$$\begin{cases} C_1x_1 + C_2 = x_1^2; \\ C_1x_2 + C_2 = x_2 - \dfrac{9}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} -1\cdot\dfrac{1}{2} + C_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2; \\ -1\cdot x_2 + C_2 = x_2 - \dfrac{9}{4}; \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{3}{4};\ x_2 = \frac{1}{2}\left(C_2 + \frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4}\right) = \frac{3}{2}.$$

Отже, допустима екстремаль $y = -x + \dfrac{3}{4}$.

Знайдемо відповідне значення функціоналу:

$$y' = -1;\ I\left[-x + \frac{3}{4}\right] = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + (-1)^2}\,dx = \underline{\sqrt{2}.}$$

Оскільки згідно з геометричним змістом задачі функціонал має мінімум і допустима екстремаль єдина, то на ній і досягається мінімум. Отже, найкоротша відстань дорівнює $\sqrt{2}$.

<u>Приклад 19.</u> Знайти криву $y = y(x)$, яка доставляє максимум функціоналу $I[y] = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(y^2 - (y')^2\right)dx$ при умові, що її лівий і правий кінці належать відповідно лініям $y = -x + 1$ і $y = 2x$.

<u>Розв'язання.</u> Складемо рівняння Ейлера $F'_y - \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 0$:

$$F = y^2 - (y')^2;\ F'_y = 2y;\ F'_{y'} = -2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'} = -2y'';$$

$$2y + 2y'' = 0;\ y'' + y = 0.$$

Знайдемо загальний розв'язок:

$k^2+1=0;\ k_{1,2}=\pm i;\ \ y=C_1\cos x+C_2\sin x$ — екстремалі.

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знайдемо з умов трансверсальності

$$\left[F+(g'_1-y')F'_{y'}\right]_{x=x_1}=0;\ \left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]_{x=x_2}=0:$$

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x;\ x_1=0;\ x_2=\frac{\pi}{2};$$

$$F=y^2-(y')^2=(C_1\cos x+C_2\sin x)^2-$$

$$-(-C_1\sin x+C_2\cos x)^2=C_1^2\cos^2 x+2C_1C_2\sin x\cos x+$$

$$+C_2^2\sin^2 x-C_1^2\sin^2 x+2C_1C_2\sin x\cos x-C_2^2\cos^2 x=$$

$$=C_1^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+2C_1C_2\sin 2x-C_2^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=$$

$$=C_1^2\cos 2x+2C_1C_2\sin 2x-C_2^2\cos 2x;$$

$$g_1=-x+1;\ g'_1=-1;\ g_2=2x;\ g'_2=2;\ F'_{y'}=2C_1\sin x-2C_2\cos x;$$

$$\left[C_1^2\cos 2x+2C_1C_2\sin 2x-C_2^2\cos 2x+(-1+C_1\sin x-C_2\cos x)\times\right.$$

$$\left.\times(2C_1\sin x-2C_2\cos x)\right]_{x=0}=0;$$

$$\left[C_1^2\cos 2x+2C_1C_2\sin 2x-C_2^2\cos 2x+(2+C_1\sin x-C_2\cos x)\times\right.$$

$$\left.\times(2C_1\sin x-2C_2\cos x)\right]_{x=\frac{\pi}{2}}=0;$$

$$\begin{cases}C_1^2-C_2^2+(-1-C_2)\cdot(-2C_2)=0;\\ -C_1^2+C_2^2+(2+C_1)\cdot 2C_1=0;\end{cases}\begin{cases}C_1^2+C_2^2+2C_2=0;\\ C_1^2+C_2^2+4C_1=0;\end{cases}$$

$$C_1=-\frac{4}{5};\quad C_2=-\frac{8}{5}.$$

Отже, допустима екстремаль (шукана крива):

$$\underline{y=-\frac{4}{5}\cos x-\frac{8}{5}\sin x.}$$

3.4. Варіаційні принципи

Варіаційні принципи застосовуються до аналізу різноманітних явищ. Суть кожного з них полягає в тому, що зі всіх допустимих для досліджуваної системи станів реалізується той, який відповідає екстремуму певного функціоналу (для кожного принципу свого). Розглянемо два таких принципи.

Принцип Ферма в оптиці: *зі всіх можливих шляхів, які сполучають точки A і B, світло вибирає той, що відповідає найменшому часу руху*:

$$I = \frac{1}{c} \int\limits_{\cup AB} n dt \to \min.$$

Тут c — швидкість світла у вакуумі, n — показник заломлення світла в даному середовищі, t — час.

Форма кривої AB визначається мінімумом вказаного функціоналу. В оптично однорідному середовищі $(n = const)$ — це пряма лінія.

Принцип Гамільтона-Остроградського (принцип найменшої дії) в механіці: *дійсний рух системи виділяється зі всіх допустимих рухів тим, що функціонал, який називається **дією**, $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt$ досягає при цьому мінімуму*.

Тут L — ***функція Лагранжа***, що є різницею кінетичної T і потенціальної U енергій: $L = T - U$.

Візьмемо для прикладу найпростішу механічну систему, що складається тільки з однієї матеріальної точки масою m, яка рухається вздовж осі Ox під дією сили з потенціалом $U(x)$. Розглянемо два випадки:

а) Нехай система консервативна і її функція Лагранжа $L = L\left(x, \dot{x}\right)$ не залежить явно від часу t (***одно-рідність часу***). Тоді рівняння Ейлера для функціоналу S спрощується і набуває вигляду: $L - L'_{\dot{x}} \cdot \dot{x} = -C$, де

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ — швидкість, $C = const$.

Але $\dot{x} \cdot L'_{\dot{x}} = \dot{x} \cdot \left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right)'_{\dot{x}} = \dot{x} \cdot m \cdot \dot{x} = m\dot{x}^2 = 2T$;

$L - L'_{\dot{x}} = (T - U) - 2T = -T - U$. Звідси $-T - U = -C$, $\underline{T + U = C}$. Тобто, *закон збереження енергії виступає наслідком варіаційного принципу найменшої дії*.

б) Нехай функція Лагранжа L не змінюється при паралельному перенесенні системи (***однорідність простору***). Тоді у функціоналі S підінтегральна функція $L = L\left(t, \dot{x}\right)$ не залежить явно від невідомої функції $x = x(t)$ і рівняння Ейлера спрощується, набуваючи вигляду: $\frac{d}{dt} L'_{\dot{x}} = 0$; $L'_{\dot{x}} = (T - U)'_{\dot{x}} =$

$= T'_{\dot{x}} = C$, $C = const$. Але $T'_{\dot{x}} = \left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right)'_{\dot{x}} = m\dot{x} = p$ — імпульс системи. Звідси $\underline{p = C}$. Тобто, *закон збереження імпульсу теж виступає наслідком варіаційного принципу найменшої дії*.

Задачі для самостійної роботи

1. Використовуючи достатні умови, дослідити на екстремум функціонал:

1.1. $I[y]=\int\limits_0^3 (y')^3\,dx;\ y(0)=0; y(3)=6.$

1.2. $I[y]=\int\limits_0^2 \left(xy'+(y')^2\right)dx;\ y(0)=1; y(2)=0.$

1.3. $I[y]=\int\limits_0^1 \left((y')^2+yy'-16y^2\right)dx;\ y(0)=0; y(1)=0.$

1.4. $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4y^2-(y')^2+8y\right)dx;\ y(0)=1; y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

1.5. $I[y]=\int\limits_1^2 x^2(y')^2\,dx;\ y(1)=3; y(2)=1.$

1.6. $I[y]=\int\limits_1^2 \left(y'+x^2(y')^2\right)dx;\ y(1)=3; y(2)=5.$

1.7. $I[y]=\int\limits_1^2 \left(x^2(y')^2+12y^2\right)dx;\ y(1)=1; y(2)=8.$

1.8. $I[y]=\int\limits_0^6 \left(2xy-(y')^2\right)dx;\ y(0)=1; y(6)=1.$

1.9. $I[y]=\int\limits_0^1 y(y')^2\,dx;\ y(0)=5; y(1)=5.$

1.10. $I[y]=\int\limits_0^1 e^y(y')^2\,dx;\ y(0)=0; y(1)=\ln 4.$

1.11. $I[y]=\int\limits_1^2 \frac{x^3}{(y')^2}\,dx;\ y(1)=1; y(2)=4.$

1.12. $I[y]=\int_0^1 (1+x)(y')^2\,dx;\ y(0)=0; y(1)=1.$

1.13. $I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y^2-(y')^2\right)dx;\ y(0)=1; y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

1.14. $I[y]=\int_1^2 \left(x(y')^4-2y(y')^3\right)dx;\ y(1)=0; y(2)=1.$

1.15. $I[y]=\int_0^1 \left((y')^2+y^2+2ye^{2x}\right)dx;\ y(0)=\frac{1}{3}; y(1)=\frac{1}{3}e^2.$

2. Знайти допустимі екстремалі задачі Лагранжа:

2.1. $I[y,z]=\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;$

$y(0)=-1; z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1;\ x+y+z=0.$

2.2. $I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+z\right)dx;$

$y(0)=1; z(0)=1;\ y(1)=e;\ z(1)=e^2+1;\ z-y^2-x=0.$

2.3. $I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+z^2\right)dx;$

$y(0)=0; z(0)=1;\ y(1)=1;\ z(1)=\sqrt{2};\ y-z^2+1=0.$

3. Знайти допустимі екстремалі ізопериметричної задачі:

3.1. $I[y]=\int_0^1 \left((y')^2+x^2\right)dx;\quad y(0)=0; y(1)=0; \int_0^1 y^2\,dx=2.$

3.2. $I[y]=\int_0^1 (y')^2\,dx;\quad y(0)=0; y(1)=\frac{1}{4}; \int_0^1 \left(y-(y')^2\right)dx=\frac{1}{12}.$

3.3. $I[y]=\int\limits_0^1\left(x+(y')^2\right)dx;\quad y(0)=0; y(1)=0; \int\limits_0^1 ydx=2.$

4.1. Знайти допустиму екстремаль функціоналу $I[y]=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ при умові, що лівий і правий кінці належать відповідно лініям $y=x^2$; $y=x-5$.

4.2. Знайти допустиму екстремаль функціоналу $I[y]=\int\limits_1^2\left(x^2(y')^2-xy\right)dx$ при умові, що лівий і правий кінці належать відповідно лініям $y=2x-1$; $y=x^2$.

4.3. Знайти допустиму екстремаль функціоналу з рухомими кінцями $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(y+2xy'+(y')^2\right)dx$ при умові, що лівий і правий кінці належать відповідно лініям $y=2x+1$; $y=-x+2$.

5.1. Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1;5)$ до параболи $y^2=x$.

5.2. Знайти найкоротшу відстань між колом $x^2+y^2=1$ і прямою $x+y=4$.

5.1. Знайти найкоротшу відстань між параболою $y=x^2$ і прямою $y=x-5$.

Запитання для самоконтролю та підготовки до екзамену (заліку)

1. Що називається функціоналом?
2. Що таке відносний (абсолютний) мінімум (максимум) функціоналу? Що таке сильний (слабкий)

екстремум?

3. Сформулюйте перше і друге означення варіації функціоналу. Що називається другою варіацією функціоналу?

4. Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення?

5. У чому полягає необхідна умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?

6. Запишіть рівняння Ейлера. Який його порядок?

7. Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення для функціоналів, що залежать від кількох функцій?

8. Запишіть систему рівнянь Ейлера-Лагранжа.

9. Як ставиться найпростіша варіаційна задача для функціоналів, що залежать від похідних вищих порядків?

10. Запишіть рівняння Ейлера-Пуассона. Який його порядок?

11.У чому полягає достатня умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?

12.Сформулюйте посилені достатні умови Лежандра екстремуму функціоналу.

13. Як ставиться задача Лагранжа на умовний екстремум?

14. У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язування задачі Лагранжа на умовний екстремум?

15. Що таке ізопериметрична задача на умовний екстремум?

16. У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язання ізопериметричної задачі?

17. У чому полягає принцип взаємності?

18. Як ставиться варіаційна задача з рухомими

кінцями?

19. Сформулюйте природні крайові умови.

20. Сформулюйте умови трансверсальності для випадку, коли кінці шуканої екстремалі можуть ковзати вздовж заданих ліній.

21. У чому полягає принцип Ферма в оптиці?

22. Сформулюйте принцип найменшої дії в механіці.

Список рекомендованої літератури

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. — 424 с.

2. Мышкис А.Д. Математика для втузов (специальные курсы). —М.: Наука, 1971. — 632 с.

3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. т.4, ч.1. —М.: Наука, 1974. — 336 с.

4. Высшая математика / П.Ф.Овчинников, Б.М.Лисицын, В.М.Михайленко. —К.: Вища шк., 1989. — 676 с.

5. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. —К.: Либідь, 1996. — 440 с.

6. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. —М.: Наука, 1970. — 191 с.

7. Вариационное исчисление (задачи и упражнения) / М.Л.Краснов, Г.И.Макаренко, А.И.Киселев. —М.: Наука, 1973. — 192 с.

8. Высшая математика: Сборник задач /Х.И.Гаврильченко, А.Ф.Кривой, П.С.Кропивянский и др. — К.: Вища шк., 1991. — 455 с.

9. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.II / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. —М.: Высш.шк., 1997. — 416 с.

ЗМІСТ