Міністерство освіти і науки України

Харківська національна академія міського господарства

О.В. БОРАКОВСЬКИЙ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
МОДУЛЬ І

(для студентів 1-го курсу денної і заочної форм навчання
за напрямом підготовки 6.040106 – «Екологія, охорона навколишнього
середовища та збалансоване природокористування (ЕОНС)»)

Харків – ХНАМГ – 2010

Бораковський О. В. Вища математика: конспект лекцій, модуль I (для студентів 1-го курсу денної і заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.040106 – «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування (ЕОНС)») / О. В. Бораковський; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 105 с.

Автор: О. В. Бораковський

Рецензент: професор кафедри вищої математики Харківської національної академії міського господарства, кандидат технічних наук С. О. Станішевський

У конспекті лекцій наведено стислі теоретичні відомості та їх практичне застосування для розв'язання задач з аналітичної геометрії на площині й у просторі, елементів математичного аналізу, диференціального числення функції однієї змінної, елементів лінійної й векторної алгебри.

Рекомендовано для студентів факультету інженерної екології міст.

Рекомендовано для друку кафедрою вищої математики,
протокол № 3 від 24.10.2009 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В основу конспекту лекцій покладено програми вищої математики для студентів денної і заочної форм навчання факультетів інженерної екології міст і містобудівельного Харківської національної академії міського господарства (ХНАМГ).

Модуль I охоплює такі розділи вищої математики, як аналітична геометрія на площині й у просторі, елементи математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної, елементи лінійної векторної алгебри.

Достатня кількість розв'язаних типових прикладів дає змогу студентам самостійно опанувати даний курс вищої математики й підготуватися до складання іспиту.

Конспект складено на основі курсів лекцій, які читалися автором на факультетах інженерної екології міст і містобудівельному.

Зауваження та пропозиції надсилайте на кафедру вищої математики ХНАМГ за адресою: 61002, м. Харків, вул. Революції, 12.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.1.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1. Прямокутна система координат

На початку XVII ст. французький математик Р. Декарт запропонував ідею сітки або системи для визначення положення та нанесення точки на площину. Для задання системи координат, що має назву декартової, креслимо під прямим кутом дві осі й визначаємо:

1) початок системи координат;
2) додатні напрямки осей;
3) одиницю виміру або масштаб.

Положення кожної точки (скажімо, *A*) може бути описано двома числами: перше стосується горизонтальної осі *OX* (далі вісь абсцис), а друге вертикальної *OY* (далі вісь ординат). Ці два числа називаються декартовими координатами точки.

Відстань *d* між точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ на числовій осі при будь-якому їх розташуванні визначаємо за формулою: $d = |x_2 - x_1|$

Відстань між точками $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$ на площині *XOY* визначаємо за формулою

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Зокрема, відстань від точки $M(x, y)$ до початку координат дорівнює

$$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Координати точки $C(x_c; y_c)$, що ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = \pm\frac{|AC|}{|CB|}$, визначаємо за формулами:

$$\boxed{x_c = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} \qquad y_c = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}}$$

При визначенні λ знак «+» беремо, якщо точка *C* належить відрізку *AB,* «–» якщо *C* не належить відрізку *AB*, але розташована на тій же лінії, що і сам відрізок. Координати середини відрізку (λ=1) визначаємо за формулами:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \overline{y} = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

Площу трикутника *ABC* обчислюємо за так званою мнемонічною формулою

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{array}\right|\begin{array}{l} \text{IV} - \\ \text{V} - \\ \text{VI} - \\ \text{I} + \\ \text{II} + \\ \text{III} + \end{array} = \frac{1}{2}\left|\overbrace{x_A y_B}^{\text{I}} + \overbrace{x_B y_C}^{\text{II}} + \overbrace{x_C y_A}^{\text{III}} - \overbrace{x_B y_A}^{\text{IV}} - \overbrace{x_C y_B}^{\text{V}} - \overbrace{x_A y_C}^{\text{VI}}\right|.$$

Доведемо цей факт. Розглянемо трикутник ABC (рис.1). З елементарної геометрії відомо, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\alpha$, де $a = |AC|$, $b = |CB|$ і α кут між цими сторонами.

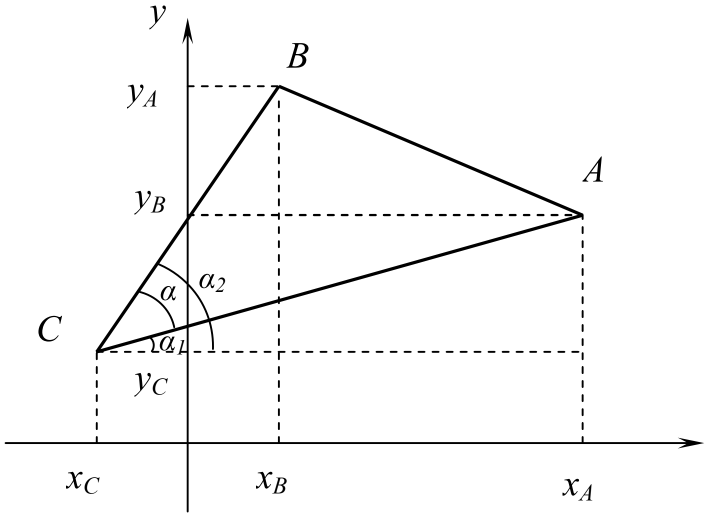


Рис. 1

$$\text{Отже, } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\Big|\,|CA| \cdot |CB| \sin(\alpha_2 - \alpha_1)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|\,|CA| \cdot |CB| (\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|\,|CA|\cos\alpha_1 \cdot |CB|\sin\alpha_2 - |CB|\cos\alpha_2 \cdot |CA|\sin\alpha_1\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|(x_A - x_C)\cdot(y_B - y_C) - (y_A - y_C)\cdot(x_B - x_C)\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\Big|x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_B y_A - x_C y_B - x_A y_C\Big| ,$$

що й треба було довести. Зауважимо, що вираз під знаком модуля буде додатнім, якщо перебіг точок A, B і C йде проти годинникової стрілки й навпаки.

2. Пряма на площині

Будь-яке рівняння першого степеня у декартовій системі координат виду

$$\boxed{Ax + By + C = 0,} \quad \text{де } A^2 + B^2 \neq 0$$

визначає на площині пряму. Це загальне рівняння прямої. Рівняння виду $y = kx + b$, графік якого є пряма, має назву рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = tg\alpha$, де α кут між віссю *OX* та прямою, *b* точка перетину прямої з віссю *OY*. Якщо пряма $Ax + By + C = 0$ не проходить крізь початок координат, тобто $C \neq 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, ми можемо отримати рівняння прямої у відрізках $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,}$ де $a = -\frac{C}{A}$ $\quad b = -\frac{B}{A}$ – відрізки, що відсікаються прямою на координатних осях.

Помножуючи загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак якого протилежний знаку С, отримаємо нормальне рівняння прямої

$$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0},$$

де p – довжина відрізка перпендикуляра до прямої між початком координат і точкою його перетину з нею;

φ – кут між цим перпендикуляром і додатним напрямом вісі *OX*.

Гострий кут між двома прямими $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ обчислюємо за допомогою формули

$$\boxed{tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|},$$

Тоді умова паралельності двох прямих є $\boxed{k_2 = k_1}$, а умова перпендикулярності є $1 + k_1k_2 = 0$ або $\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$.

Рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_1; y_1)$ із заданим кутовим коефіцієнтом k, має вигляд

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}.$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ має вигляд

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}.$$

Кутовий коефіцієнт цієї прямої обчислюємо за формулою $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Якщо $x_2=x_1$, тоді рівняння прямої $x=x_1$.

Якщо $y_2=y_1$, тоді рівняння прямої $y=y_1$.

Відстань d між точкою $M(x_0; y_0)$ і прямою $Ax+By+C=0$ обчислюємо за формулою

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}.$$

Рівняння бісектриси кута між прямими $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$ має вигляд

$$\boxed{\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=0}.$$

Рівняння пучка прямих, що проходять через точку їх перетину, має вигляд:

$$\boxed{A_1x+B_1y+C_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0},$$

де λ – числовий множник.

Приклад. Знайти координати точок *A* і *B* прямої *AB*: $y=2x-4$, якщо x змінюється від -1 до 3.

Розв'язання. $y(-1) = -2 - 4 = -6$, $y(3) = 6 - 4 = 2$.
Тоді $A(-1, -6)$, $B(3, 2)$.

Приклад. Знайти проекцію точки $C(2;3)$ на пряму, що проходить через точки $A(3;0)$ і $B(-3;3)$.

Розв'язання. AB – є рівняння прямої, що проходить через точки *A* і *B*:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A};\ \ \frac{y-0}{3-0}=\frac{x-3}{-3-3};\ \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2};\ \ k_{AB}=-\frac{1}{2}.$$

Тоді кутовий коефіцієнт прямої CN: $k_{CN}=+2$, бо $k_{CN}=-\dfrac{1}{k_{AB}}$ з умови перпендикулярності.

Рівняння прямої, що проходить через точку C з даним кутовим коефіцієнтом, є:

$$y - y_C = k_{CN}(x - x_C); \quad y - 3 = 2(x - 2); \qquad y = 2x - 1.$$

Вирішуючи разом: $\begin{cases} y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} \\ y - 2x - 1 \end{cases}$, знайдемо координати точки $N(1;1)$.

Проекція точки C на пряму AB є точка $N(1;1)$.

Приклад. Маємо координати вершин трикутника ABC: $A(-2;-2)$; $B(4;1)$; $C(0;4)$. Знайти:

1) відстань між точками A та B;
2) рівняння сторін AB, AC;
3) рівняння висоти, що проходить через точку C;
4) площу трикутника ABC;
5) внутрішній кут біля вершини A;
6) довжину висоти, що проходить через точку C;
7) центр ваги трикутника ABC;
8) рівняння прямої, що проходить через центр ваги $(\bar{x};\bar{y})$ трикутника паралельно стороні AC;
9) рівняння медіани, що виходить з вершини C.

Розв'язання. Накреслимо ΔABC використовуючи названі вище методи аналітичної геометрії (рис. 2). Використовуючи названі вище методи аналітичної геометрії знаходимо:

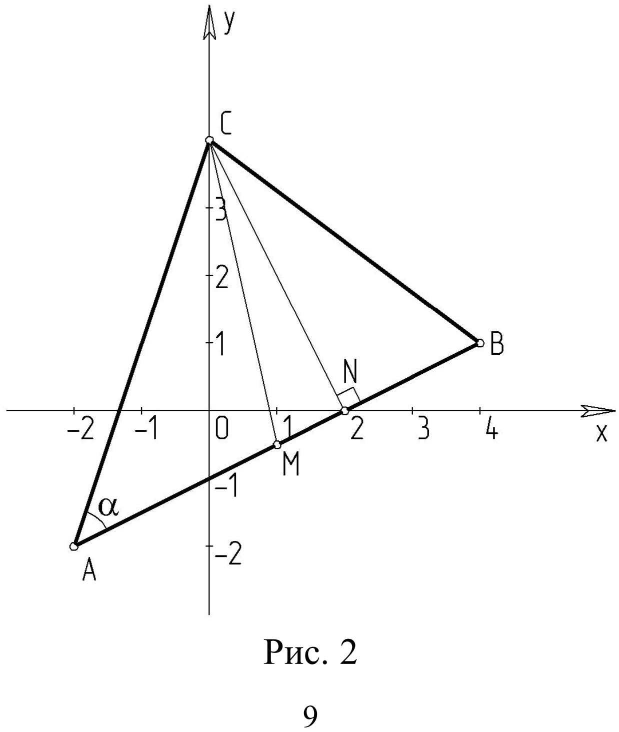


Рис. 2

1) $d_{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4+2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$;

2) $AB:\ \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}$; $\quad \dfrac{y+2}{1+2}=\dfrac{x+2}{4+2}$;

$x-2y-2=0$; $\quad y=\dfrac{1}{2}x-1$; $\quad k_{AB}=\dfrac{1}{2}$;

$AC:\ y=3x+4$; $\quad k_{AC}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{4+2}{0+2}=3$;

3) $y-y_C=-\dfrac{1}{k_{AB}}(x-x_C)$;

$CN:\ k_{CN}=-\dfrac{1}{k_{AB}}$; $\quad y-4=-\dfrac{1}{1/2}(x-0)$; $\quad y=-2x+4$;

4) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{matrix}\right\|$, отже: $\quad S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -2 & -2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & -2 \end{matrix}\right\|=$

$=\dfrac{1}{2}\left|-2+16+0+8-0+8\right|=\dfrac{1}{2}30=15$ (кв. од.);

5) $tg\alpha=\left|\dfrac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}}\right|=\left|\dfrac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}\right|=1$; $\quad \alpha=arctg1=\dfrac{\pi}{4}$;

6) $d_{CN}=\dfrac{\left|1\cdot x_C-2y_C-2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}$;

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|AB\right|d_{CN}=\dfrac{1}{2}3\sqrt{5}\dfrac{10}{\sqrt{5}}=15$, для перевірки;

7) Центр ваги трикутника обчислюємо за формулами:

$\bar{x}=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3}$;

$\bar{y}=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=1$;

8) $\quad y-\bar{y}=k_{AC}(x-\bar{x})$; $\quad y-1=3(x-\dfrac{2}{3})$; $\quad y=3x-1$;

9) знайдемо середину відрізка AB – точку M:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$CM: \quad \frac{y - y_M}{y_C - y_M} = \frac{x - x_M}{x_C - x_M}; \qquad \frac{y + \frac{1}{2}}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{x-1}{0-1};$$

$$-y - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}x - \frac{9}{2}; \quad y = -\frac{9}{2}x + 4.$$

3. Криві другого порядку

Кривою другого порядку на площині називається множина точок, координати яких у даній декартовій системі координат задовольняють наступному рівнянню

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0},$$

де $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Розглянемо найпростіші (канонічні) рівняння кривих другого порядку.

1. Якщо $A = C$, та $B = 0$, маємо рівняння кола.

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених на величину *R*, яка має назву радіус, від даної точки $O_1(a,b)$, що має назву центру:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}.$$

Виконаємо тотожні перетворення цього рівняння:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - R^2 = 0;$$

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0.$$

Тут: $l = -2a$; $m = -2b$; $n = a^2 + b^2 - R^2$.

Якщо $l^2 + m^2 - 4n > 0$, матимемо рівняння дійсного кола;

якщо $l^2 + m^2 - 4n = 0$, маємо точку $O_1\left(-\frac{l}{2}; -\frac{m}{2}\right)$ або $R = 0$;

якщо $l^2 + m^2 - 4n < 0$, маємо уявне коло.

Приклад. Знайти координати центру O_1 і радіус (R) кола:

a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$;

b) $x^2 + 3x + y^2 + y + 2 = 0$.

Розв'язання. Треба виділити повні квадрати: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

a) $\underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 + \underbrace{y^2 + 4y + 4} - 4 + 1 = 0$,

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$; $O_1(1;-2)$; $R = 2$;

b) $\underbrace{x^2 + 2\cdot\frac{3}{2}x + \frac{9}{4}} - \frac{9}{4} + \underbrace{y^2 + 2\cdot\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = 0$,

$(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$; $O_1(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$; $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. *Еліпсом* називається множина точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок, що мають назву фокусів, стала (рівна $2a$), що менша ніж відстань між фокусами ($2c$).

Якщо розташувати декартову систему координат таким чином, що вісь OX проходитиме через фокуси F_1F_2, а вісь OY посередині між ними (рис. 3), то рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

має назву канонічного рівняння. Числа $2a$ і $2b$ представляють довжини великої і малої осей еліпса. Вони зв'язані наступним співвідношенням: $c^2 = a^2 - b^2$.

Точки $(a,0)$; $(-a,0)$; $(0,b)$; $(0,-b)$ мають назви вершин еліпса.

Відношення половини фокальної відстані до половини великої осі називається ексцентриситетом еліпса $\boxed{e = \frac{c}{a}}$.

Ексцентриситет характеризує степінь стискання еліпса, і для еліпсу $e < 1$. Для кола $e = 1$.

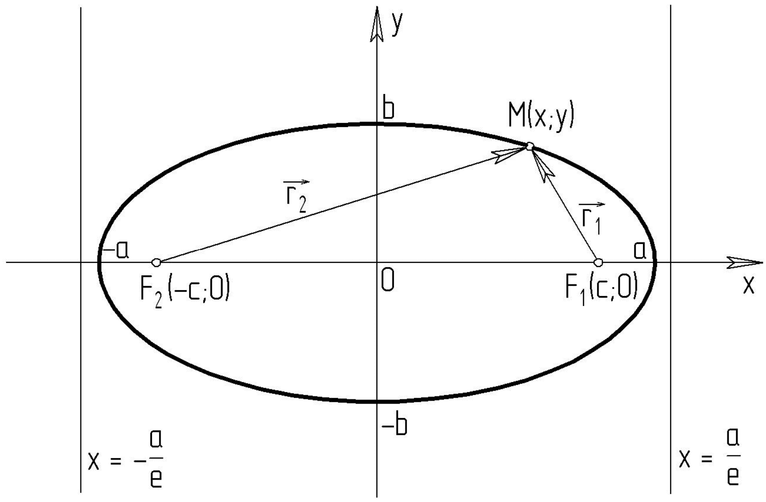


Рис. 3

Отримаємо канонічне рівняння еліпсу:

За означенням: $\left|\overline{r_1}\right| + \left|\overline{r_2}\right| = 2a > 2c$, де $\left|\overline{r_1}\right| = MF_1 = \sqrt{(x-c)+y^2}$;

$\left|\overline{r_2}\right| = MF_1 = \sqrt{(x+c)+y^2}$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2-cx;$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 = a^4-2a^2cx+c^2x^2;$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2);$$

Так як $a > c$, то $a^2-c^2>0$.

Позначимо $b^2 = a^2-c^2$, тоді $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ або $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

3. *Гіперболою* називається множина точок площини, модуль різниці яких від двох даних точок, що мають назву фокусів, є величина стала (що дорівнює $2a$), менша ніж відстань між фокусами ($2c$).

Якщо розташувати декартову систему координат аналогічно попередньому випадку (рис. 4) і виконати відповідні тотожні перетворення виразу: $\left|\overline{r_1}\right| - \left|\overline{r_2}\right| = 2a > 2c$, то отримаємо канонічне рівняння гіперболи $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$.

Числа $2a$ і $2b$ являють собою довжини дійсної і уявної осей гіперболи. Вони зв'язані наступним співвідношенням: $c^2 = a^2 + b^2$.

Точки $(a,0)$ і $(-a,0)$ мають назву вершини гіпербол. Відношення половини фокальної відстані до половини довжини дійсної осі має назву ексцентриситету гіперболи: $\boxed{e = \dfrac{c}{a}}$.

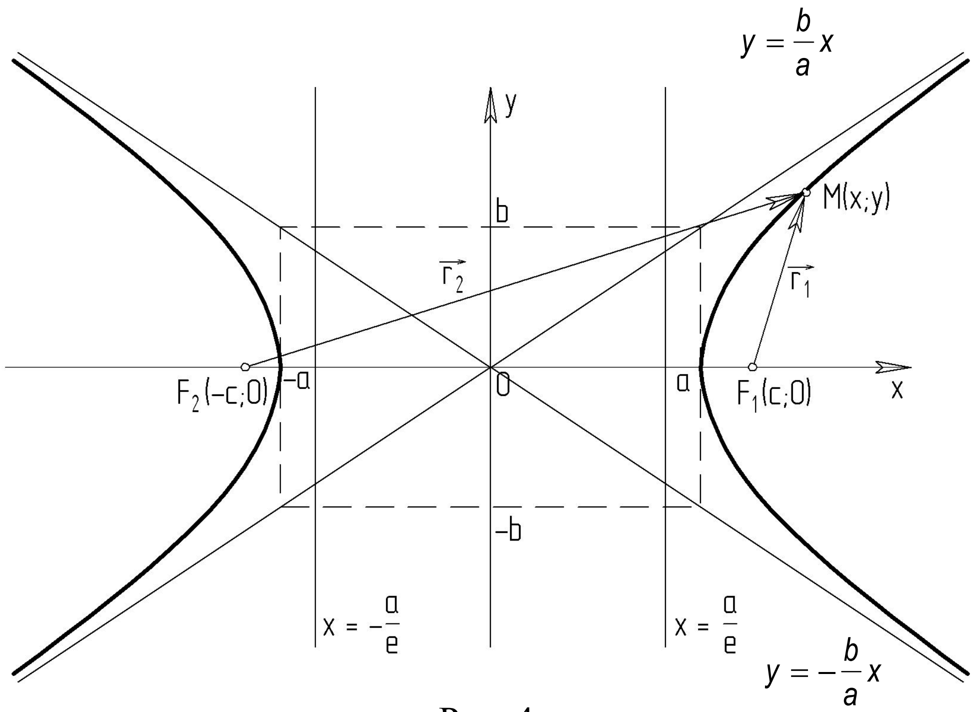


Рис. 4

Для гіперболи $e > 1$.

Прямі $\boxed{y = \pm\dfrac{b}{a}x}$ мають назву асимптот гіперболи. Якщо $a = b$, гіпербола має назву рівнобічної.

Має місце так звана фокально-директоріальна властивість кривих другого порядку, за якою відношення відстаней від будь-якої точки $M(x;y)$ кривої до фокуса і відповідної директриси є стале, що дорівнює ексцентриситету кривої: $\dfrac{\left|\vec{r}_M\right|}{d_M} = e$.

Користуючись фокально-директоріальною властивістю кривих другого порядку, отримаємо канонічне рівняння гіперболи.

Розглянемо рівність $\dfrac{\left|\vec{r}_M\right|}{d_M} = e$ (рис. 4), де $\left|\vec{r}_1\right| = MF_1 = \sqrt{(x+c) + y^2}$;

d_1 – це відстань від точки $M(x;y)$ до правої директриси гіперболи, що має рівняння $x = \dfrac{a}{e}$ або у загальному вигляді $x - \dfrac{a}{e} = 0$.

Вважаючи, що $e = \dfrac{c}{a}$, рівняння правої директриси має вигляд $x - \dfrac{a^2}{c} = 0$.

Тоді $d_1 = \left|x - \dfrac{a^2}{c}\right|$ і матимемо $\dfrac{\sqrt{(x-c^2) + y^2}}{\left|x - \dfrac{a^2}{c}\right|} = \dfrac{c}{a}$; $\dfrac{c\sqrt{(x-c^2)+y^2}}{\left|cx - a^2\right|} = \dfrac{c}{a}$;

$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \left|cx - a^2\right|$;

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4$;

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$;

Оскільки $c > a$, то $c^2 - a^2 > 0$.

Позначимо $b^2 = c^2 - a^2$, тоді $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ або $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

4. *Параболою* називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки – фокуса і від даної прямої – директриси.

Розташувавши декартову систему координат, як зображено на рис. 5, отримаємо наступне канонічне рівняння параболи: $\boxed{y^2 = 2px}$,

де p – параметр параболи, що чисельно дорівнює відстані між фокусом і директрисою. $|\bar{r}| = d$; $|\bar{r}| = x + \dfrac{p}{2}$. Тут $|\bar{r}| = \sqrt{\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Директриса має рівняння $\boxed{x = -\dfrac{p}{2}}$;

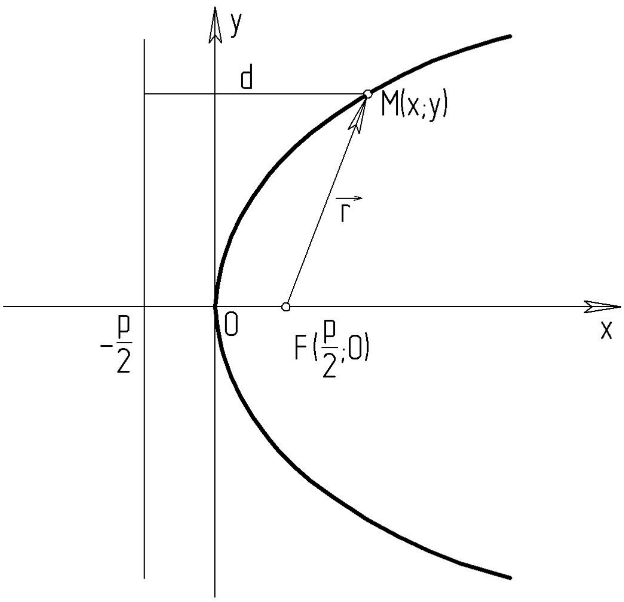


Рис. 5

Зауважимо, що поняття директриси притаманне також еліпсу і гіперболі, що мають по дві директриси, рівняння яких $\boxed{x = \pm\frac{a}{e}}$.

Ці лінії перпендикулярні фокальній осі й розташовані зовні від вершини у випадку еліпса ($e < 1 \Rightarrow |x| > a$) і між вершинами у випадку гіперболи ($e > 1 \Rightarrow |x| < a$). Так, права директриса відповідає правому фокусу, а ліва – лівому.

Приклад. Скласти рівняння парабол:

a) точка $A(1;2)$ належить параболі; OX являє собою вісь симетрії;

b) рівняння директриси параболи $y = -2$.

Розв'язання.

a) $y^2 = 2px$; $2^2 = 2p \cdot 1$; $p = 2$; $y^2 = 4x$;

b) $y = -2$; $-\frac{p}{2} = -2$; $p = 4$; $x^2 = 2py$; $x^2 = 8y$.

Приклад. Скласти рівняння еліпсів: a) точки $A(0;-2)$ і $B\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ лежать на еліпсі;

b) точка $A(0;\sqrt{11})$ є вершиною і $e = \frac{5}{6}$.

Розв'язання. а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; щоб знайти a^2 і b^2 підставимо у рівняння відповідні координати точок A і B.

$$\left.\begin{array}{l} A: \ \frac{0}{a^2}+\frac{(-2)^2}{b^2}=1; \ ; \\ B: \ \frac{15}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1; \end{array}\right\}$$

Розв'яжемо систему і знайдемо a^2 і b^2. З першого рівняння $b^2=4$,

З другого рівняння $\frac{15}{4a^2}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}$; $a^2=5$;

Отже, $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$; $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\frac{y^2}{(2)^2}=1.$

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{0}{a^2}+\frac{11}{b^2}=1$; $b^2=11$

$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{6}$; $c^2=a^2-b^2$; $\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{25}{36}$; $\frac{36}{36}-\frac{11}{a^2}=\frac{25}{36}$;

$\frac{11}{36}=\frac{11}{a^2}$; $a^2=36$; $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$; $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{11})^2}=1.$

Приклад. Скласти рівняння гіпербол:

а) точки $A(3;4)$ та $B(5;4\sqrt{5})$ лежать на гіперболі;

b) точка $A(6;0)$ є вершиною і $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; Розв'язуємо аналогічно попередньому прикладу.

$$\left.\begin{array}{l} A: \ \frac{9}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1 \\ B: \ \frac{25}{a^2}-\frac{80}{b^2}=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbf{-5} \\ \mathbf{+} \end{array}$$

Перше рівняння помножили на -5 і склали з другим. Отримали:

$$\frac{-45}{a^2}+\frac{25}{a^2}+\frac{80}{b^2}-\frac{80}{b^2}=-5+1;\quad \frac{-20}{a^2}=-4;\; a^2=5;$$

$$\frac{25}{5}-\frac{80}{b^2}=1;\quad \frac{80}{b^2}=4;\; b^2=20;\; \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1;\quad \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2}-\frac{y^2}{(2\sqrt{5})^2}=1;$$

b) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1;\quad a=6;\; k=b/a=\sqrt{2}/2;$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 6=3\sqrt{2};\quad \frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2}=1.$$

4. Полярна система координат

Полярна система координат задається точкою *O*, що має назву полюс, і полярною віссю або полярою *OP* (рис. 6) з одиницею вимірювання або масштабом.

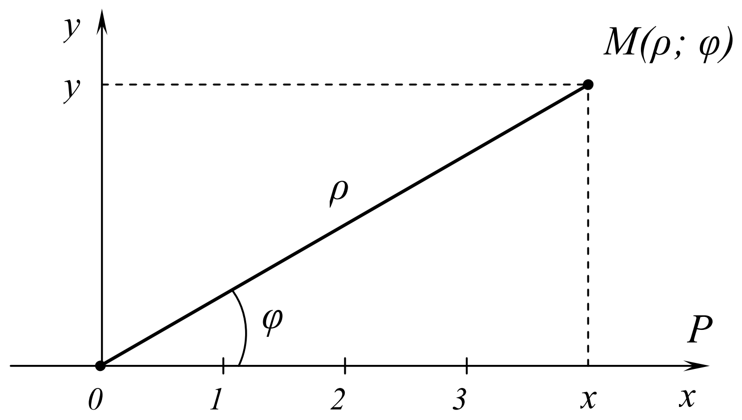


Рис. 6

Положення точки *M* визначається числами ρ і φ, де ρ відстань її від полюса, φ – кут між відрізком *OM* і полярною віссю (відлік кутів ведеться від полярної осі проти годинникової стрілки).

Числа ρ і φ мають назву полярних координат точки М: ρ – полярний радіус, φ – полярний кут. Між множиною усіх точок площини (крім точки O) і множиною впорядкованих пар чисел $(\rho;\varphi)$, де $\rho \geq 0$ і $\varphi \in [-\pi;\pi]$ (або $0 \leq \varphi < 2\pi$), існує взаємно однозначна відповідність. Для точки *O* величина полярного кута не визначена.

Встановимо зв'язок між прямокутними й полярними координатами. Якщо за полюс взяти початок прямокутної системи координат, а за полярну вісь – додатний напрям осі *OX* (рис. 6), прямокутні координати x і y точки M і її полярні координати ρ і φ, окрім полюса, зв’язані наступними формулами:

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}}; \qquad \boxed{\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}}.$$

Приклад. Знайти прямокутні координати точки $A\left(\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$ і полярні координати точки $B\left(-1;\sqrt{3}\right)$, якщо полюс співпадає з початком декартової системи координат, а полярна вісь з додатнім напрямом осі *OX*.

Розв’язання.

$$x = \rho\cos\varphi = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1; \quad y = \rho\sin\varphi = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 1;$$

Таким чином точка $A\left(\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right)$ має декартові координати $A(1;1)$.

Точка B лежить у другій чверті,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; звідси $\varphi = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, де $n \in \mathrm{Z}$.

Таким чином точка $B\left(-1;\sqrt{3}\right)$ має полярні координати $B\left(2;\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Приклад. Побудувати в полярній системі координат криву, яка має назву «лемніската Бернуллі»: $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$, $(a > 0)$.

Розв’язання. Перейдемо до полярних координат:

$(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = a^2(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$ або $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Звідси $\rho = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Знак «$\pm$» вказує на той факт, що крива симетрична відносно полюса. Область допустимих (можливих) значень кута φ

знаходимо з нерівності: $\cos 2\varphi \geq 0$; $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k \in Z$. Оскільки $\cos 2\varphi$ – парна функція, то крива буде симетрична відносно полярної осі.

Таким чином достатньо побудувати криву в першій чверті і скористатися умовами симетрії.

Для першої чверті $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{4}$ з кроком $\dfrac{\pi}{16}$ сформуємо таблицю:

φ	0	$\dfrac{\pi}{16}$	$\dfrac{\pi}{8}$	$\dfrac{3\pi}{16}$	$\dfrac{\pi}{4}$
ρ	a	$\approx 0{,}96a$	$\approx 0{,}84a$	$\approx 0{,}62a$	0

Отже, ρ спадає від a до 0. Будуємо лемніскату Бернуллі (рис.7).

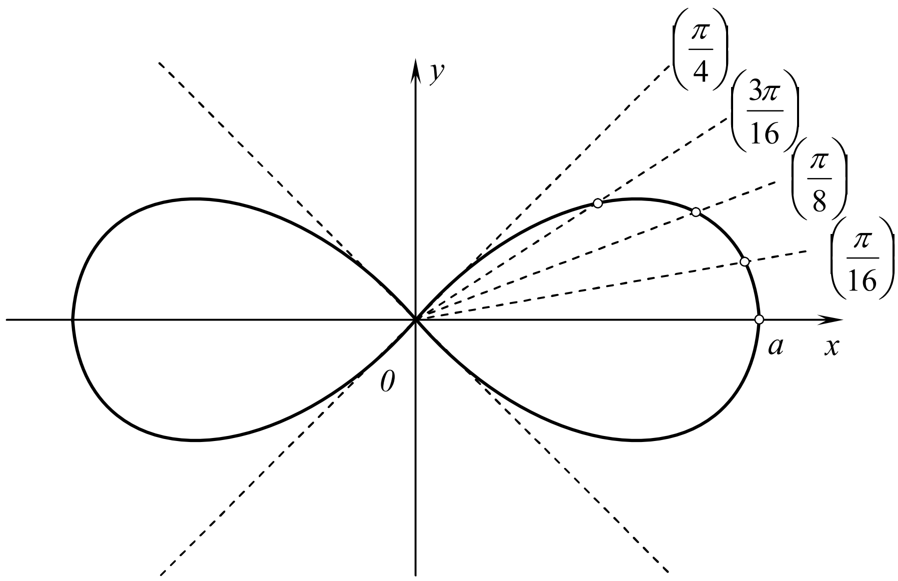


Рис. 7

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.2.
ВСТУП ДО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Змінні і сталі величини. Функції

У природі існує безліч фізичних величин, таких як час, швидкість об'єм, маса, тиск, температура та ін. Математика вивчає числові значення цих величин. Величина, яка набігає різних числових значень (наприклад зі збігом часу) називається змінною, а яка не змінює своїх значень – сталою.

Існують абсолютні сталі, такі як швидкість світла у вакуумі с=300000 км/сек., відношення довжини кола до діаметру $\pi = 3{,}14159\ldots$

Сукупність всіх числових значень змінної величини називається її областю визначення, яку можна зобразити точками числової осі. Областю визначення змінної величини може бути точка, інтервал, сегмент, або уся числова ось.

Змінні величини можуть бути зростаючими, спадаючими, обмеженими, упорядкованими, утворювати числові послідовності.

З поняттям функція ми стикаємося, коли досліджуємо змінну однієї величини в залежності від зміни іншої.

Якщо ми маємо дві непустих множини X та Y і кожному елементу x, що належить множині X $\left(x \in X\right)$ по деякому правилу поставлений у відповідність один і тільки один елемент із множини Y $\left(y \in Y\right)$, то кажуть, що на множині X задана функція f або відображення, що переводять елементи множини X у елементи множини Y. Цей факт записується так $X \xrightarrow{f} Y$, або $f : X \to Y$, або $y = f(x)$.

Множина X має назву області визначення функції $D\{f\}$, а множина Y – області значень функції $E\{f\}$. Значення функції $f(x)$ при $x = a$ позначається $f(a)$. Областю визначення функції може бути точка, інтервал, сегмент, або їх сукупність, або уся числова ось.

Графіком функції $y = f(x)$ є множина точок площини $x0y$ з координатами $(x; f(x))$, де $x \in X$.

Функція $f(x)$, область визначення якої симетрична відносно нуля, має назву парної, якщо $f(-x) = f(x)$ для будь якого значення $x \in X$.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат. Приклади парних функції: $y = x^2$, $y = x^4$, $y = \cos x$.

Функція $f(x)$, область визначення якої симетрична відносно нуля, має назву непарної, якщо $f(-x) = -f(x)$ для будь якого значення $x \in X$ **.**

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Приклади непарних функції: $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$.

Функція $f(x)$ має назву періодичної, якщо існує таке додатнє число *T*, яке має назву періода функції, що для усіх $x \in X$ виповнюється рівність $f(x+T) = f(x)$.

Основним періодом функції називають найменше число τ, що має таку властивість. Функції можуть задаватися таблично, графічно та аналітично. Розглянемо основні елементарні функції та їх графіки.

Степенева функція $y = x^a$, $a \in R$, рис.8.

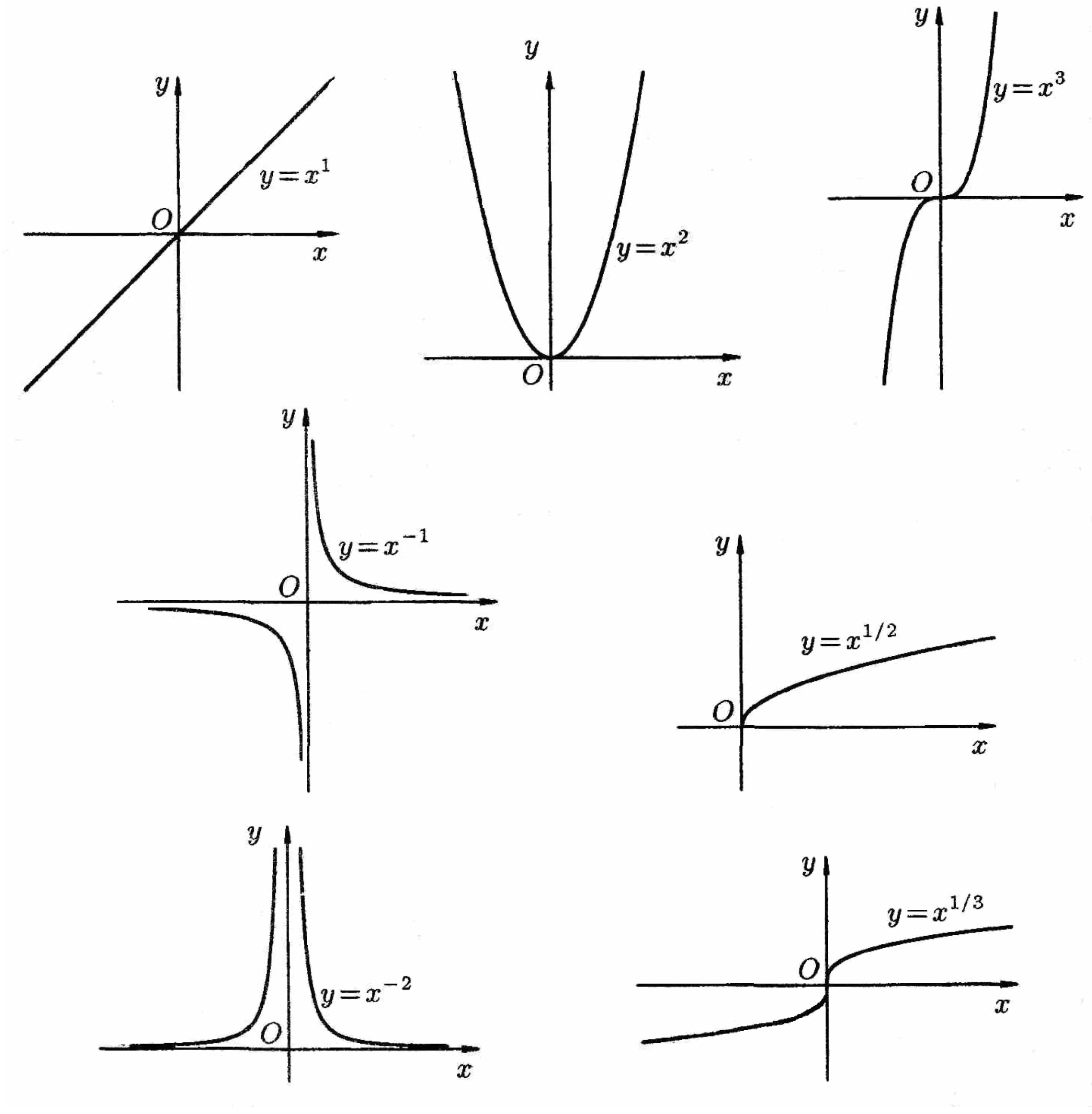


Рис. 8

Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Рис. 9.

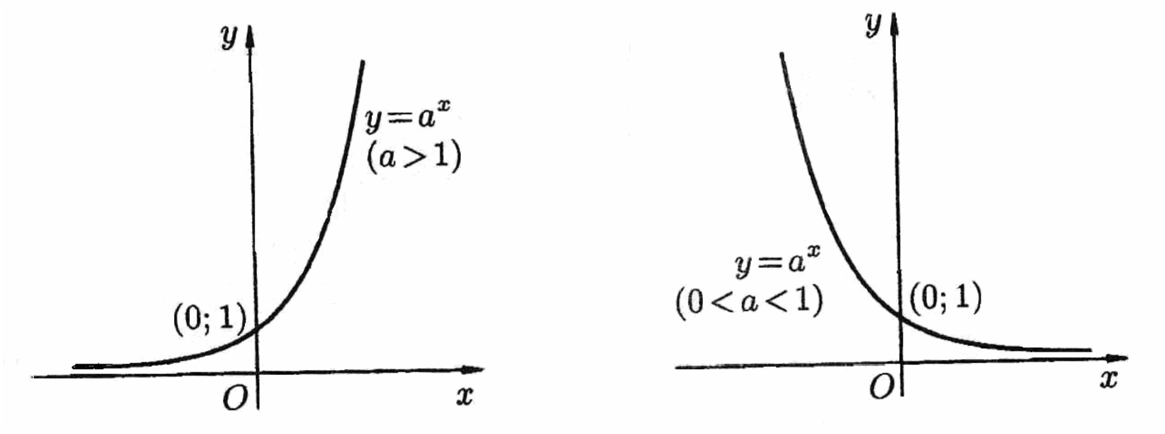


Рис. 9

Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Рис. 10.

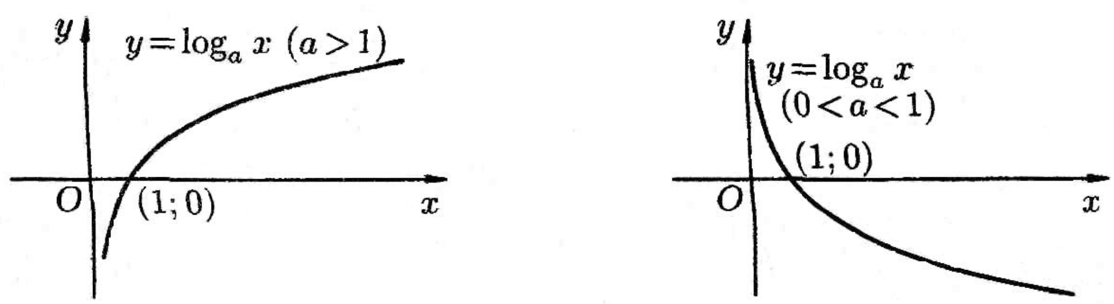


Рис. 10

Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$. Рис. 11.

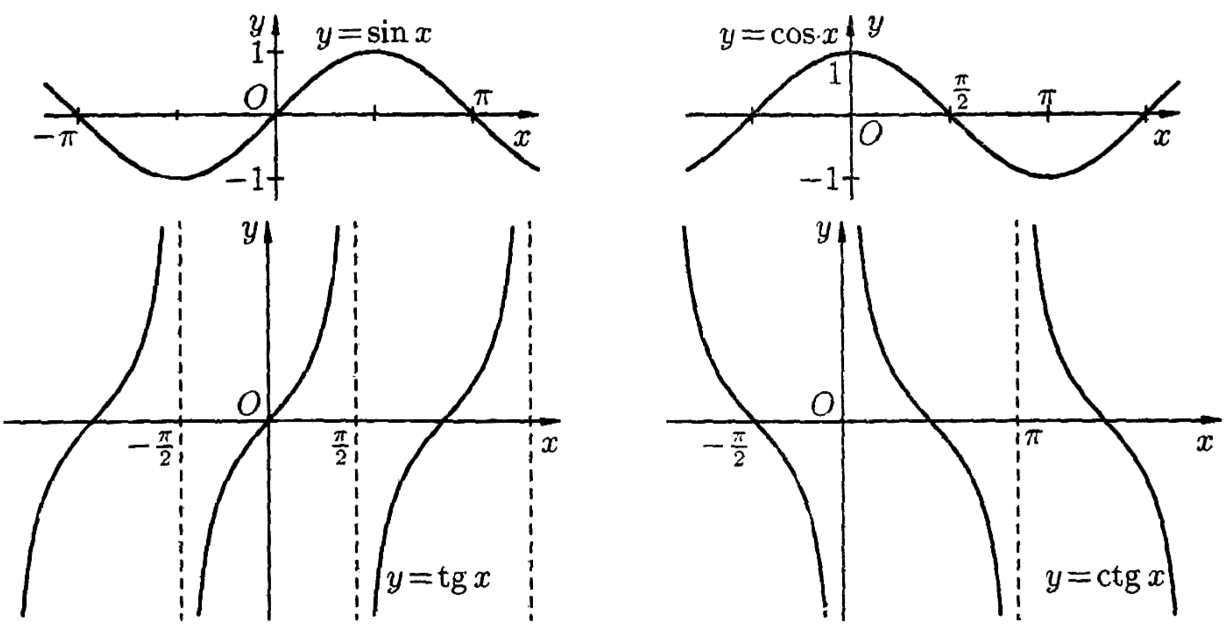


Рис. 11

Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$. Рис. 12.

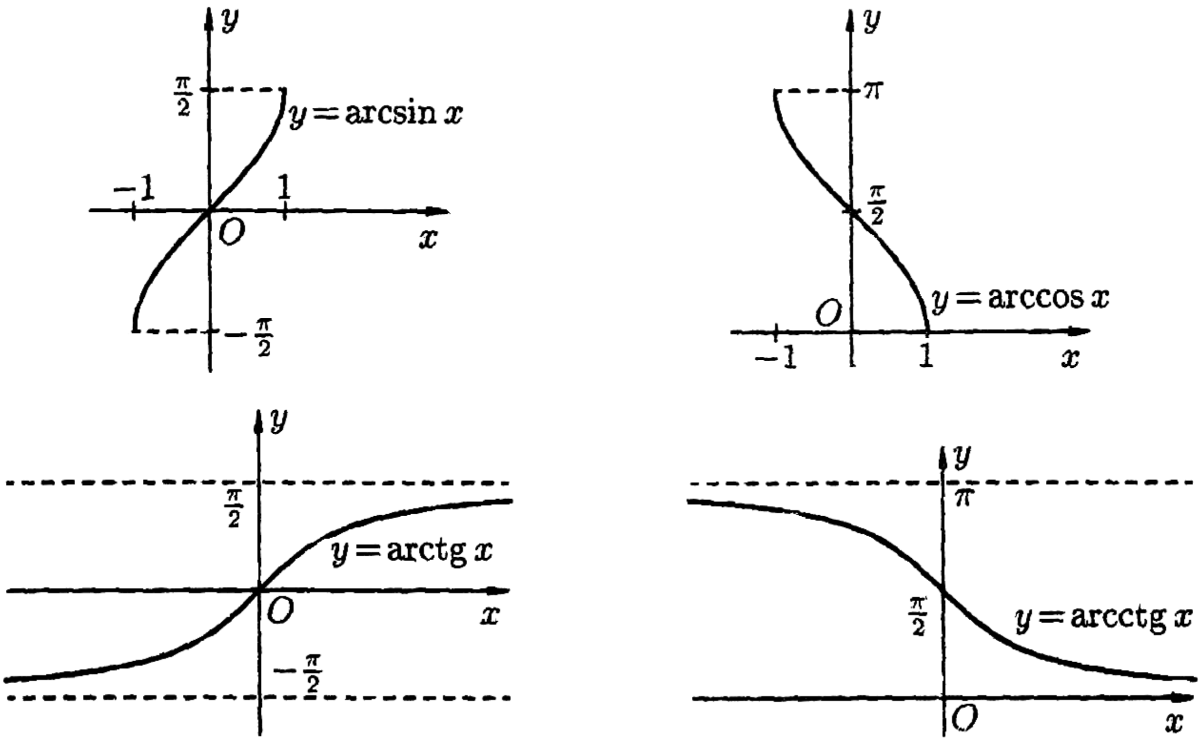


Рис. 12

При побудуванні графіків функцій використовується побудування «по точкам»; дії з графіками (додавання, віднімання, множення графіків); перетворення графіків (зсув, розтягування).

Виходячи з графіка $y = f(x)$ побудуємо:

1) $y = f(x-a)$ - графік зсунуто вздовж осі *ox* на величину а вправо *(a>0)*;

2) $y = f(x)+b$ - графік зсунуто вздовж осі *oy* на величину *b* угору *(b>0)*;

3) $y = Af(x)$ - графік розтягнуто вздовж осі *oy* у А разів;

4) $y = f(kx)$ - графік розтягнуто у $\frac{1}{k}$ разів вздовж осі *ox* (стиснуто у *k* разів).

Таким чином, маючи графік $y = f(x)$, можемо побудувати графік функції $y = Af\left[k(x-a)\right]+b$.

2. Теорія границь

Числова послідовність $x_1, x_2, x_3, ... x_n, ...$ це функція $x_n = f(n)$, що задана на множині натуральних чисел.

Коротко послідовність позначається $\{x_n\}$, або x_n, $n \in N$ де x_1 – перший член послідовності, x_2 – другий, … , x_n – загальний член послідовності.

Послідовність $\{x_n\}$ має назву обмеженої, якщо існує таке число $M>0$, що для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \le M$.

Наприклад $x_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$.

У протилежному випадку вона має назву необмеженої.

Наприклад: $S_n = \{2, 5, 10, ..., n^2 + 1, ...\}$.

Послідовність $\{x_n\}$ має назву зростаючої (неспадаючої), якщо для будь-якого *n* виконується нерівність $x_{n+1} > x_n$, $(x_{n+1} \ge x_n)$.

Послідовність $\{x_n\}$ має назву спадаючої (незростаючої), якщо для будь-якого *n* виконується нерівність $x_{n+1} < x_n$, $(x_{n+1} \le x_n)$.

Усі ці послідовності мають назву монотонних. Якщо усі члени послідовності дорівнюють одному і тому ж числу *c* вона має назву постійної.

Число *a* має назву границі числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого, наперед даного довільно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, існує номер *N* (взагалі кажучи, залежний від ε, $N = N(\varepsilon)$), що для всіх $n > N$, $|x_n - a| < \varepsilon$. Коротше це записується так:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ if\ \ \forall\varepsilon > 0,\ \exists N(N = N(\varepsilon)), \\ \forall n > N, \quad |x_n - a| < \varepsilon \end{array}}$$

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

За визначенням число 1 є границею послідовності $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, $n \in N$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує $(\exists)$ натуральне число N, таке, що для усіх $n>N$ виконується нерівність $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, тобто $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Звідси $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ тобто для усіх $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, де $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ – ціла частка числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Якщо $\varepsilon > 1$, то за N можна узяти $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Таким чином $\forall \varepsilon > 0$ знайдене відповідне значення N, що й доказує, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$. ■

Число A є границею функції $y = f(x)$, коли x прямує до a $(x \to a)$, якщо для будь-якого, наперед даного, довільно малого, додатного числа $\varepsilon > 0$, існує таке число $\delta > 0$ (взагалі кажучи, залежне від ε $(\delta = \delta(\varepsilon))$, що як тільки $|x - a| < \delta$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$. Коротше це записується так:

$$\boxed{a = \lim_{x\to a} f(x),\ if\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ (\delta = \delta(\varepsilon)),\ |x-a| < \delta,\quad |f(x) - A| < \varepsilon}$$

Аналогічно $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, якщо $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$.

Умовно запишемо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, якщо $|f(x) > M|$, при $|x - a| < \delta$, де M довільне додатне число. У цьому разі функція $f(x)$ має назву нескінченно великої при $x \to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$.

Деякі властивості нескінченно малих $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$:

1) Добуток двох нескінченно малих є нескінченно мала більш високого порядку по відношенню до співмножників: тобто якщо $\gamma = \alpha \cdot \beta$, то $\gamma = 0(\alpha)$, $\gamma = 0(\beta)$ (гамма є 0 мале від альфа і є 0 мале від бета).
2) Нескінченно малі α і β еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх різниця $\alpha - \beta = \gamma$ є нескінченно мала більш високого порядку по відношенню до α, або β, тобто $\gamma = 0(\alpha)$, $\gamma = 0(\beta)$.

3) Якщо частка від ділення двох нескінченно малих має границю, то ця границя не змінюється, якщо кожну з них замінити на еквівалентну тобто якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=m,\ \alpha\sim\alpha_1,\ \beta\sim\beta_1$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=m$.

Нагадаємо, що $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні при $x\to a$ $(\alpha\sim\beta)$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Розглянемо порівняння нескінченно малих α *і* β.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}1,\ \alpha(x)\ \text{еквівалентна}\ \beta(x),\ \alpha(x)\sim\beta(x),\\ 0,\ \alpha(x)\ \text{нескінченно мала більш високого порядку ніж}\ \beta(x),\\ \alpha(x)=0(\beta(x)),\\ m<\infty,\ \alpha(x)\ \text{і}\ \beta(x)\ \text{нескінченно малі одного і того ж порядку},\\ \infty,\ \beta(x)\ \text{нескінченно мала більш високого порядку ніж}\ \alpha(x).\end{cases}$$

Корисно мати на увазі еквівалентність наступних нескінченно малих при $x\to 0$: $\sin x\sim x;$ $\operatorname{tg} x\sim x;$ $\arcsin x\sim x;$ $\operatorname{arctg} x\sim x;$ $\ln(1+x)\sim x;$ $e^x\text{-}1\sim x.$

Якщо α^k та β - нескінченно малі одного й того ж порядку, то, нескінченно мала β має порядок $k>0$ по відношенню до α.

Приклад. Порівняти нескінченно малі $\alpha=t\sin^2 t$ и $\beta=3t^2\sin t$ при $t\to 0$.

Розв'язання. Знайдемо $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{t\sin^2 t}{3t^2\sin t}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=\dfrac{1}{3}$, тобто α та β нескінченно малі одного й того ж порядку.

Якщо $x<a$ і $x\to a$, то використовують запис $x\to a-0$.
Якщо $x>a$ і $x\to a$, то – $x\to a+0$. Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ й $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ мають назву відповідно лівої та правої границі функції $f(x)$ при $x\to a$. Щоб $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ необхідно і достатньо, щоб $f(a-0)=f(a+0)$.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має границю що дорівнює A, то її можна представити як суму числа A й нескінченно малої $\alpha(x)$, тобто, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x : 0 < |x - a| < \delta$, тобто $|f(x) - A - 0| < \varepsilon$, а це означає, що функція $f(x) - A$ має границю, що дорівнює нулю, тобто є нескінченно малою, яку позначимо $\alpha(x)$: $f(x) - A = \alpha(x)$. А звідси $f(x) = A + \alpha(x)$. ■

Теорема (обернена). Якщо функцію $f(x)$ можна представити у вигляді суми числа A і нескінченно малої $\alpha(x)$ при $x \to a$, то число A є границею функції $f(x)$, тобто якщо $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Доведення. Нехай $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to a$, тобто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x) < \varepsilon|$. А так як за умовою $f(x) = A + \alpha(x)$, то $\alpha(x) = f(x) - A$. Отримаємо $|f(x) - A| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Практичне обчислення границь базується на наступних теоремах, у яких будемо рахувати, що границі $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$ існують. (Доведення, коли $x \to \infty$ аналогічне). ■

Теорема. Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) границь.

Доведення. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$.

Нехай $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$.

Тоді $f(x) + \varphi(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x))$,

де $\alpha(x) + \beta(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to a$, як сума нескінченно малих.

З попередньої теореми $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+\varphi(x)\right]=A+B$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Таке ж доведення приводимо у випадку різниці двох функцій. Теорема виконується для алгебраїчної суми скінченої кількості функцій. ■

Теорема. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь цих функцій. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Доведення. Доведення аналогічне попередньому.

Так як $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$; $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$,

то $f(x)=A+\alpha(x)$; $\varphi(x)=B+\beta(x)$, де

де $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to a$.

Тоді $f(x)\cdot\varphi(x)=(A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x))$, або $f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B+\left[A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)\right]$, де вираз у дужках є нескінченно мала функція і ми матимемо $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Теорема виконується для будь-якої скінченої кількості функцій. ■

Слідство. Постійний множник можна виносити за знак границі.

$$\lim_{x\to a}c\cdot f(x)=c\lim_{x\to a}f(x)$$

Доведення. $\lim\limits_{x\to a}c\cdot f(x)-\lim\limits_{x\to a}c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)$ ■

Теорема. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границя знаменника не дорівнює нулю.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\qquad \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$$

Доведення. Доведення аналогічне попередньому.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$; $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = B$,

то $f(x) = A + \alpha(x)$; $\varphi(x) = \beta + \beta(x)$, тоді

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} = \frac{A}{B} + \left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B}\right) =$$

$$= \frac{A}{B} + \left(\frac{AB + B\alpha(x) - AB - A\beta(x)}{B^2 + B\beta(x)}\right) = \frac{A}{B} + \left(\frac{B\cdot\alpha(x) - A\beta(x)}{B^2 + B\beta(x)}\right).$$

Друга дріб є нескінченно мала функція, тому $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$. ■

У теорії границь важливе місце займають перша і друга чудові границі:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, – перша чудова границя;

$\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = e$, – друга чудова границя, де e = 2,71828… – ірраціональне число;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$.

Для доведення першої чудової границі доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Доведення. З тригонометричних тотожностей маємо:

$\cos x = 1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$, тобто $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}\right)$,

але $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| < |\sin x|$, і тому $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{x}{2} = 0$.

Таким чином $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=1-2\left(\lim\limits_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2}\right)^2=1-0=1.$ ■

Доведемо першу чудову границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\ x}{x}=1.$

Доведення. Розглянемо частину кола радіуса одиниця, рис. 13.

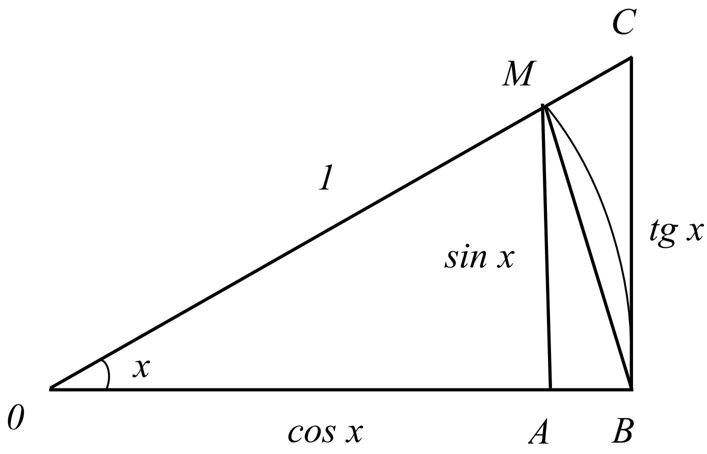


Рис. 13

Позначимо радіальну міру кута *MOB* за *x*. Нехай $0<x<\frac{\pi}{2}$.

На малюнку $|AM|=\sin x$, дуга *MB* чисельно дорівнює центральному куту *x*, $|BC|=tg\ x$.

Наочно маємо $S_{\Delta MOB}<S_{сектора\,MOB}<S_{\Delta COB}$.

Тоді $\frac{1}{2}\sin\ x<\frac{1}{2}\ x<\frac{1}{2}tg\ x$. Поділимо на $\frac{1}{2}\sin\ x>0$:

$1<\frac{x}{\sin\ x}<\frac{x}{\cos\ x}$ або $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

Так як $\lim\limits_{x\to 0}\cos\ x=1$ і $\lim\limits_{x\to 0}1=1$, то змінна $\frac{\sin\ x}{x}$ розташована між двома величинами, які мають одну й ту ж границю, яка дорівнює 1, отже, за теоремою про стиснуту змінну, маємо $\lim\limits_{x\to 0}\sin\ x=1$.

Нехай тепер $x<0$. Маємо $\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x)}{-x}$, де $-x>0$.

Звідси $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} \dfrac{\sin\ x}{x} = 1$, а тому $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\ x}{x} = 1$. ■

Для неперервної функції (див. нижче) має місце граничний перехід

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Усі елементарні функції неперервні в області визначення. Розглянемо розкриття невизначеностей наступних видів: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞.

Приклад. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{x^3 + 4x + 4} = \dfrac{2 + 3 - 4}{-1 - 4 + 3} = -1$.

Після підстановки замість *x* мінус одиниці, не маючи невизначеностей, отримаємо відповідь.

Розглянемо $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ многочлени порядку *n* і *m* відповідно, $n \in N$ і $m \in N$.

Для розкриття невизначеностей виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ скорочуємо чисельник і знаменник на старший ступінь *x* чисельника або знаменника і користуємось умовною таблицею.

$c \cdot 0 = 0$; $\quad c \cdot \infty = \infty$; $\quad \dfrac{0}{c} = 0$; $\quad \dfrac{\infty}{c} = \infty$

$\dfrac{c}{0} = \infty$; $\quad \dfrac{0}{\infty} = 0$; $\quad$ де $c=const.$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2x - 1} = \left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\| = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{5x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{2}{1} = 2$,

$\left(\begin{matrix} n = 2; \\ m = 2; \end{matrix} \quad n = m\right)$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+1}{x^3-x^2+3x}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^4}{x^3}-3\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}}=,$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1}=\infty,\qquad \begin{pmatrix} n=4; & \\ m=3; & n>m \end{pmatrix}.$

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+10}{x^3-2x^2+5}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x^2}-7\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{10}{x^2}}{\dfrac{x^3}{x^2}-2\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}=,$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-2}=0,\qquad \begin{pmatrix} n=2; & \\ m=3; & n<m \end{pmatrix}.$

Зазначимо, що при $n=m$ границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших ступенях x у чисельнику і знаменнику. Якщо ж $n<m$, – то нулю; $n>m$, – то нескінченості.

Розглянемо обчислення границь від раціональних функцій виду

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{0}{0}.$$

Для розкриття невизначеності такого виду треба зробити алгоритмічні перетворення у чисельнику і знаменнику метою яких є виділення множника виду $(x-x_0)$, що прямує до нуля. Це можна зробити розкладаючи многочлени на множники, ураховуючи формули:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;\qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b\pm 3ab^2+b^3;$$

$$a^2\pm b^2=(a+b)(a-b);\qquad a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\pm ab+b^2\right),$$

або поділивши многочлени на множник $(x-x_0)$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^3-x^2-1}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(2x^2+x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{2x^2+x+1}=\dfrac{3}{4}.$

Тут виконали ділення многочлена на двочлен наступним чином:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 1 & x - 1 \\ \underline{2x^3 - 2x^2} \quad & 2x^2 + x + 1 \\ x^2 - 1 & \\ \underline{x^2 - x} & \\ x - 1 & \\ \underline{x - 1} & \\ 0. & \end{array}$$

Для усунення невизначеностей у разі ірраціональних виразів, треба домножити чисельник і знаменник на спряжений вираз.

Приклад. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} = \left\| \dfrac{0}{0} \right\|$.

/Домножимо чисельник і знаменник на $\sqrt{x+2} + 2$, розкладемо $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$/

$$\lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 2 - 4}{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(2+2)(\sqrt{2+2} + 2)} = \frac{1}{16}.$$

Для розкриття невизначеності виду $\infty - \infty$ треба застосувати елементарні перетворення для зведення їх до невизначеностей виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ або $\dfrac{0}{0}$.

Приклад.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \infty - \infty = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Розглянемо приклади обчислення границь за допомогою першої і другої чудових границь і порівняння нескінченно малих.

Приклад. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{k \sin kx}{kx} = k \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{kx} = k$.

Тут використали першу чудову границю.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty} 1+\left(\frac{5}{3x}\right)^{2x}=\left\|1^{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{\frac{3x}{5}\cdot\frac{5\cdot 2x}{3x}}=e^{\frac{10}{3}}$

Тут використали другу чудову границю.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^{\frac{5x}{2}}=\left\|1^{\infty}\right\|.$

Спочатку виділимо цілу частку:

$$\frac{x+4}{x-2}=\frac{x-2+2+4}{x-2}=1+\frac{6}{x-2}$$

Або так: $\frac{x+4}{x-2}=1+\frac{x+4}{x-2}-1=1+\frac{x+4-x+2}{x-2}=1+\frac{6}{x-2}$.

Тепер треба виділити у показнику ступеня вираз, обернений до дробової частини:

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-2}\right)^{\frac{5x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{6}}\right]^{\cdot\frac{6}{x-2}\cdot\frac{5x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{6}}\right]^{\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x}{2}}=e^{15}$$

Границя виразу у квадратних дужках дає число e, а границя степеня дорівнює 15.

Приклад.

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sqrt{1-\cos 4x}}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\begin{matrix} tg3x\sim 3x, \quad x\to 0 \\ 1-\cos 4x=2\sin^2 2x\sim 2\cdot 2x\cdot 2x\end{matrix}\right\|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{2(2x)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Тут і далі скористалися еквівалентними нескінченно малими величинами.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin 3x}$.

$1-\cos^2 2x=\sin^2 2x\sim(2x)^2, \quad x\sin 3x\sim x\cdot 3x, \quad x\to 0.$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot 2x}{x\cdot 3x}=\frac{4}{3}$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{arcsin2x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\begin{matrix} 3^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x\ln 3 \\ arcsin2x\underset{x\to 0}{\sim} 2x\end{matrix}\right\|=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{2x}=\frac{\ln 3}{2}$.

Приклад.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\(x-2)\to 0}} \frac{2^x-4}{\sin\pi x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\| \begin{array}{l} x-2=z,\ z\to 0 \Rightarrow x=2+z \\ 2^x-4=2^{2+z}-2^2=2^2(2^z-1) \underset{z\to 0}{\sim} 2^2 z\ln 2 \\ sin\pi x = sin(2\pi+\pi z) = \sin\pi z \underset{z\to 0}{\sim} \pi z \end{array} \right\| =$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{4z\ln 2}{\pi z} = \frac{4\ln 2}{\pi}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\left(1+x^2\right)^3} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \left\| \begin{array}{l} \cos 2x = 1-1+\cos 2x = 1-(1-\cos 2x) = 1-2\sin^2 x \\ \ln(\cos 2x) = \ln\left(1+\left(-2\sin^2 x\right)\right) \sim -2\sin x \sim -2x^2 \\ \ln\left(1+x^2\right)^3 = 3\ln\left(1+x^2\right) \sim 3x^2,\ x\to 0 \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{3x^2} = -\frac{2}{3}.$$

Обчислення інших границь розглянемо нижче у розділі правило Лопіталя.

3. Неперервність функції

Функція $f(x)$ має назву неперервної у точці a, якщо: 1) вона визначена у деякому околі точки a; 2) існує границя $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) ця границя дорівнює значенню функції у точці а, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Існує інше визначення неперервності функції. Функція $f(x)$ називається неперервною у точці a, тоді і тільки тоді, коли у цій точці нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції: $\lim\limits_{x\to a} \Delta f(x) = 0$, де $\Delta f = f(x) - f(a)$, $\Delta x = x - a$.

Функція $f(x)$ неперервна у деякій області (інтервалі, сегменті, тощо) якщо вона неперервна у кожній точці цієї області.

Точка *а*, що належить області визначення функції, включаючи границю, має назву точки розриву, якщо у цій точці не виконуються умови неперервності функції.

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ та $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, причому не усі три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ дорівнюють одне одному, то точка *а* – точка розриву першого роду.

Точки розриву першого роду поділяються на точки усувного розриву, коли $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$ і точки стрибка, коли $f(a-0) \neq f(a+0)$. Різниця $f(a+0) - f(a-0)$ має назву стрибка функції $f(x)$ у точці *а*.

Точками розриву другого роду називають точки розриву, що не є точками розриву першого роду. У точках розриву другого роду не існує хоча б одна з односторонніх границь.

Сума і добуток скінченого числа неперервних функцій є неперервною функцією.

Частка двох неперервних функцій є неперервна функція у тих точках, де дільник не дорівнює нулю.

Приклад. Дослідити на розрив функцію $y = arctg\dfrac{1}{x-5}$.

Розв'язання. Якщо $x \to 5-0$, то $\dfrac{1}{x-5} \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to 5-0} arctg\dfrac{1}{x-5} = -\dfrac{\pi}{2}$.

Якщо $x \to 5+0$, то $\dfrac{1}{x-5} \to \infty$, $\lim\limits_{x\to 5+0} arctg\dfrac{1}{x-5} = \dfrac{\pi}{2}$.

Стрибок функції $\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$. $x = 5$ – точка розриву першого роду.

Приклад. Показати, що функція $y = \dfrac{x}{x-5}$ має розрив при $x = 5$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 5-0} \dfrac{x}{x-5} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 5+0} \dfrac{x}{x-5} = +\infty$, тобто скінченних границь немає. Тоді $x = 5$ – точка розриву другого роду.

4. Похідна

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_1 та x_2 – значення аргументу, а $y_1 = f(x_1)$ та $y_2 = f(x_2)$ відповідні значення функції $y = f(x)$. Різниця $\Delta x = x_2 - x_1$ – приріст аргументу, а різниця $\Delta y = y_2 - y_1$ – приріст функції на відрізку $[x_1; x_2]$.

Похідною від функції $y = f(x)$ по аргументу x називається граничне відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, або $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Похідну позначають також $\frac{dy}{dx}$.

Поняття похідної використовують у багатьох галузях науки, особливо при вивченні швидкості перебігу різних процесів. Якщо функція $y = f(x)$ описує закон руху матеріальної точки, то похідна визначає швидкість цієї точки у даний момент часу. Взагалі похідна це швидкість зміни функції у точках.

З геометричної точки зору похідна представляє кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x.

Пошук похідної має назву диференціювання функції.

Основні правила диференціювання.

Нехай c – стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають похідні, тоді:

1) $c' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(cu)' = cu'$; 5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

7) якщо $y = f(u)$, а $u = u(x)$, тобто $y = f[u(x)]$, то $y'_x = y'_u \cdot y'_x$ – це правило диференціювання складної функції;

8) $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y}$ – правило диференціювання оберненої функції.

Приклад. Спираючись на визначення похідної знайти похідну від $y = x^2$.

Розв'язання. Надамо приріст аргументу Δx. Знайдемо приріст функції $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2 + \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Знайдемо границю відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x\Delta x) = 2x.$$

Таким чином $(x^2)' = 2x$. Аналогічно отримують похідні від інших елементарних функцій. Нижче подано таблицю похідних для функції $u = u(x)$.

1) $c' = 0$

2) $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$

3) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

4) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

5) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$

6) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$

7) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a\cdot u'$

8) $\left(e^u\right)' = e^u u'$

9) $\left(\sin u\right)' = \cos u\cdot u'$

10) $\left(\cos u\right)' = -\sin u\cdot u'$

11) $\left(\mathrm{tg}u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$

12) $\left(\mathrm{ctg}u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

13) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

14) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

15) $\left(\mathrm{arctg}u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

16) $\left(\mathrm{arcctg}u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

17) $\left(\mathrm{sh}u\right)' = \left(\dfrac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \mathrm{ch}u\cdot u'$

18) $\left(\mathrm{ch}u\right)' = \left(\dfrac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \mathrm{sh}u\cdot u'$

19) $\left(\mathrm{th}u\right)' = \left(\dfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u}\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{sh}u\cdot u}\cdot u'$

20) $\left(\mathrm{cth}u\right)' = \left(\dfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u}\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}u\cdot u}\cdot u'$

Розглянемо приклади.

Приклад. Знайти похідну $y = \ln\sin x$.

Розв'язання. Маємо $y = \ln u$, де $u = \sin x$; $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' =$

$= \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\, x$.

Приклад. Знайти похідну $y = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$.

Розв'язання. $y' = 2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)' = 2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) \cdot$

$\cdot\left(\cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = -\cos x$.

Для знаходження функції, що задана неявно $f(x, y) = 0$ необхідно продиференціювати обидві частини цієї рівності, ураховуючи правило диференціювання складеної функції. Потім розв'язуємо рівняння першого ступеня відносно y'.

Приклад. Знайти похідну $xy^2 - \ln y = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо обидві частини цієї рівності $1 \cdot y^2 + x2yy' - \frac{y'}{y} = 0$; звідси $y' = -\frac{y^2 \cdot y}{2xy^2 - 1} = \frac{y^3}{1 - 2xy^2}$.

Якщо функція аргументу x задана у параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, або $\boxed{y'_t = \frac{y'_t}{x'_t}}$.

Приклад. Знайти похідну y'_x якщо $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

Розв'язання. $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctg\, t$.

Звільняючись від параметра t маємо $y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{x \cdot a}{a \cdot y} = -\frac{x}{y}$.

Логарифмічне диференціювання застосовується у двох випадках:

1) коли функція має вигляд змінної у змінному ступеню і 2) коли функція складається з трьох або більше множників у чисельнику або знаменнику.

У цих випадках спочатку логарифмуємо рівність $y = f(x)$, а потім візьмемо похідну від обох частин рівності і знайдемо y'.

Приклад. Знайти похідну $y = x^x$.

Розв'язання. Логарифмуємо обидві частини $\ln y = \ln x^x = x \ln x$; беремо похідну від обох частин рівності $\ln y = x \cdot \ln x$.

Маємо $\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$. Таким чином $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$.

Звідси $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

Приклад. Знайти похідну $y = \frac{x^2(x-1)^3}{(2x+1)^4}$.

Розв'язання. Логарифмуємо $\ln y = \ln \frac{x^2 \cdot (x-1)^3}{(2x+1)^4} =$

$= \ln x^2 + \ln(x-1)^3 - \ln(2x+1)^4 = 2\ln x + 3\ln(x-1) - 4\ln(2x-1)$.

Беремо похідну від обох частин. $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4 \cdot 2}{2x+1}$.

Звідси $y' = y\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{8}{2x+1}\right) = \frac{x^2(x-1)^3}{(2x+1)^4} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4 \cdot 2}{2x+1}\right)$.

Так як з геометричної точки зору похідна дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної функції $y = f(x)$, у точці x_0, то рівняння дотичної матиме вигляд $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Якщо дотична паралельна осі OY, її рівнянням буде $x = x_0$. Нормаль до кривої $y = f(x)$ перпендикулярна дотичній. Враховуючи умову перпендикулярності, рівняння нормалі матиме вигляд $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Якщо ж нормаль паралельна осі OX, її рівняння буде $y = y_0$.

Приклад. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3 - 3x^2 - 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Знайдемо ординату точки дотику $y = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 = -4$.

Кутовий коефіцієнт дотичної k дорівнює $k = y'(x_0) = 3x^2 - 6x = 3 - 6 = -3$. Тоді рівняння дотичної матиме вигляд $y + 4 = (-3)(x - 1)$ або $y = -3x - 1$, а рівняння нормалі – $y + 4 = -\frac{1}{-3}(x - 1)$ або $y = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3}$.

Кут між двома кривими $y = f_1(x)$; $y = f_2(x)$ у точці їх перетину $M(x_0; y_0)$ обчислюється як кут між дотичними до цих кривих у точці M.

Тангенс цього кута знайдемо за формулою $tg\varphi = \dfrac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)}$.

Фізичний сенс похідної це швидкість руху точки у момент часу t_0, якщо точка рухається прямолінійно за законом $S = S(t)$, тобто $v = S(t)$.

Розглядаючи похідні більш високих порядків відзначимо, що похідною другого порядку або другою похідною функції $y = f(x)$ називається похідна від її першої похідної, тобто $y'' = (y')'$. Другу похідну позначають ще й так $y^n = \dfrac{\partial^n y}{\partial x^n} = (y^{n-1})'$.

Якщо $S = S(t)$ закон прямолінійного руху точки, то друга похідна від путі по часу $\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ є прискорення руху цієї точки.

Якщо функція задана у параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то похідні більш високих порядків обчислюються по формулам $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$;

$y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)_t}{x'_t}$; $y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$ і так далі.

Наприклад. $y''_{xx} = \dfrac{x'_t\, y''_{tt} - x''_{tt}\, y'_t}{(x'_t)^2 x'_t} = \dfrac{y''_{tt}\, x'_t - x''_{tt}\, y'_t}{(x'_t)^3}$.

5. Диференціал

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту аргумента (рис. 14).

Диференціалом аргумента називається приріст аргумента $dx = \Delta x$. Диференціал функції дорівнює добутку похідної на диференціал аргументу

$dy = f'(x)\,dx$.

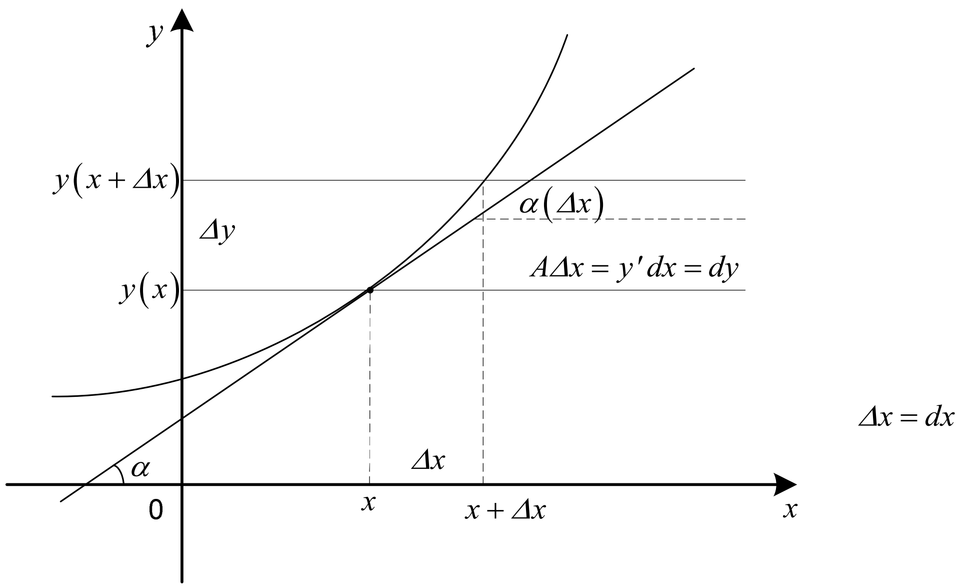


Рис. 14

З геометричної точки зору диференціал є приріст ординати дотичної до графіка функції у точці $M(x; y)$.

Основні властивості диференціала:

1) $dc = 0$, де $c = const$;

2) $dcu = cdu$;

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

4) $d(uv) = udv + vdu$;

5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$; $(v \neq 0)$;

6) $df(u) = f'(u)du$.

Приріст функції дорівнює диференціалу (головна частина приросту) і величині більш високого порядку малості ніж Δx.

$$\boxed{\Delta y = dy + 0(\Delta x)}\ .$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $0(\Delta x)$ тим паче прямує до нуля. Таким чином при, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \approx dy$, або $y(x+\Delta x) - y(x) \approx dy = y'(x)\Delta x$.

Тоді $$\boxed{y(x+\Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x}\ .$$

Ця формула використовується для наближених обчислень, якщо Δx мале.

Приклад. Обчислити наближене значення $\sqrt[4]{16{,}2}$.

Розв'язання. $\sqrt[4]{16{,}2} = (16+0{,}2)^{\frac{1}{4}}$, де $x = 16$, $\Delta x = 0{,}2$.

Тоді $(16+0{,}2)^{\frac{1}{4}} \approx (16)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}16^{-\frac{3}{4}} \cdot 0{,}2$, так як $\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$.

Звідси $\sqrt[4]{16{,}2} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt[4]{16 \cdot 16 \cdot 16}} = 2 + \frac{0{,}1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2 + \frac{0{,}1}{16} = 2{,}00625$.

Диференціалом другого порядку називається диференціал від диференціала першого порядку: $d^2 y = d(dy)$. Взагалі $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Диференціали другого і вищого порядку обчислюються за формулами: $d^2 y = y''(dx)^2$; $d^3 y = y''(dx)^3$; $d^n y = y''(dx)^n$.

Приклад. Обчислити диференціали першого, другого і третього порядку від функції $y = (ax+b)^3$.

Розв'язання. $dy = 3(ax+b)^2 \cdot adx$; $d^2 y = 6(ax+b) \cdot a^2 (dx)^2$; $d^3 y = 6a \cdot a^2 (dx)^3 = 6a^3 (dx)^3$.

6. Основні теореми диференціального числення

Розглянемо теореми, що мають велике теоретичне й прикладне значення.

Теорема Ролля (теорема про корені похідної). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційована на інтервалі (a,b) і $f(a)=f(b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c\in(a,b)$ в якій $f'(c)=0$.

Доведення. Так як функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то вона досягає свого найбільшого M й найменшого значення m на цьому відрізку.

Якщо $M=m$, то $f(x)$ стала на $[a,b]$,тоді $f'(x)=0$ у будь-якій точці відрізку і теорема доведена.

Якщо $M\neq m$, то $f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці, так як $f(a)=f(b)$.

Нехай $f(c)=M$, де $c\in(a,b)$: $f(c)\geq f(x)$.

Тоді $f(c+\Delta x)-f(c)\leq 0$ як при $\Delta x>0$ так і при $\Delta x<0$.

Отже $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leq 0$, коли $\Delta x>0$,

$\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geq 0$, коли $\Delta x<0$.

Перейдемо до границі при $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\leq 0,\ \text{коли}\ \Delta x>0;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\geq 0,\ \text{коли}\ \Delta x<0,$$

а це можливо лише тоді, коли $f'(c)=0$. Геометрично це означає що дотична до графіка $y=f(x)$ у точці c паралельна осі абсцис.

Якщо ж $f(a) = f(b) = 0$, то це означає, що між двома коренями функції існує хоча б один корінь похідної. ■

Теорема Коші. (про відношення приросту двох функцій). Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, диференційовані на інтервалі (a,b), причому $\varphi'(x)$ ніде не обертається у нуль, то знайдеться така точка $c \in (a,b)$, що $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

<u>Доведення.</u> Зауважимо, що $f(b) - f(a) \neq 0$, так як якщо $f(b) - f(a) = 0$, то за теоремою Ролля знайдеться така точка c, де $\varphi'(c) = 0$, а це не так, за умовою теореми.

Визначимо число Q рівністю $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$, складемо допоміжну функцію $F(x) = f(x) - f(a) - Q[\varphi(x) - \varphi(a)]$. Ця функція задовольняє умовам теореми Ролля: неперервна і диференційована на $[a,b]$, $F(b) = F(a) = 0$. Тоді знайдеться хоча б одна точка $x = c \in (a,b)$, така, що $F'(c) = 0$. Але $F'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, отже $F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0$, звідси $Q = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Тоді $\dfrac{f(a) - f(b)}{\varphi(a) - \varphi(b)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, що й треба було довести. ■

Теорема Лагранжа (про скінченні прирости функції). Якщо функція $f(x)$ неперервна і диференційована на відрізку $[a,b]$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a,b)$, така що $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

<u>Доведення.</u> Теорема Лагранжа є частковим випадком теореми Коші. Дійсно, поклавши $\varphi(x) = x$, знаходимо $\varphi(b) - \varphi(a) = b - a$, $\varphi'(x) = 1$, $\varphi'(c) = 1$. Тоді з формули $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, або $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, що й треба було довести. ■

Геометрично це означає, що на дузі графіка функції $y = f(x)$ знайдеться точка C між A і B, у якій дотична паралельна хорді, яка з'єднує точки A і B (рис. 15).

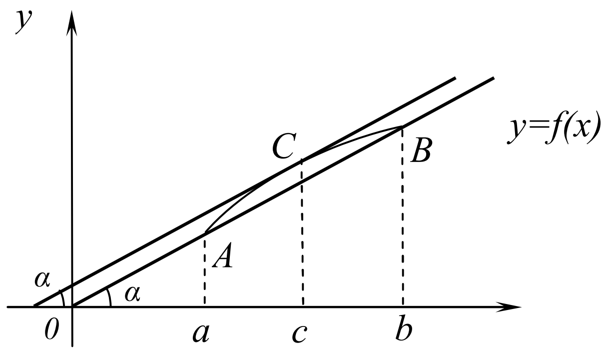


Рис. 15

Правило Лопіталя розкриття невизначеностей.

Теорема. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовані у ε-околі точки x_0 і $\varphi'(x) \neq 0$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, тобто частка у точці $x = x_0$ представляє собою невизначеність виду $\frac{0}{0}$, або $\frac{\infty}{\infty}$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, при умові, що існує границя відношення похідних. Доведення спирається на доведення теореми Коші при умові, що $x \neq a$, $x_0 \in (a, x)$ і $f(a) = \varphi(a) = 0$. Тоді $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$.

Якщо частка $\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$ у точці $x = x_0$ також є невизначеність виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ і похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють відповідним умовам, то переходимо до відношення других похідних і так далі.

У випадку невизначеностей виду $0 \cdot \infty$ або $\infty \cdot \infty$ треба провести алгебраїчні перетворення.

Наприклад. $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ або $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$.

У випадку невизначеностей виду 0^0, ∞^0, 1^∞ треба прологарифмувати дану функцію і знайти границю її логарифма, або скористатися наступною таблицею:

a) $\infty^0 = e^{\ln \infty^0} = e^{0\cdot\ln\infty} = e^{0\cdot\infty} = e^{\frac{0}{1/\infty}} = e^{\frac{0}{0}}$;

b) $0^0 = e^{\ln 0^0} = e^{0\cdot\ln 0} = e^{0\cdot\infty} = e^{\frac{0}{1/\infty}} = e^{\frac{0}{0}}$;

c) $1^\infty = e^{\ln 1^\infty} = e^{\infty\cdot\ln 1} = e^{\infty\cdot 0} = e^{\frac{0}{1/\infty}} = e^{\frac{0}{0}}$.

Розглянемо приклади.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-tgx}{2x^3} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{6x^2} = \left\|\dfrac{0}{0}\right\| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}}{12x} = -\dfrac{1}{6}$.

Приклад.

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{1}{e^x-e^a}e^x} = e^{-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = e^{-a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x}{1} = 1.$$

Приклад $\|\infty-\infty\|$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{\ln x + (x-1)\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}x^{\sin x} = \left\|0^0\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}} = e^0 = 1.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \left\|1^\infty\right\| = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x} = \left\|e^{\frac{0}{0}}\right\| = e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x)\cdot 2}{2x}} =$

$$= \left\|\begin{matrix}\sin 2x \ \sim \ 2x \\ cos 2x \underset{x\to 0}{\to} 1\end{matrix}\right\| = e^{-3\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}} = e^{-6}.$$

7. Застосування похідної

Умови монотонності функції. Екстремуми

Функція $f(x)$ називається зростаючою у точці x_0, якщо при достатньо малому $h > 0$ виконуються умови

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h).$$

Функція $f(x)$ називається спадаючою у точці x_0, якщо при достатньо малому $h > 0$ виконуються умови

$$f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h).$$

Функція $f(x)$ називається зростаючою на інтервалі (a,b), якщо для будь яких двох точок x_1 та x_2, що належать (a,b), за умови $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $f(x)$ називається спадаючою на інтервалі (a,b), якщо для будь яких двох точок x_1 та x_2, що належать (a,b), за умови $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Ознаки зростання та спаду функцій

1) Якщо $f'(x_0) > 0$, то функція $f(x)$ зростає у точці x_0.
2) Якщо $f'(x_0) < 0$, то функція $f(x)$ спадає у точці x_0.

Значення $f(x_0)$ називається максимумом функції $f(x)$, якщо при достатньо малому $h > 0$ виконуються умови

$$f(x_0 - h) < f(x_0) \text{ та } f(x_0 + h) < f(x_0).$$

Точка x_0, у цьому випадку, має назву точки максимуму функції.

Значення $f(x_0)$ називається мінімумом функції $f(x)$, якщо при достатньо малому $h > 0$ виконуються умови

$$f(x_0 - h) > f(x_0) \text{ та } f(x_0 + h) > f(x_0).$$

Точка x_0, у цьому випадку, має назву точки мінімуму функції.

Максимум і мінімум функції називаються екстремумами функції, а точка максимуму або мінімуму – точкою її екстремуму.

Необхідна умова існування екстремума

Теорема. Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має у точці x_0 екстремум, то, її похідна у цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$, або не існує.

Доведення цієї теореми спирається на теорему Ролля.

Точка x_0 у якій $f'(x_0) = 0$ має назву стаціонарної точки.

Точки у яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує мають назву критичних точок першого роду. Не кожна критична точка є точкою екстремуму. Розглянемо достатні умови екстремуму.

Перша умова.

Теорема. Якщо неперервна функція $y = f(x)$ диференційована у ε-околі критичної точки x_0 (крім, може бути, самої цієї точки) при переході через цю точку зліва направо $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то функція $f(x)$ у точці x_0 має максимум, а якщо з мінуса на плюс, то функція $f(x)$ у точці x_0 має мінімум.

Доведення. Розглянемо ε-окіл точки x_0. Нехай виконуються умови:

$f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ і $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Тоді функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0)$ і спадає на інтервалі $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Отже значення функції $f(x)$ у точці x_0 є найбільшим на інтервалі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, тобто $f(x) < f(x_0)$ для усіх $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, а це й означає, що точка x_0 – точка максимуму функції.

Графічно інтерпретація доведення теореми представлена на рис. 16.

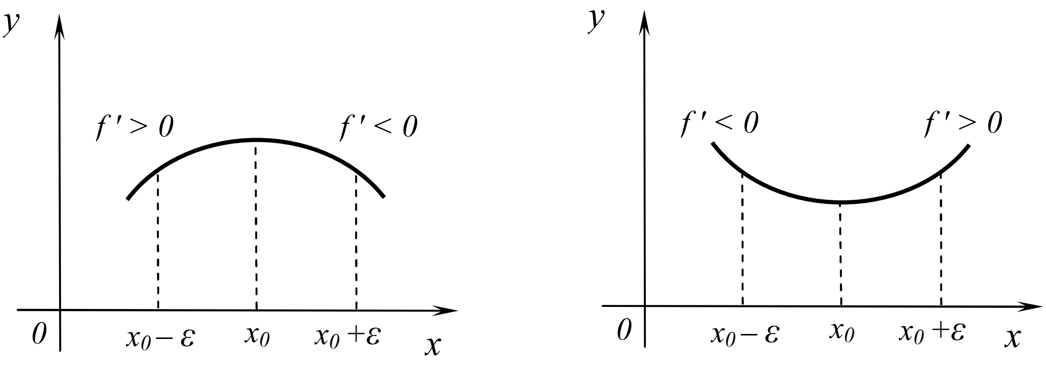


Рис. 16

Аналогічно доведення теореми у випадку, коли $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ і $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. ■

Якщо при переході через критичну точку перша похідна не змінює знак, то екстремуму у цій точці функція не має.

Друга умова.

Теорема. Якщо у точці x_0 перша похідна дорівнює нулю $(f'(x_0) = 0)$, а друга похідна існує і не дорівнює нулю$(f''(x_0) \neq 0)$, то якщо $(f''(x_0) < 0)$, функція $f(x)$ у точці x_0 має максимум, а якщо $f''(x_0) > 0$, то мінімум.

Доведення. Нехай для визначеності $f''(x_0) > 0$.

Так як $f''(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$,

то $\dfrac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0$ у ε - околі точки x_0.

Якщо $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, а якщо $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$

А це означає, що при переході через точку x_0 перша похідна змінює знак з мінуса на плюс. Тоді за попередньою теоремою x_0 – є точка мінімуму. Якщо ж $f''(x_0) < 0$, доведення аналогічне і в точці x_0 функція $f(x)$ має максимум. ■

Опуклість та угнутість графіка функції. Точка перегину

Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим на інтервалі (a,b), якщо він розташований нижче дотичної, що проведена у будь якій точці цього інтервалу (рис. 17).

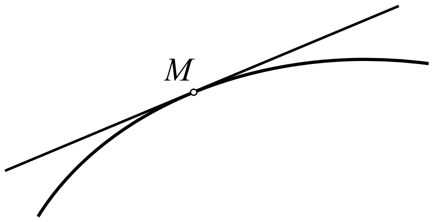


Рис. 17

Графік функції $y = f(x)$ називається угнутим на інтервалі (a,b), якщо він розташований вище дотичної, що проведена у будь якій точці цього інтервалу (рис. 18).

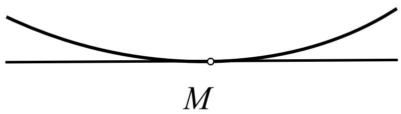


Рис. 18

Точка P графіка функції, що відділяє опуклість від угнутості має назву точки перегину (рис. 19).

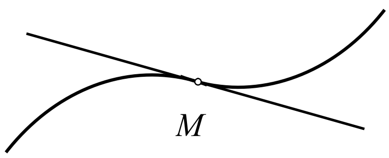


Рис. 19

Якщо x_0 – абсциса точки перегину, то друга похідна функції у цій точці $f''(x_0)$ дорівнює нулю, або не існує. Такі точки мають назву критичних точок другого роду.

Достатня умова опуклості (угнутості) графіка функції така. Якщо $f''(x) < 0$ для усіх $x \in (a,b)$, то графік функції опуклий на інтервалі (a,b); якщо ж $f''(x) > 0$ для усіх $x \in (a,b)$, то графік функції угнутий на інтервалі (a,b).

Достатня умова існування точок перегину. Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, у якій вона дорівнює нулю, або не існує, змінює знак, то точка x_0 – є точкою перегину графіка функції.

Доведення. Нехай $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) > 0$ при $x > x_0$.

$\Downarrow$

Це означає що зліва від точки x_0 графік функції опуклий, а справа – угнутий. Отже точка графіка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину.

Аналогічно доводиться, що якщо $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) < 0$ при $x > x_0$, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Якщо ж друга похідна при переході через точку x_0 знак не змінює, – ця точка не є точкою перегину. ■

Асимптоти графіка функції

Пряма L називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань точки $M(x, y)$ кривої від прямої L прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки вздовж кривої від початку координат (тобто при прямуванні хоча б однієї з координат точки до нескінченності).

Пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, або $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існує границя $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо існують границі.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx \right], \text{ або}$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - kx \right]$$

План дослідження і побудови графіка функції

При побудові графіка функції $y = f(x)$ треба з'ясувати його характерні особливості. Зробимо це за планом.

1. Область визначення функції $D\{y\}$; область існування $E\{y\}$; нулі функції: $x = 0$, $y = 0$; (точки перетину з осями координат), характерні точки, інтервали знакопостійності, точки розриву.
2. Парність, непарність, періодичність функції. Якщо функція не обладає властивостями парності, вона має назву функції загального вигляду.
3. y' Інтервали зростання та спаду (інтервали монотонності) функції. Екстремуми.
4. y'' Інтервали опуклості та угнутості функції. Точки перегину.
5. Асимптоти: вертикальна $|$; горизонтальна $-$; похила $/$.
6. Побудова графіка функції.

Приклад. Побудувати графік функції $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції $D\{y\}$: $(x-1)^2 \neq 0$, $x \neq 1$.

Область існування функції $E\{y\}$: $y \in (-\infty; +\infty)$.

$x = 1$ точка розриву другого роду $\lim\limits_{x\to-1\pm0} \dfrac{x^3}{2(x-1)^2} = \infty$,

звідси $x = 1$ вертикальна асимптота.

Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Знаменник функції завжди додатний, за винятком точки $x = 1$. Отже якщо $x > 0$, то й $y > 0$; $x < 0$, то й $y < 0$.

2. Оскільки область визначення не симетрична відносно нуля, то функція загального виду. Перевіримо цей факт. $y(-x) = \dfrac{(-x)^3}{2(-x-1)^2} = -\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

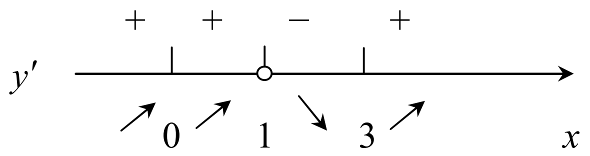
Отже $y(-x) \neq y(x)$ і $y(-x) \neq -y(x)$.

3. Для визначення інтервалів монотонності і екстремумів, знайдемо першу похідну, розглянемо точки, де вона дорівнює нулю і не існує, – критичні точки першого роду.

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{2(x-1)^4} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{2(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3},$$

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3} = 0,$$

$x^2 = 0$, x=0, x − 3=0, x= 3, $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$.

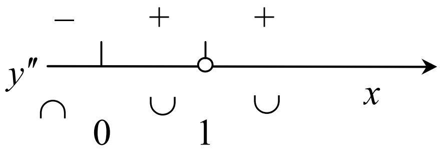


Таким чином функція зростає при $x \in (-\infty;0) \cup (0;1) \cup (3;+\infty)$ і спадає при $x \in (1;3)$. Екстремуму, а саме мінімуму функція досягає при $x = 3$.

$$y_{min}(3) = \frac{27}{2 \cdot 4} = \frac{27}{8}.$$

4. Для визначення інтервалів опуклості та угнутості і точок перегину, знайдемо другу похідну і розглянемо критичні точки другого роду.

$$y'' = \frac{1}{2}\frac{(x-1)^3(3x^2-6x) - (x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{3x}{(x-1)^4} = 0, \quad x = 0, \quad x \neq 1.$$



Отже при $x \in (-\infty;0)$ графік опуклий, а при $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$ графік угнутий. $x = 0$ – точка перегину.

5. Асимптоти. Вертикальну | ми знайшли – це $x = 1$.

Розглянемо поведінку функції при x прямує до нескінченності.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=+\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=-\infty,$$

Отже горизонтальних асимптот – немає.

Знайдемо похилі асимптоти / $y = kx + b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{2}x\right)\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{2(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=1.$$

Таким чином $y=\frac{1}{2}x+1$ похила асимптота.

Тепер будуємо графік функції (рис. 20).

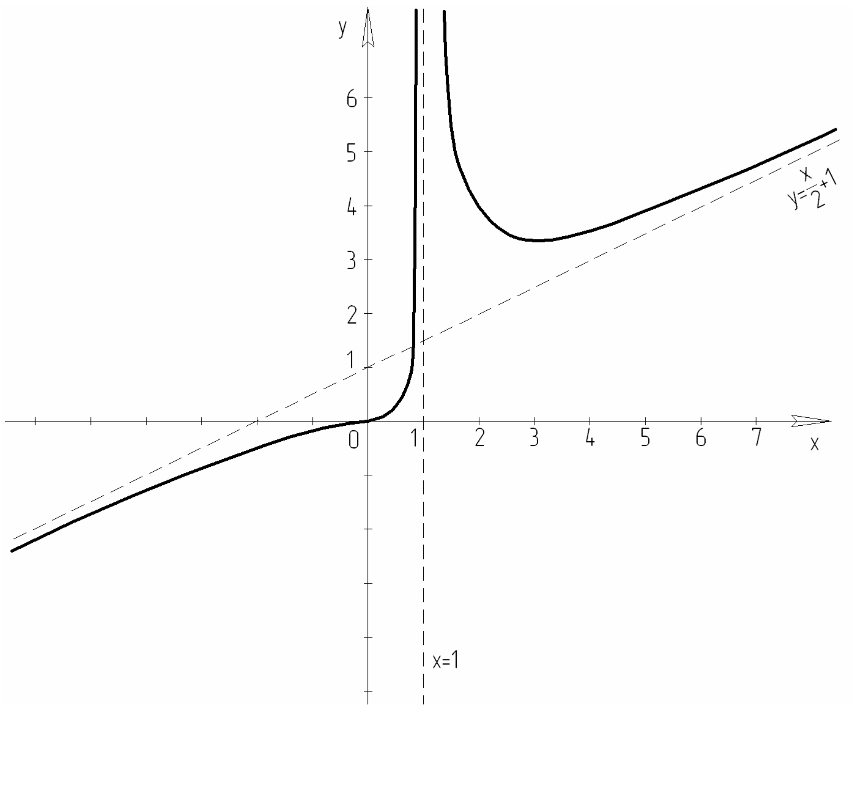


Рис. 20

Найбільше і найменше значення функції на відрізку. Задачі на екстремум

Для знаходження найбільшого і найменшого значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ треба із значень функції на краях відрізку і в критичних точках першого роду на інтервалі (a,b) відібрати найбільше й найменше.

Приклад. Знайти найбільше й найменше значення функції $f(x)=2x^3-3x^2+4$ на відрізку $[-1;2]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$, $6x(x-1)=0$.

Звідси $x=0$ і $x=1$.

Функція має дві стаціонарні точки на інтервалі $(-1;2)$. Знайдемо значення функції в них. $f(0)=4;\ \ f(1)=3$.

Тепер знайдемо значення функції на границях $f(-1)=-1;\ \ f(2)=8$.

Із цих чотирьох точок оберемо найбільше M і найменше m.

Бачимо, що найбільше значення M функція досягає на правій границі у точці $x=2$: $M=f(2)=8$, а найменшого m – у точці $x=-1$, на лівій границі інтервалу $m=f(-1)=-1$.

Існує багато задач, стосовно геометричних і фізичних об'єктів, що розв'язуються за допомогою теорії екстремумів.

Наприклад. Існує дві функціонально залежних величини і треба з'ясувати при якому, або яких значеннях однієї з них, друга приймає найбільше або найменше значення. Для розв'язання треба встановити цю функціональну залежність і дослідити функцію на найбільше і найменше значення.

Приклад. З'ясувати розміри циліндра, який при заданому об'ємі V мав би мінімальну повну поверхню S.

Розв'язання. Позначимо за R радіус основи циліндра, а за H його висоту.

Тоді повна поверхня буде дорівнювати $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$.

Виходячи з умови виразимо H.

$V = \pi R^2 H$. Звідси $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

Тоді $S = 2\left(\pi R^2 + \dfrac{V}{R}\right)$, де $R \in (0, \infty)$.

Знайдемо найменше значення функції $S = S(R)$ на інтервалі $(0;\infty)$.

$\dfrac{dS}{dR} = 2(2\pi R - \dfrac{V}{R^2})$; $\quad 2\pi R - \dfrac{V}{R^2} = 0$.

Тоді $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Знайдемо $\dfrac{d^2 S}{dR^2} = 2\left(2\pi + \dfrac{2V}{R^3}\right) > 0$.

Отже функція S матиме мінімальне значення якщо $R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Зауважимо, що якщо $R \to 0$ то $S \to \infty$, і якщо $R \to \infty$, то $S \to \infty$. Тоді $H = \dfrac{V}{\pi R^2} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.3.
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

1. Визначники і їх властивості

Визначником другого порядку, що відповідає таблиці елементів $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$ називається число Δ_2, яке обчислюється за правилом

$$\Delta_2 = det\, A = \begin{array}{c} + \\ - \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{array}{c} II \\ \\ I \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

де I – головна діагональ,

II – другорядна діагональ,

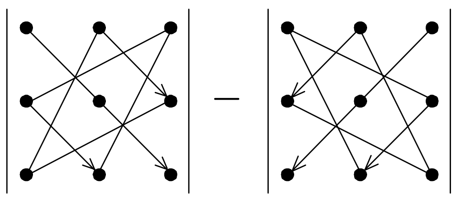
$a_{ij(i,j=1,2)}$ – елементи визначника,

i – номер строки або рядка,

j – номер стовпця.

Визначник другого порядку може позначатися так: $\Delta_2 = det\, A = \left| a_{ij} \right|$, ($det$ – від слова «детермінант»), де $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Визначник третього порядку, що відповідає таблиці елементів $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число $\Delta_3 = det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, яке може обчислюватись, наприклад, за формулою Саррюса, або зірки

$det\, A =$  , отже

$$det\, A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Правило обчислення визначника n – ного порядку базується на таких поняттях, як мінор M_{ij} та алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij}.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n – ного порядку називається визначник $(n-1)$ порядку, який утворюється з даного шляхом викреслення *i*-ї строки та *j*-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Зазначимо, що алгебраїчне доповнення відрізняється від мінора на знак. Таблиця знаків алгебраїчних доповнень така $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

Визначник n – ного порядку дорівнює сумі n добутків елементів i-ї строки або j-го стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто $\Delta_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$.

Це правило має назву обчислення визначника шляхом розкладання по елементах *i*-ї строки або *j*-го стовпця.

Отже,

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{13}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Це обчислення визначника третього порядку шляхом розкладання його по елементах першого рядка (строки) та по елементах першого стовпця. Про знаки алгебраїчних доповнень кажуть, що вони розташовані у шаховому порядку.

Відзначимо, що сума добутків строки або стовпця на алгебраїчний елемент іншої строки або стовпця дорівнює нулю.