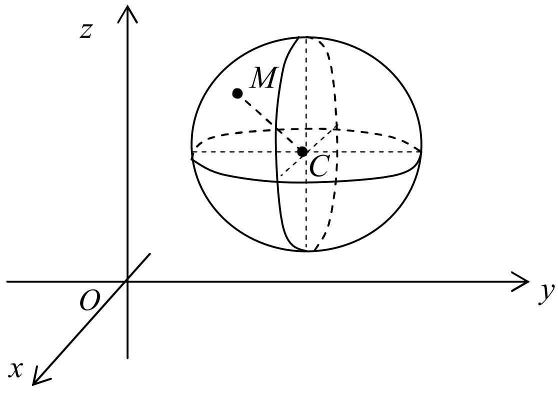

Рис. 25

Якщо центр сфери знаходиться у початку координат, то її рівняння має вигляд: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Циліндричні поверхні. Рівняння виду $F(x,y)=0$ визначає у просторі циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі Oz.

Рівняння виду $F(x,z)=0$ визначає у просторі циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі Oy.

Рівняння виду $F(y,z)=0$ визначає у просторі циліндричну поверхню, твірна якої паралельна осі Ox.

Канонічні рівняння циліндрів другого порядку, твірна яких паралельна осі Oz наступні:

еліптичний циліндр $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 26).

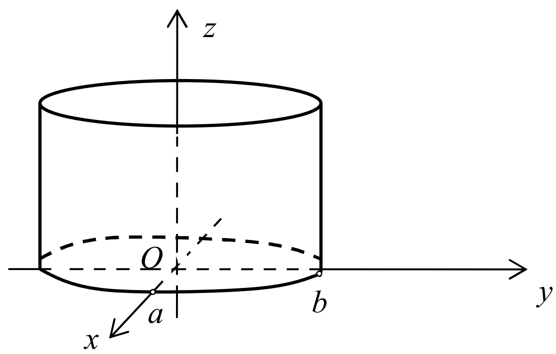

Рис.26

Якщо $a=b$, будемо мати круговий циліндр.

гіперболічний циліндр. $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ (рис. 27).

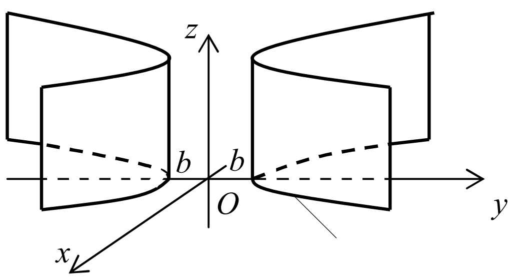

Рис.27

Якщо $a=b$, будемо мати рівнобічний гіперболічний циліндр;

параболічний циліндр $y^2 = 2px$ (рис. 28).

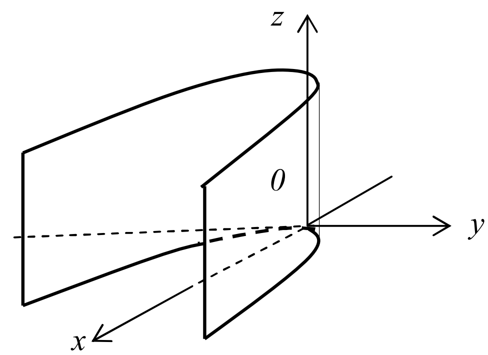

Рис.28

конус другого порядку з вершиною у початку координат, віссю якого є вісь Oz, має рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (рис. 29).

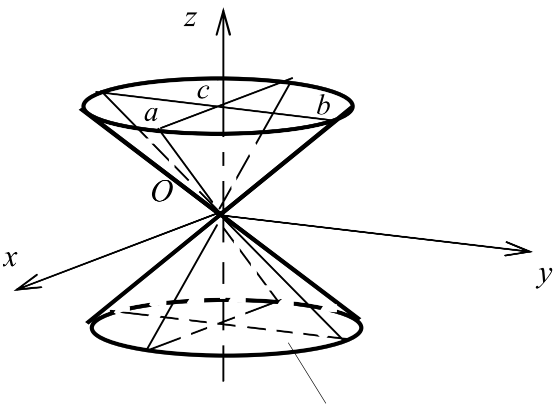

Рис.29

Аналогічно, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, якщо віссю є Oy і

$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, якщо віссю є Ox.

Поверхні обертання. Якщо крива $F(y,z) = 0$, $x = 0$, що належить площині yOz обертається навколо осі Oz, то рівняння поверхні обертання має вигляд $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

Аналогічно, рівняння $F(x, \sqrt{y^2+z^2})=0$ визначає поверхню, що утворена обертанням навколо осі Ox кривої $F(x,y)=0$, $z=0$; рівняння $F(\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$ визначає поверхню, що утворена обертанням навколо осі Oy кривої $F(x,y)=0$, $z=0$.

Наведемо рівняння поверхонь обертання другого порядку, що утворюються обертанням еліпса, гіперболи та параболи навколо їх осей симетрії.

Еліпсоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, де вісь обертання Oz. Еліпсоїд стиснутий, якщо $a>c$; розтягнутий, якщо $a<c$; при $a=c$ він перетворюється у сферу.

Однопорожнинний гіперболоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, де вісь обертання Oz є уявною віссю гіперболи, обертанням якої утворена ця поверхня.

Двопорожнинний гіперболоїд обертання $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, де вісь обертання Oz є дійсною віссю гіперболи, обертанням якої утворена ця поверхня.

Параболоїд обертання $x^2+y^2=2pz$, де вісь обертання Oz.

Поверхні обертання другого порядку є частковим випадком поверхонь другого порядку загального вигляду, канонічні рівняння яких наступні:

еліпсоїд триосний $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 30);

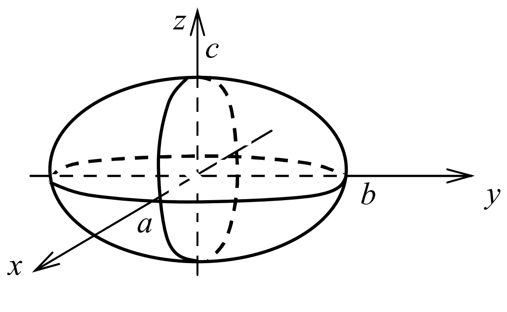

Рис. 30

однопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 31);

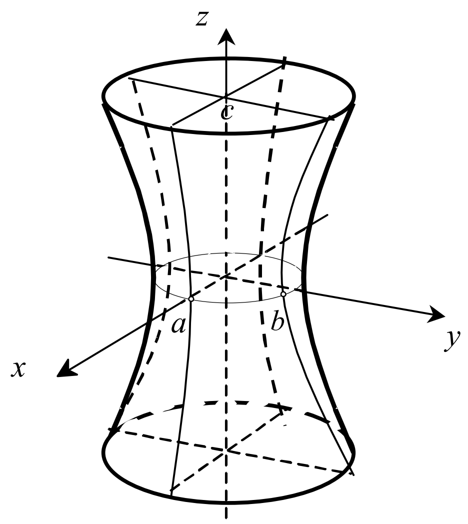

Рис. 31

двопорожнинний гіперболоїд $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 32);

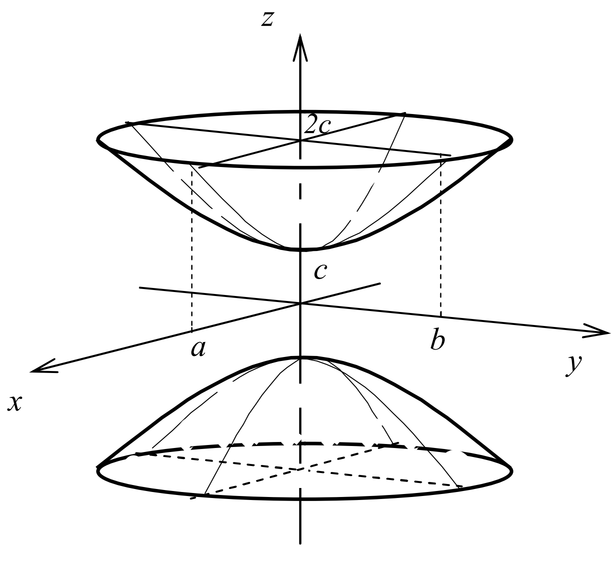

Рис. 32

еліптичний параболоїд $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ $(p>0,\ \ q>0)$ (рис. 33);

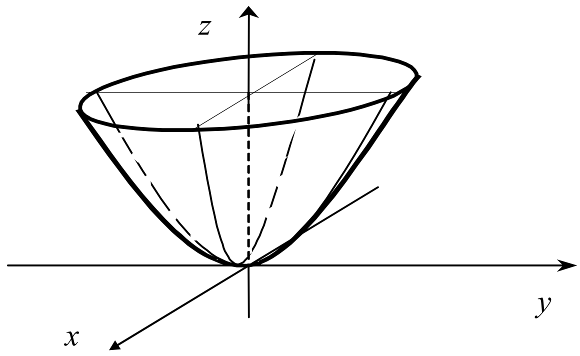

Рис. 33

гіперболічний параболоїд $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ ($p > 0, \ \ q > 0$) (рис. 34).

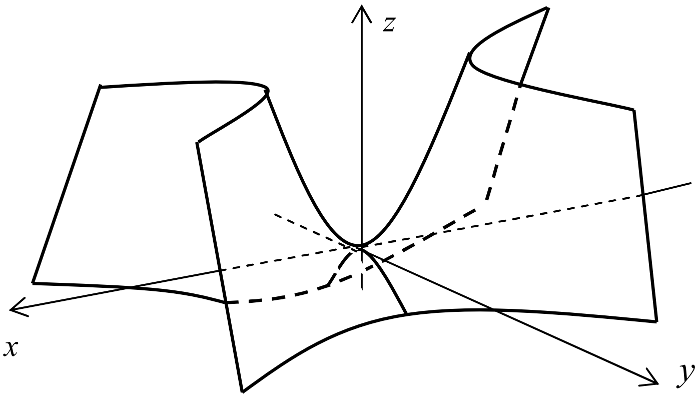

Рис. 34

Таким чином, існує дев'ять поверхонь другого порядку: три циліндри – еліптичний, гіперболічний та параболічний, конус, еліпсоїд, однопорожнинний гіперболоїд, двопорожнинний гіперболоїд, еліптичний параболоїд, еліптичний параболоїд та гіперболічний параболоїд.

Слід зауважити, що загальне рівняння поверхонь другого порядку може також визначати сукупність двох площин, точку, пряму і, навіть, не мати геометричного змісту (визначати уявну поверхню).

Приклад. З'ясувати геометричний сенс рівняння

$$x^2+4y^2+9z^2+12yz+6xz+4xy-4x-8y-12z+3=0$$

Розв'язання. Здійснюючи алгебраїчні перетворення, отримаємо рівняння

$(x+2y+3z)^2-4(x+2y+3z)+3=0$ або $(x+2y+3z-1)(x+2y+3z-3)=0$.

Таким чином, рівняння визначає сукупність двох площин $x+2y+3z-1=0$ та $x+2y+3z-3=0$.

Приклад. Звести до канонічного виду рівняння $x^2+y^2+4z^2-2xy-8z+5=0$.

Розв'язання. Згрупуємо члени наступним чином $(x-y)^2+4(z-1)^2=-1$.

Це рівняння не має геометричного сенсу, бо ліва частина не може бути від'ємною для будь-яких дійсних x, y, z.

Приклад. Звести до канонічного виду рівняння $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати:

$4(x^2-2x+1-1)+9(y^2-2y+1-1)+36(z^2-2z+1-1)+13=0$.

$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36$.

Поділимо обидві частини на тридцять шість.

$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{1}=1$ або $\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}+\frac{(z-1)^2}{1^2}=1$

це рівняння еліпсоїда, піввісі якого дорівнюють: $a=3$; $b=2$; $c=1$, а центр знаходиться у точці $O(1;1;1)$.

Приклад. З'ясувати, яку поверхню визначає рівняння $x^2=yz$.

Розв'язання. Треба перейти до нових координат, а саме: зробити поворот на кут, що дорівнює $45°$, від вісі Oy до вісі Oz проти годинникової стрілки. Тоді $x = x'$; $y = y'\cos 45^\circ - z'\sin 45^\circ$; $z = y'\sin 45^\circ + z'\cos 45^\circ$, або $x = x'$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' - z')$; $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y' + z')$, так як $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Підставляючи ці вирази для $x; y; z$ у рівняння $x^2 = yz$ отримаємо: $(x')^2 = \frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{2}$ або $(x')^2 - \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(z')^2}{(\sqrt{2})^2} = 0$.

Це рівняння конусу другого порядку, віссю якого є вісь Oy' у нових координатах.

Список використаних джерел

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М. Наука. 1973. – 720 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова, Высшая математика в упражнениях и задачах ч. I – М. Высш. школа, 1980. – 320 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. Наука. 1985. – 384 с.
4. Станишевский С.О. Вища математика. – Харків. ХНАМГ, 2005, – 270 с.
5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1966. – 366 с.
6. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – Київ: «Видавництво А.С.К.», 2003. – 648 с.
7. Печеніжський Ю.Є., Станішевський С.О., Тихонович О.Ю. Посібник для розв’язування задач з вищої математики. – Х.: ХНАМГ, 2003. – 125 с.

Навчальне видання

БОРАКОВСЬКИЙ Олександр Васильович

Вища математика: конспект лекцій, модуль I (для студентів 1-го курсу денної і заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.040106 – «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування (ЕОНС)»)

Редактор *М. З. Аляб'єв*

План 2009, поз. 66 Л

Підп. до друку 24.12.2009 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,4
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731 від 19.12.2001