$$z=2\lambda;\ \begin{cases}\lambda'=2y-3\lambda; & y''=3y'+8\lambda';\ y''=3y'+8(2y-3\lambda);\\ y'=3y+8\lambda; & y''=3y'+16y-24\lambda;\end{cases}$$

$$\lambda=\frac{1}{8}(y'-3y);\ y''=3y'+16y-24\cdot\frac{1}{8}(y'-3y);\ y''=3y'+16y-$$

$$-3y'+9y;\ y''-25y=0;\ k^2-25=0;\ k_{1,2}=\pm5;\ y=C_1e^{5x}+$$

$$+C_2e^{-5x};\ y'=5C_1e^{5x}-5C_2e^{-5x};$$

$$\lambda=\frac{1}{8}\left(5C_1e^{5x}-5C_2e^{-5x}-3C_1e^{5x}-3C_2e^{-5x}\right)=\frac{1}{4}C_1e^{5x}-C_2e^{-5x};$$

$$z=2\left(\frac{1}{4}C_1e^{5x}-C_2e^{-5x}\right)=\frac{1}{2}C_1e^{5x}-2C_2e^{-5x}.$$

Отже, екстремалями служать функції:

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x};\quad z=\frac{1}{2}C_1e^{5x}-2C_2e^{-5x}.$$

Знайдемо значення C_1 і C_2 із крайових умов:

$$\begin{cases}1=C_1+C_2; & C_1=1;\\ e^5=C_1e^5+C_2e^{-5}; & C_2=0.\end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі $\underline{y=e^{5x};\quad z=\frac{1}{2}e^{5x}}$.

Приклад 12. Знайти геодезичну лінію, яка сполучає дві задані точки $A(1;-1;0)$ і $B(2;1;-1)$ поверхні $15x-7y+z-22=0$. Знайти її довжину.

Розв'язання. Геодезична лінія — це найкоротша лінія, яка лежить на даній поверхні і сполучає дві дані точки. Нехай шукана лінія визначається рівняннями $y=y(x)$, $z=z(x)$. Тоді $y(1)=-1$; $z(1)=0$; $y(2)=1$; $z(2)=-1$ — крайові умови; $\varphi(x,y,z)=15x-7y+z-22=0$ — рівняння зв'язку;

$I[y,z]=\int\limits_1^2\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$ — функціонал (довжина дуги AB), мінімум якого треба знайти.

Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\overline{F}=F+\lambda\varphi;\ \overline{F}=\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(15x-7y+z-22);$$

$$\overline{I}[y,z]=\int\limits_1^2\overline{F}dx=\int\limits_1^2\left(\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(15x-7y+z-22)\right)dx.$$

Складемо систему рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$\overline{F}'_y=-7\lambda;\ \overline{F}'_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}};\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=\frac{y''+y''(z')^2-z'z''y'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\overline{F}'_z=\lambda;\ \overline{F}'_{z'}=\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}};\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=\frac{z''+z''(y')^2-y'y''z'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\begin{cases}\overline{F}'_y-\dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0;\\ \overline{F}'_z-\dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}-7\lambda-\dfrac{y''+y''(z')^2-z'z''y'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0;\\ \lambda-\dfrac{z''+z''(y')^2-y'y''z'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0.\end{cases}$$

Вилучивши з останньої системи λ, одержимо:

$$y''+y''(z')^2-z'z''y'+7\left(z''+z''(y')^2-y'y''z'\right)=0.$$

Продиференціювавши рівняння зв'язку, маємо:

$$15-7y'+z'=0;\quad -7y''+z''=0.$$

Звідси $z'=7y'-15;\quad z''=7y''.$ Тоді

$$y''+y''(7y'-15)^2-(7y'-15)\cdot 7y''\cdot y'+7\left(7y''+7y''\cdot(y')^2-\right.$$
$$\left.-y'y''(7y'-15)\right)=0.$$

Після спрощення маємо $y''=0$. Тоді $y'=C_1;\quad y=C_1x+C_2$.

З рівняння зв'язку $z=22-15x+7y$. Тоді $z=22-15x+7C_1x+7C_2$.

Отже, $y=C_1x+C_2$, $z=22-15x+7C_1x+7C_2$ — екстремалі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{matrix} y(1)=-1: \\ y(2)=1: \end{matrix}\begin{cases} -1=C_1+C_2; & C_1=2; \\ 1=2C_1+C_2; & C_2=-3. \end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі:

$$y=2x-3;\quad z=22-15x+7(2x-3)=-x+1.$$

Таким чином, геодезична лінія визначається рівняннями $\underline{y=2x-3,\ z=-x+1,\ x\in[1;2]}$. .

Знайдемо її довжину: $y'=2;\ z'=-1$

$$I_{\min}=I[2x-3,-x+1]=\int_1^2\sqrt{1+2^2+(-1)^2}\,dx=\underline{\sqrt{6}}.$$

Найпростіша ***ізопериметрична задача***: знайти функцію $y(x)$, яка доставляє мінімум (максимум) функціоналу

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

і задовольняє інтегральне рівняння зв'язку

$$I_*[y]=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x,y,y')dx=l,$$

а також крайові умови $y(x_1)=y_1;\ y(x_2)=y_2$.

<u>Теорема.</u> *Якщо функція $y(x)$ є допустимою екстремаллю сформульованої ізопериметричної задачі, то існує таке стале число λ (множник Лагранжа),*

що функція $y(x)$ служить безумовною допустимою екстремаллю допоміжного функціоналу

$$\overline{I}[y]=\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}(x,y,\lambda)dx$$

де $\overline{F}(x,y,\lambda)=F+\lambda\varphi$ — допоміжна функція (функція Лагранжа).

Принцип взаємності: *Сукупність умовних екстремалей не залежить від того, чи шукати екстремум функціоналу $I[y]$ при фіксованому значенні $I_*[y]$ чи, навпаки, шукати екстремум $I_*[y]$ при фіксованому значенні $I[y]$.*

Зазначимо, що, на відміну від алгебраїчних чи диференціальних, інтегральні зв'язки не накладають жорстких обмежень на шукані функції, бо з них не можна виразити одні з функцій через інші. Тому число ізопериметричних умов не обов'язково повинно бути меншим числа шуканих функцій.

Приклад 13. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y]=\int_0^1 (y')^2\,dx$$

при крайових умовах $y(0)=1,\quad y(1)=6$ та ізопериметричному зв'язку $\int_0^1 ydx=3.$

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал: $\overline{F}=F+\lambda\varphi;\quad \overline{F}=(y')^2+\lambda y;$

$$\overline{I}=\int_0^1\overline{F}dx;\quad \overline{I}=\int_0^1\left((y')^2+\lambda y\right)dx.$$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y = \lambda; \ \overline{F}'_{y'} = 2y'; \ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 2y'';$$

$$\overline{F}'_y - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0; \ \lambda - 2y'' = 0; \ y'' = \frac{\lambda}{2}.$$

Звідси $y' = \frac{\lambda}{2}x + C_1; \quad y = \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x + C_2.$

Використаємо крайові умови:

$$\begin{cases} 1 = C_2; \\ 6 = \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_2 = 1; \\ \lambda = 20 - 4C_1; \end{matrix}$$

$$y = (5 - C_1)x^2 + C_1 x + 1.$$

З ізопериметричної умови маємо:

$$\int_0^1 \left((5 - C_1)x^2 + C_1 x + 1\right)dx = 3;$$

$$\left(\left(\frac{5 - C_1}{3}\right)x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 = 3;$$

$$\frac{5 - C_1}{3} + \frac{C_1}{2} + 1 = 3; \quad C_1 = 2.$$

Отже, допустима екстремаль:

$$y = (5 - 2)x^2 + 2x + 1 = \underline{3x^2 + 2x + 1}.$$

Приклад 14. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^{\pi} (y')^2 dx$$

при крайових умовах $y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$ та ізопериметричному зв'язку $\int_0^{\pi} y^2 dx = 1.$

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа і допроміжний функціонал: $\overline{F} = F + \lambda\varphi$; $\overline{F} = (y')^2 + \lambda y^2$;

$$\overline{I}[y] = \int_0^\pi \overline{F}dx; \quad \overline{I}[y] = \int_0^\pi \left((y')^2 + \lambda y^2\right)dx.$$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y = 2\lambda y; \overline{F}'_{y'} = 2y'; \ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 2y'';$$

$$\overline{F}'_y - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0; 2\lambda y - 2y'' = 0; y'' - \lambda y = 0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння:

1. Якщо $\lambda > 0$, то $k^2 - \lambda = 0; k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$; $y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. З крайових умов випливає: $\begin{cases} 0 = C_1 + C_2; & C_1 = 0; \\ 0 = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi}; & C_2 = 0. \end{cases}$ Але функція $y = 0$ не задовольняє інтегральне рівняння зв'язку. Отже, в цьому випадку допустима екстремаль не існує.

2. Якщо $\lambda = 0$, то $k^2 = 0; k_{1,2} = 0$; $y = C_1 + C_2 x.$. З крайових умов випливає: $\begin{cases} 0 = C_1; & C_1 = 0; \\ 0 = C_1 + C_2\pi; & C_2 = 0. \end{cases}$. Як було зазначено вище, функція $y = 0$ не задовольняє ізопериметричній умові. Допустимої екстремалі немає.

3. Якщо $\lambda < 0$, то $k^2 - \lambda = 0; k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$; $y = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$. З крайової умови $y(0) = 0$ маємо $C_1 = 0, C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$. Оскільки $C_2 \neq 0$, то $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$, звідси $\sqrt{-\lambda}\pi = m\pi$, $m = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\lambda = -n^2, n = 1,2,\ldots$. Отже, $y = C_2 \sin nx$. Використаємо

інтегральне рівняння зв'язку: $\int\limits_0^{\pi}(C_2 \sin nx)^2\,dx = 1;$

$C_2^2\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx = 1;$ $\frac{1}{2}C_2^2\left(x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Bigg|_0^{\pi} = 1;$ $C_2^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1;$

$C_2 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$ Отже, $\underline{y = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx,\ n = 1,2,\ldots}$ — допустимі екстремалі.

Приклад15. Серед всіх плоских кривих заданої довжини $l = 2sh\frac{1}{2}$, що сполучають дві задані точки $A(0;0)$ і $B(1;0)$ знайти таку, в якої ордината центра мас y_c найменша. Для знайденої кривої обчислити ординату центра мас $y_{c\min}$.

Розв'язання. Задача полягає в мінімізації функціоналу

$$y_c = I[y] = \int\limits_0^1 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

при крайових умовах $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ та ізопериметричному зв'язку $\int\limits_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2sh\frac{1}{2}.$

Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\overline{F} = F + \lambda\varphi;\ \overline{F} = y\sqrt{1+(y')^2} + \lambda\sqrt{1+(y')^2};$$

$$\overline{I}[y] = \int\limits_0^1 \overline{F}dx;\ \overline{I}[y] = \int\limits_0^1\left(y\sqrt{1+(y')^2} + \lambda\sqrt{1+(y')^2}\right)dx.$$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y = \sqrt{1+(y')^2}; \overline{F}'_{y'} = \frac{yy'+\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}; \frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{(y')^2+(y')^4+yy''+\lambda y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0; \quad \sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2+'(y')^4+yy''+\lambda y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

$$y''(y+\lambda)-(y')^2-1=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$y' = p;\ p = p(y);\ y'' = p\cdot p';\ p\cdot p'(y+\lambda)-p^2-1=0;$$

$$\int\frac{pdp}{p^2+1} = \int\frac{dy}{y+\lambda}; \quad \frac{1}{2}\ln\left|p^2+1\right| = \ln|y+\lambda|+\ln|C_1|;$$

$$p^2+1 = C_1^2(y+\lambda)^2; \quad \sqrt{1+(y')^2} = C_1(y+\lambda);$$

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}; \quad \int\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}} = \int dx;$$

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1(y+\lambda)+\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}\right| = x+C_2;$$

$$C_1(y+\lambda)+\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1} = e^{C_1x+C_1C_2}.$$

Спростимо останній вираз, поклавши $C_1(y+\lambda)=ch\,t$. Тоді $\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}=\sqrt{ch^2t-1}=sh\,t$; $ch\,t+sh\,t=e^{C_1x+C_1C_2}$; $e^t=e^{C_1x+C_1C_2}$; $t=C_1x+C_1C_2$.

Отже, $C_1(y+\lambda)=ch(C_1x+C_1C_2)$. Тоді $\sqrt{1+(y')^2} =$ $= ch(C_1x+C_1C_2)$; $y=\dfrac{1}{C_1}ch(C_1x+C_1C_2)-\lambda$ — екстремалі (сім'я ланцюгових ліній).

З крайових умов маємо:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{C_1} ch(C_1 C_2) - \lambda; \\ 0 = \dfrac{1}{C_1} ch(C_1 + C_1 C_2) - \lambda; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{C_1} ch(C_1 C_2); \\ 0 = \dfrac{1}{C_1} \left(ch(C_1 + C_1 C_2) - ch(C_1 C_2) \right); \end{cases}$$

$$2sh \frac{C_1 + C_1 C_2 + C_1 C_2}{2} \cdot sh \frac{C_1 + C_1 C_2 - C_1 C_2}{2} = 0;$$

$$sh \frac{C_1 + 2C_1 C_2}{2} \cdot sh \frac{C_1}{2} = 0.$$

Оскільки $C_1 \neq 0$, то з останнього рівняння випливає: $C_1 + 2C_1 C_2 = 0; C_2 = -\frac{1}{2}$. Тоді $\lambda = \frac{1}{C_1} ch\left(-\frac{C_1}{2} \right) =$

$$= \frac{1}{C_1} ch\left(\frac{C_1}{2} \right); \; y = \frac{1}{C_1} ch\left(C_1 x - \frac{C_1}{2} \right) - \frac{1}{C_1} ch \frac{C_1}{2};$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = ch\left(C_1 x - \frac{C_1}{2} \right).$$

Рівняння зв'язку набуває вигляду:

$$\int_0^1 ch\left(C_1 x - \frac{C_1}{2} \right) dx = 2sh \frac{1}{2}; \; \frac{1}{C_1} sh\left(C_1 x - \frac{C_1}{2} \right) \Bigg|_0^1 = 2sh \frac{1}{2};$$

$$\frac{2}{C_1} sh \frac{C_1}{2} = 2sh \frac{1}{2}.$$

Звідси $C_1 = 1$. Отже, допустима екстремаль

$$\underline{y = ch\left(x - \frac{1}{2} \right) - ch \frac{1}{2}}.$$

З фізичного змісту задачі випливає, що мінімум функціоналу існує. Оскільки допустима екстремаль єдина, то на ній і досягається мінімум. Знайдемо шукану ординату центра мас $y_{c\min}$:

$$\sqrt{1+(y')^2}=ch\left(x-\frac{1}{2}\right);\ y_{c\min}=I\left[ch\left(x-\frac{1}{2}\right)-ch\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\int_0^1\left(ch\left(x-\frac{1}{2}\right)-ch\frac{1}{2}\right)ch\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\int_0^1 ch^2\left(x-\frac{1}{2}\right)dx-$$

$$-ch\frac{1}{2}\int_0^1 ch^2\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\int_0^1\frac{1+ch(2x-1)}{2}dx-ch\frac{1}{2}\cdot sh\left(x-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sh(2x-1)\right)\Bigg|_0^1-2ch\frac{1}{2}\cdot sh\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}sh1-sh1=\underline{\frac{1-sh1}{2}}.$$

3.3. Задача на екстремум функціоналу з рухомими кінцями. Умови трансверсальності

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\overline{F}(x,y,y')dx$ серед неперервно диференційовних на відрізку $[x_1;x_2]$ функцій $y=y(x)$, якщо крайові умови не задані, але відомо, що точки $A(x_1;y(x_1))$ і $B(x_2;y(x_2))$ лежать відповідно на заданих лініях $y=g_1(x)$ і $y=g_2(x)$, причому числа x_1 і x_2 також підлягають визначенню.

Сформульована задача називається ***варіаційною задачею з рухомими кінцями***.

У даному випадку клас допустимих функцій, на яких шукається екстремум функціоналу, розширюється порівняно з ситуацією закріплених кінців, бо крім кривих порівняння, що мають спільні межові точки з досліджуваною кривою, можна брати криві зі зміщеними кінцевими точками. Це означає, що коли на якій-небудь функції $y_0(x)$ функціонал $I[y]$ досягає екстремуму в задачі з рухомими кінцями, то екстремум тим паче досягається по відношенню до більш вузького класу кривих, які мають спільні межові точки з кривою $y = y_0(x)$, а, отже, функція $y_0(x)$ повинна бути розв'язком рівняння Ейлера

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 .$$

Загальний розв'язок рівняння Ейлера $y = y(x, C_1, C_2)$ включає дві довільні сталі. Конкретні значення довільних сталих знаходяться при закріплених кінцях із крайових умов, а при рухомих — із додаткових умов, які називаються ***умовами трансверсальності*** і мають вигляд:

$$\left[F + (g'_1 - y')F'_{y'}\right]_{x=x_1} = 0; \quad \left[F + (g'_2 - y')F'_{y'}\right]_{x=x_2} = 0.$$

Часто числа x_1 і x_2 задані, і точки $A(x_1; y(x_1))$ і $B(x_2; y(x_2))$ можуть переміщатися тільки вздовж вертикальних прямих відповідно $x = x_1$ і $x = x_2$. Тоді умови трансверсальності набувають вигляду:

$$F'_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0, \quad F'_{y'}\Big|_{x=x_2} = 0$$

і називаються ***природними крайовими умовами***.

Розглянемо виведення природних крайових умов. Варіація функціоналу визначається рівністю (п.2.2): $\delta I = \int\limits_{x_1}^{x_2} F'_y\, \delta y dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} F'_{y'}\, \delta y' dx.$

До другого доданка застосуємо метод інтегрування частинами (як в п.2.2) і одержимо:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right) \delta y dx + \left(F'_{y'} \delta y \right) \Big|_{x_1}^{x_2} .$$

На екстремалі $y(x)$ перший доданок останньої рівності дорівнює нулю, і з необхідної умови екстремуму $\delta I = 0$ випливає:

$$\delta I = F'_{y'} \Big|_{x=x_2} \delta y(x_2) - F'_{y'} \Big|_{x=x_1} \delta y(x_1) = 0.$$

Оскільки δy — довільна варіація і на кінцях може набувати будь-яких значень, то рівність варіації функціоналу нулю можлива у випадку $F'_{y'} \Big|_{x=x_1} = 0, \quad F'_{y'} \Big|_{x=x_2} = 0.$

Якщо $F = G(x, y)\sqrt{1 + (y')^2}$, то умова трансверсальності, наприклад, для лівого кінця має вигляд: $\left[G(x, y)\sqrt{1 + (y')^2} + (g'_1 - y') \frac{G(x, y) y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] \Bigg|_{x=x_1} = 0$ або $\left[G(x, y)(1 + g'_1 y') \right] \Big|_{x=x_1} = 0$.

Якщо $G(x, y) \neq 0$, то $(1 + g'_1 y') \Big|_{x=x_1} = 0$ або $g'_1 y' \Big|_{x=x_1} = -1$. Останнє співвідношення є умовою перпендикулярності шуканої кривої, що доставляє екстремум функціоналу, і заданої лінії $y = g_1(x)$. Таким чином, поняття трансверсальності є деяким узагальненням поняття ортогональності.

<u>Правило</u> знаходження допустимих екстремалей варіаційної задачі з рухомими кінцями:

1. Скласти рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$, розв'язати його і знайти екстремалі $y = y(x, C_1, C_2)$.

2. Скласти систему алгебраїчних рівнянь для знаходження конкретних значень довільних сталих C_1, C_2 і тих чисел з пари x_1 і x_2, які невідомі. Для цього використати крайові умови, якщо на відповідному кінці вони задані, або природні крайові умови чи, в загальному випадку, умови трансверсальності разом з тими рівняннями перетину шуканої допустимої екстремалі $y = y(x)$ з даними лініями $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, які відповідають невідомим числам з пари x_1 і x_2:

$$y(x_1, C_1, C_2) = g_1(x_1); \quad y(x_2, C_1, C_2) = g_2(x_2).$$

3. Розв'язати одержану систему і знайти допустиму екстремаль.

Приклад 16. Знайти криву, на якій реалізується мінімум функціоналу $I[y] = \int_0^2 \left(xy' + (y')^2\right)dx$ при умові, що її лівий кінець розміщений в точці $A(0;3)$, а правий кінець — на прямій $x = 2$. Обчислити мінімальне значення функціоналу.

Розв'язання. Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера: $F = xy' + (y')^2$; $F'_y = 0$; $F'_{y'} = x + 2y'$;

$\frac{d}{dx}F'_{y'} = 1 + 2y''$.

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду: $1 + 2y'' = 0$.

Розв'яжемо це рівняння:

$$y' = -\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}x + C_1;$$

$$y=\int\left(-\frac{1}{2}x+C_1\right)dx=-\frac{x^2}{4}+C_1x+C_2 \text{ — екстремалі.}$$

Допустима екстремаль повинна проходити через точку $A(0;3)$, тобто на лівому кінці задана крайова умова $y(0)=3$.

Звідси $3=-\frac{0}{4}+C\cdot 0+C_2;\, C_2=3;\, y=-\frac{x^2}{4}+C_1x+3$.

Правий кінець допустимої екстремалі ковзає по вертикальній прямій $x=2$. Отже, там повинна виконуватись природна крайова умова $F'_{y'}\big|_{x=x_2}=0$: $\left.(x+2y')\right|_{x=2}=0.$

Підставивши в останній вираз похідну $y'=-\frac{x}{2}+C_1$, одержимо: $\left.\left(x+2\left(-\frac{x}{2}+C_1\right)\right)\right|_{x=2}=0;\, C_1=0.$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=-\frac{x^2}{4}+3}$.

Оскільки $F''_{y'y'}=2>0$ при $x\in[0;2]$, то згідно з посиленими достатніми умовами Лежандра на даній єдиній допустимій екстремалі реалізується мінімум функціоналу. Знайдемо його значення: $y'=-\frac{x}{2}$;

$$I_{\min}=I\left[-\frac{x^2}{4}+3\right]=\int_0^2\left(x\left(-\frac{x}{2}\right)+\left(-\frac{x}{2}\right)^2\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^2 x^2dx=-\left.\frac{x^3}{12}\right|_0^2=\underline{-\frac{2}{3}}.$$

<u>Приклад 17.</u> Знайти найкоротшу відстань від

точки $A(1;0)$ до верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Розв'язання. Мова йде про мінімізацію функціоналу (довжини дуги)

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

при умові, що лівий кінець закріплений в точці $A(1;0)$, тобто $x_1=1;\ y(1)=0$, а правий — переміщується по верхній половині еліпса, тобто, $g_2(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$.

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F=\sqrt{1+(y')^2};\ \ F'_y=0;\ F'_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}};\ \ \frac{d}{dx}F'_{y'}=\frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду: $0-\frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0;\quad y''=0.$

Звідси $y'=C_1;\ y=\int C_1dx=C_1x+C_2$ — екстремалі.

На правому кінці повинна виконуватись умова трансверсальності $\left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]_{x=x_2}=0$:

$$y' = C_1;\ g'_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}(-2x) = -\frac{2x}{3\sqrt{9-x^2}};$$

$$\left.\left[\sqrt{1+C_1^2}+\left(-\frac{2x}{3\sqrt{9-x^2}}-C_1\right)\cdot\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}\right]\right|_{x=x_2} = 0;$$

$$1-\frac{2x_2C_1}{3\sqrt{9-x_2^2}} = 0; \quad 3\sqrt{9-x_2^2}-2C_1x_2 = 0.$$

Приєднавши до останнього співвідношення рівняння перетину екстремалі з еліпсом і крайову умову на лівому кінці, одержимо систему:

$$\begin{cases} 3\sqrt{9-x_2^2}-2C_1x_2 = 0; \\ C_1x_2+C_2 = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}; \\ C_1+C_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знаходимо

$$x_2 = \frac{9}{5};\ C_1 = 2;\ C_2 = -2..$$

Отже, допустима екстремаль $y = 2x-2$. Оскільки згідно з геометричним змістом задачі функціонал має мінімум і допустима екстремаль єдина, то вона й реалізує мінімум. Знайдемо його значення:

$$y' = 2;\ I_{\min} = I[2x-2] = \int_1^{\frac{9}{5}}\sqrt{1+2^2}\,dx = \underline{\frac{4\sqrt{5}}{5}}.$$

Отже, найкоротша відстань дорівнює $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

<u>Приклад 18.</u> Знайти найкоротшу відстань між параболою $y = x^2$ і прямою $y = x-\frac{9}{4}$.

Розв'язання. Задача полягає в мінімізації функціоналу (довжини дуги) $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ при умові, що лівий кінець допустимої екстремалі може рухатись вздовж параболи $y=x^2$, а правий — вздовж прямої $y=x-\frac{9}{4}$.

Для цього функціоналу рівняння Ейлера має загальний розв'язок $y=C_1x+C_2$ (приклад 17).

Оскільки $F=\sqrt{1+(y')^2}$, $F'_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$, $g_1(x)=x^2$, $g'_1=2x$, $g_2(x)=x-\frac{9}{4}$, $g'_2=1$, $y'=C_1$, то умови трансверсальності

$$\left[F+(g'_1-y')F'_{y'}\right]_{x=x_1}=0;\ \left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]_{x=x_2}=0$$

набувають вигляду:

$$\begin{cases}\sqrt{1+C_1^2}+(2x_1-C_1)\dfrac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0;\\ \sqrt{1+C_1^2}+(1-C_1)\dfrac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}1+2C_1x_1=0;\\ 1+C_1=0.\end{cases}$$

Звідси $C_1=-1;\ x_1=\frac{1}{2}$.

Використавши рівняння перетину екстремалі з даними лініями $y=g_1(x)$ і $y=g_1(x)$, знайдемо C_2 і x_2: