симуму) функціоналу

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)dx$$

при крайових умовах $y_i(x_1) = y_{i1},\ y_i(x_2) = y_{i2},\ i = \overline{1,n}.$

Із необхідної умови екстремуму $\delta I = 0$ при $\delta y_i(x_1) = 0$ і $\delta y_i(x_2) = 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ випливає, що допустимі екстремалі є розв'язками системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} F'_{y_1} - \dfrac{d}{dx}F'_{y'_1} = 0; \\ F'_{y_2} - \dfrac{d}{dx}F'_{y'_2} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F'_{y_n} - \dfrac{d}{dx}F'_{y'_n} = 0 \end{cases}$$

при крайових умовах $y_i(x_1) = y_{i1},\ y_i(x_2) = y_{i2},\ i = \overline{1,n}.$

Розв'язки останньої диференціальної системи називаються ***екстремалями***, а сама система — системою диференціальних рівнянь екстремалей або ***системою рівнянь Ейлера-Лагранжа***.

Приклад 9. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y,z] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2\right)dx;\quad y(0) = 0;$

$z(0) = 0;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;\ z\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{16};$

б) $I[y,z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((y')^2 + (z')^2 - 2yz\right)dx;\quad y(0) = 0;$

$z(0)=0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

<u>Розв'язання.</u> а) Знайдемо похідні, що входять в систему рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$F(x,y,z,y',z')=2z-4y^2+(y')^2-(z')^2;\quad F'_y=-8y;$$

$$F'_{y'}=2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y'';\ F'_z=2;\ F'_{z'}=-2z';\ \frac{d}{dx}F'_{z'}=-2z''.$$

Тоді система рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\begin{cases} F'_y-\dfrac{d}{dx}F'_{y'}=0; \\ F'_z-\dfrac{d}{dx}F'_{z'}=0 \end{cases}$$

набуває вигляду: $\begin{cases} -8y-2y''=0; \\ 2-(-2z'')=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y''+4y=0; \\ z''+1=0. \end{cases}$

Розв'яжемо останню систему:

$$y''+4y=0;\ k^2+4=0;\ k_{1,2}=\pm 2i;$$

$$y=\underline{C_1\cos 2x+C_2\sin 2x};$$

$$z''=-1;\ z'=\int(-1)dx=-x+C_3;$$

$$z=\int(-x+C_3)dx=\underline{-\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4}.$$

Конкретні значення довільних сталих C_1, C_2, C_3, C_4 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{array}{ll} y(0)=0: & \\ z(0)=0: & \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1: & \\ z\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi^2}{16}: & \end{array} \begin{cases} 0=C_1; \\ 0=C_4; \\ 1=C_2; \\ -\frac{\pi^2}{16}=-\frac{\pi^2}{32}+C_3\frac{\pi}{4}; \end{cases} \begin{array}{l} C_1=0; \\ C_4=0; \\ C_2=1; \\ C_3=-\frac{\pi}{8}. \end{array}$$

Отже, допустимі екстремалі:

$$\begin{cases} y = \sin 2x; \\ z = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\pi x}{8}. \end{cases}$$

б) Знайдемо похідні, що входять в систему рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$F(x, y, z, y', z') = (y')^2 + (z')^2 - 2yz; \quad F'_y = -2z;$

$F'_{y'} = 2y'; \ \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''; \ F'_z = -2y; \ F'_{z'} = 2z'; \ \dfrac{d}{dx}F'_{z'} = 2z''.$

Тоді система рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\begin{cases} F'_y - \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 0; \\ F'_z - \dfrac{d}{dx}F'_{z'} = 0 \end{cases}$$

набуває вигляду: $\begin{cases} -2z - 2y'' = 0; \\ -2y - 2z'' = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y'' + z = 0; \\ z'' + y = 0. \end{cases}$

Розв'яжемо останню систему зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку:

$y''' + z' = 0; \ y^{IV} + z'' = 0; \ z'' = -y; \ y^{IV} - y = 0;$

$k^4 - 1 = 0; \ (k^2 + 1)(k^2 - 1) = 0; \ k^2 - 1 = 0 \text{ або } k^2 + 1 = 0;$

$k_{1,2} = \pm 1; \ k_{3,4} = \pm i; \ y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x;$

$z = -y''; \ y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x;$

$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x;$

$z = -C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$

Використавши крайові умови, знайдемо C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{array}{l} y(0)=0: \\ z(0)=0: \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1: \\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=1: \end{array} \quad \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + C_3; \\ 0 = -C_1 - C_2 + C_3; \\ 1 = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4; \\ 1 = -C_1 e^{\frac{\pi}{2}} - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4; \end{cases} \quad \begin{array}{l} C_3 = 0;\ C_4 = 1; \\ C_1 = 0;\ C_2 = 0. \end{array}$$

Отже, допустимі екстремалі: $\underline{\begin{cases} y = \sin x; \\ z = \sin x. \end{cases}}$

2.5. Канонічні рівняння екстремалей

Розглянемо систему рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Позначимо $p_i = F'_{y'_i}$, $i = \overline{1,n}.$ Функції $y_i, p_i, i = \overline{1,n}$ називаються ***канонічними змінними*** для функціоналу $I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) dx.$

При цьому змінні y_i і p_i називаються ***спряженими***. Введемо так звану ***функцію Гамільтона (гамільтоніан)*** $H = H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) =$

$$= -F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) + \sum_{i=1}^{n} y'_i\, p_i.$$

Знайдемо частині похідні гамільтоніана H по y_i та $p_i, i = \overline{1,n}$:

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = y'_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Оскільки $y'_i = \frac{dy_i}{dx}$, а з системи рівнянь Ейлера-

Лагранжа $\frac{\partial F}{\partial y_i} = F'_{y_i} = \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = \frac{dp_i}{dx}$, то мають місце співвідношення:

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, & i = \overline{1,n}; \\ \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Одержана система називається ***канонічною системою рівнянь екстремалей*** для функціоналу

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) dx.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють заданим крайовим умовам (допустимі екстремалі):

1.1. $I[y] = \int_{-1}^{0} \left(12xy - (y')^2\right) dx;\ y(-1) = 1;\ y(0) = 0.$

1.2. $I[y] = \int_{0}^{1} \left(\sin y' + 2(y')^2\right) dx;\ y(0) = 3;\ y(1) = 1.$

1.3. $I[y] = \int_{0}^{1} \left(x + (y')^2\right) dx;\ y(0) = 1;\ y(1) = 2.$

1.4. $I[y] = \int_{0}^{1} \left((y')^2 - y^2 - y\right) e^{2x} dx;\ y(0) = 0;\ y(1) = e^{-1}.$

1.5. $I[y] = \int_{1}^{2} \left((y')^2 + 2yy' + y^2\right) dx;\ y(1) = 1;\ y(2) = 0.$

1.6. $I[y]=\int\limits_1^e \left(x(y')^2+yy'\right)dx;\ y(1)=0;\ y(e)=1.$

1.7. $I[y]=\int\limits_0^{2\pi} \left((y')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=1;\ y(2\pi)=1.$

1.8. $I[y]=\int\limits_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx;\ y(1)=3;\ y(2)=5.$

1.9. $I[y]=\int\limits_{-1}^1 \left(2xy'-\frac{1}{2}(y')^2\right)dx;\ y(-1)=0;\ y(1)=\frac{1}{2}.$

1.10. $I[y]=\int\limits_0^1 \left(y+2xy'+(y')^2\right)dx;\ y(0)=1;\ y(1)=2.$

1.11. $I[y]=\int\limits_0^1 e^y(1+xy')dx;\ y(0)=0;\ y(1)=0.$

1.12. $I[y]=\int\limits_0^1 \left(xy'-(y')^2\right)dx;\ y(0)=1;\ y(1)=\frac{1}{4}.$

1.13. $I[y]=\int\limits_{-1}^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx;\ y(-1)=1;\ y(2)=4.$

1.14. $I[y]=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(y^2-2(y')^2\right)e^{-x}dx;\ y(0)=0;\ y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}.$

1.15. $I[y]=\int\limits_1^2 \left(x^2(y')^2+12y^2\right)dx;\ y(1)=1;\ y(2)=8.$

1.16. $I[y]=\int\limits_0^1 \left(y^2+2xyy'\right)dx;\ y(0)=0;\ y(1)=0.$

1.17. $I[y]=\int\limits_0^1 \left(e^y+xy'\right)dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1.$

1.18. $I[y]=\int\limits_0^2 \left(xy'+(y')^2\right)dx;\ y(0)=1;\ y(2)=0.$

1.19. $I[y]=\int\limits_0^1 \left(xy+y^2-2y^2y'\right)dx;\ y(0)=1;\ y(1)=2.$

1.20. $I[y]=\int\limits_1^2 \left(x^2(y')^2+2y^2+2xy\right)dx;\ y(1)=1;\ y(2)=8.$

1.21. $I[y]=\int\limits_0^1 \frac{dx}{(y')^2};\ y(0)=0;\ y(1)=1.$

2. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

2.1. $I[y]=\int\limits_0^1 \left((y')^2+(y'')^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y'(0)=1;$

$y(1)=sh1;\ y'(1)=ch1.$

2.2. $I[y]=\int\limits_0^1 \left(360x^2y-(y'')^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y'(0)=1;$

$y(1)=0;\ y'(1)=\frac{5}{2}.$

2.3. $I[y]=\int\limits_0^1 \left(2xy+(y''')^2\right)dx;\ y(0)=1;\ y'(0)=-1;$

$y''(0)=0;\ y(1)=0;\ y'(1)=0;\ y''(1)=0.$

3. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

3.1. $I[y,z]=\int\limits_0^1 \left((y')^2+(z')^2+2y\right)dx;$

$$y(0)=1;\quad z(0)=0;\quad y(1)=\frac{3}{2};\quad z(1)=1.$$

3.2. $I[y,z]=\int\limits_{1}^{2}\left((y')^2+z^2+(z')^2\right)dx;$

$$y(1)=1;\quad z(1)=0;\quad y(2)=2;\quad z(2)=1.$$

3.3. $I[y,z]=\int\limits_{0}^{\pi}\left(2yz-2y^2+(y')^2-(z')^2\right)dx;$

$$y(0)=0;\quad z(0)=0;\quad y(\pi)=1;\quad z(\pi)=-1.$$

3.4. $I[y,z]=\int\limits_{-1}^{1}\left(2xy-(y')^2+\frac{(z')^2}{3}\right)dx;$

$$y(-1)=2;\quad z(-1)=-1;\quad y(1)=0;\quad z(1)=1.$$

3.5. $I[y,z]=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left((y')^2-2xyz'\right)dx;$

$$y\left(\tfrac{1}{2}\right)=2;\quad z\left(\tfrac{1}{2}\right)=15;\quad y(1)=1;\quad z(1)=1.$$

3.6. $I[y,z]=\int\limits_{1}^{2}\left((z')^2-xy'z\right)dx;$

$$y(1)=1;\quad z(1)=1;\quad y(2)=-\frac{1}{6};\quad z(2)=\frac{1}{2}.$$

Завдання 3. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ

Достатні умови екстремуму. Задачі на умовний екстремум функціоналу: ізопериметрична задача і задача Лагранжа. Варіаційна задача з рухомими кінцями. Умови трансверсальності. Варіаційні принципи.

3.1. Достатні умови екстремуму

В багатьох варіаційних задачах існування та характер екстремуму очевидні з геометричного чи фізичного змісту задачі. Якщо при цьому допустима екстремаль єдина, то вона і буде розв'язком варіаційної задачі. В загальному випадку для того, щоб встановити наявність і характер екстремуму, треба скористатись достатніми умовами екстремуму.

Нехай функція $y_0(x)$ є допустимою екстремаллю функціоналу $I[y]$ в розглядуваному класі допустимих функцій D_1, тобто на цій кривій виконується необхідна умова екстремуму $\delta I[y_0, \delta y] = 0$. Характер екстремуму (максимум чи мінімум) визначається знаком приросту функціоналу: якщо $\Delta I \geq 0$, то функціонал має мінімум, а якщо $\Delta I \leq 0$, то — максимум. Оскільки на допустимій екстремалі перша варіація дорівнює нулю $\delta I[y_0, \delta y] = 0$, то знак приросту функціоналу ΔI для довільної досить малої варіації аргументу δI визначається знаком другої варіації функціоналу $\delta^2 I$.

Достатня умова екстремуму у варіаційній формі*: якщо на розглядуваному класі допустимих функцій D_1 для довільної досить малої варіації функції δy на допустимій екстремалі $y_0(x)$ друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ додатня $\delta^2 I > 0$, то на цій екстремалі функціонал має мінімум, якщо друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ від'ємна $\delta^2 I < 0$, то — максимум, якщо ж друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ набуває значень обох знаків, то екстремуму немає.*

При певних умовах знак другої варіації $\delta^2 I$

функціоналу $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ визначається знаком другої похідної $F''_{y'y'}$. Звідси випливають ***достатні умови Лежандра***:

*1. **Посилені достатні умови Лежандра**: якщо на допустимій екстремалі $y_0(x)$ виконується нерівність $F''_{y'y'}>0$, то на цій екстремалі функціонал має слабкий мінімум, а якщо нерівність $F''_{y'y'}<0$, то — слабкий максимум.*

2. Якщо в точках $(x;y)$, які близькі до допустимої екстремалі $y_0(x)$, виконується нерівність $F''_{y'y'}\ge 0$ $(F''_{y'y'}\le 0)$ при довільних значеннях y', то ця екстремаль реалізує сильний мінімум (сильний максимум).

Приклад 10. Користуючись посиленими достатніми умовами Лежандра, дослідити на екстремум функціонал при заданих крайових умовах:

а) $I[y]=\int\limits_1^e\left(x+2y+\dfrac{(y')^2x}{2}\right)dx;\ y(1)=3;\ y(e)=2e+1.$

б) $I[y]=\int\limits_0^1 e^x\left(2y^2+(y')^2\right)dx;\ y(0)=1;\ y(1)=e.$

в) $I[y]=\int\limits_0^e (e+x)(y')^2\,dx;\ y(0)=1-\ln 2;\ y(e)=1.$

г) $I[y]=\int\limits_0^e \dfrac{e^{-y}}{y'}dx;\ \ y(0)=1;\ y(e)=1+\ln 2.$

Розв'язання. а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=x+2y+\frac{(y')^2 x}{2};\ F'_y=2;\ F'_{y'}=\frac{1}{2}\cdot 2y'x=y'x;$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=y''x+y'.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду: $2-y''x-y'=0;\ y''+\frac{1}{x}y'=\frac{2}{x}.$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$p=y';\ y''=p';\ p'+\frac{1}{x}p=\frac{2}{x};\ p=uv;\ p'=u'v+v'u;\ u'v+v'u+$$

$$+\frac{1}{x}uv=\frac{2}{x};\quad u'v+u\left(v'+\frac{1}{x}v\right)=\frac{2}{x};\quad v'+\frac{1}{x}v=0;$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x};\ \ln|v|=-\ln|x|;\ v=\frac{1}{x};\quad u'\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x};\ u'=2;\ u=2x+C_1;$$

$$p=(2x+C_1)\cdot\frac{1}{x};\ y'=(2x+C_1)\cdot\frac{1}{x};$$

$y=\int\left(2+C_1\frac{1}{x}\right)dx=2x+C_1\ln|x|+C_2$ — екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases}3=2+C_2; & C_2=1;\\ 2e+1=2e+C_1+C_2; & C_1=0.\end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=2x+1}$.

Оскільки на допустимій екстремалі $F''_{y'y'}=x>0$, при $x\in[1;e]$, то функціонал має мінімум. Знайдемо його значення:

$$y' = 2;\ F(x, y, y') = x + 2(2x+1) + \frac{(2)^2 x}{2} = 7x + 2;$$

$$I_{\min} = I[2x+1] = \int_1^e (7x+2)dx = \left.\frac{7x^2}{2}\right|_1^e + \left.2x\right|_1^e = \underline{\frac{7e^2 + 4e - 11}{2}}.$$

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = e^x\left(2y^2 + (y')^2\right);\ F'_y = 4e^x y;\ F'_{y'} = 2e^x y';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = 2\left(e^x y' + e^x y''\right) = 2e^x\left(y' + y''\right).$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду: $4e^x y - 2e^x\left(y' + y''\right) = 0;\ y'' + y' - 2 = 0.$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$k^2 + k - 2 = 0;\ k_1 = 1;\ k_2 = -2;\ y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ — екстремалі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2; & C_1 = 1; \\ e = C_1 e + C_2 e^{-2}; & C_2 = 0. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y = e^x}$.

Оскільки на допустимій екстремалі $F''_{y'y'} = 2e^x > 0$, при $x \in [0;1]$, то функціонал має мінімум. Знайдемо його значення:

$$y' = e^x;\ F(x, y, y') = e^x\left(2 \cdot e^{2x} + e^{2x}\right) = 3e^{3x};$$

$$I_{\min} = I\left[e^x\right] = \int_0^1 3e^{3x}dx = \left.e^{3x}\right|_0^1 = \underline{e^3 - 1}.$$

в) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y') = (e+x)(y')^2;\ F'_y = 0;\ F'_{y'} = 2(e+x)y';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = 2(y' + (e+x)y'').$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду: $-2(y' + (e+x)y'') = 0;\ (e+x)y'' + y' = 0.$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$y' = p;\ y'' = p';\ (e+x)p' + p = 0;\ \int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dx}{e+x};$$

$$\ln|p| = -\ln|e+x| + \ln C_1;\ p = \frac{C_1}{e+x};\ y' = \frac{C_1}{e+x};$$

$y = \int\frac{C_1}{e+x}dx = C_1\ln|e+x| + C_2$ — екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases} 1 - \ln 2 = C_1 + C_2; & C_1 = 1; \\ 1 = C_1(1+\ln 2) + C_2; & C_2 = -\ln 2. \end{cases}$$

Отже, $y = \ln(e+x) - \ln 2 = \underline{\ln\frac{e+x}{2}}$ — допустима екстремаль.

Оскільки на допустимій екстремалі $F''_{y'y'} = 2(e+x) > 0$, при $x \in [0;e]$, то функціонал має мінімум. Знайдемо його значення:

$$y' = \frac{1}{e+x};\ F(x,y,y') = (e+x)\left(\frac{1}{e+x}\right)^2 = \frac{1}{e+x};$$

$$I_{\min} = I\left[\ln\frac{e+x}{2}\right] = \int_0^e \frac{1}{e+x}dx = \ln|e+x|\Big\|_0^e = \underline{\underline{\ln 2}}.$$

г) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=\frac{e^{-y}}{y'};\ F'_y=-\frac{e^{-y}}{y'};\ F'_{y'}=-\frac{e^{-y}}{(y')^2};$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=-e^{-y}(-1)\cdot y'\cdot\frac{1}{(y')^2}-e^{-y}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(y')^3}\cdot y''=$$

$$=\frac{e^{-y}}{y'}+\frac{2e^{-y}\cdot y''}{(y')^3}.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду: $-\frac{e^{-y}}{y'}-\frac{e^{-y}}{y'}-\frac{2e^{-y}\cdot y''}{(y')^3}=0;\quad y''+(y')^2=0.$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$y'=p;\ p=p(y);\ y''=p'p;\ p'\cdot p+p^2=0;\ p'=-p;\ \int\frac{dp}{p}=-\int dy;$$

$$\ln|p|=-y+\ln C_1;\ p=C_1e^{-y};\ y'=C_1e^{-y};\ \int e^y dy=C_1\int dx;$$

$e^y=C_1x+C_2;\ y=\ln(C_1x+C_2)$ — екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases}1=\ln C_2; & C_2=e;\\ 1+\ln 2=\ln(C_1e+C_2); & C_1=1.\end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=\ln(x+e)}$.

Скористаємося посиленими достатніми умовами Лежандра: $F''_{y'y'}=2e^{-y}\cdot(y')^{-3}$. На допустимій екстремалі $y=\ln(x+e)$ маємо: $y'=\frac{1}{x+e}$;

$$F''_{y'y'}=2e^{-\ln(x+e)}\cdot\left(\frac{1}{x+e}\right)^{-3}=2(x+e)^2>0 \text{ при } x\in[0;e].$$

Отже, на цій екстремалі функціонал досягає мінімуму. Знайдемо його значення:

$$F(x,y,y') = e^{-y} \cdot (y')^{-1} = e^{-\ln(x+e)} \cdot \left(\frac{1}{x+e}\right)^{-1} = 1;$$

$$I_{\min} = I[\ln(x+e)] = \int_0^e 1dx = \underline{e}.$$

3.2. Умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача

Варіаційною ***задачею на умовний екстремум*** називається задача дослідження на екстремум функціоналу, коли на функції, від вибору яких залежить цей функціонал, крім крайових, накладено інші додаткові умови, що звуться ***зв'язками***.

В залежності від їх характеру зв'язки поділяються на: а) ***алгебраїчні*** або ***скінченні (голономні)***; б) ***диференціальні*** або ***неголономні***; в) ***інтергральні*** або ***ізопериметричні***.

За допомогою ***методу множників Лагранжа*** задачі на умовний екстремум зводяться до задач на безумовний екстремум.

Задача Лагранжа: знайти функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, які доставляють мінімум (максимум) функціоналу

$$I[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) dx$$

і задовольняють рівняння зв'язку

$$\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0, \quad j = \overline{1,m},\ m < n,$$

а також крайові умови

$$y_i(x_1) = y_{i1}, \quad y_i(x_2) = y_{i2}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Припускається, що рівняння зв'язку незалежні, а крайові умови їх задовольняють.

Теорема. *Якщо функції* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *є допустимими екстремалями сформульованої задачі Лагранжа, то існують такі функції* $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, *(**множники Лагранжа**), що функції* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, *служать безумовними допустимими екстремалями для допоміжного функціоналу*

$$\overline{I}[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)dx$$

де $\overline{F}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j$ — *допоміжна функція (**функція Лагранжа**).*

Правило. Згідно з наведеною теоремою для знаходження допустимих екстремалей задачі Лагранжа необхідно:

1. Скласти функцію Лагранжа $\overline{F} = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j$ і відповідний допоміжний функціонал $\overline{I} = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F} dx$ з невизначеними функціями $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1,.m}$ — множниками Лагранжа.

2. Скласти систему рівнянь Ейлера-Лагранжа для допоміжного функціоналу:

$$\overline{F}'_{y_i} - \frac{d}{dx} \overline{F}'_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

приєднати до неї рівняння зв'язку

$$\varphi_j = 0, \quad j = \overline{1,m}$$

і з одержаної об'єднаної системи знайти екстремалі

$y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n), i = \overline{1,n}$, де $C_i, i = \overline{1,n}$ — довільні сталі, а також, якщо потрібно, множники Лагранжа $\lambda_j = \lambda_j(x, C_1, \ldots, C_n), j = \overline{1,m}$.

3. Використовуючи крайові умови, знайти конкретні значення $C_i, i = \overline{1,n}$ і допустимі екстремалі.

<u>Приклад 11.</u> Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y,z] = \int_0^1 (y^2 + z^2)dx$$

на зв'язку $y' = 3y + 4z$ при крайових умовах $y(0) = 1, y(1) = e^5$.

<u>Розв'язання</u>. Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал: $\varphi = y' - 3y - 4z$;

$$\overline{F} = F + \lambda\varphi; \overline{F} = y^2 + z^2 + \lambda(y' - 3y - 4z);$$

$$\overline{I} = \int_0^1 \overline{F}dx = \int_0^1 y^2 + z^2 + \lambda(y' - 3y - 4z)dx.$$

Складемо систему рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \overline{F}'_y - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0; \\ \overline{F}'_z - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} \overline{F}'_y = 2y - 3\lambda; & \overline{F}'_{y'} = \lambda; & \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = \lambda'; \\ \overline{F}'_z = 2z - 4\lambda; & \overline{F}'_{z'} = 0; & \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 0; \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2y - 3\lambda - \lambda' = 0; \\ 2z - 4\lambda = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda' = 2y - 3\lambda; \\ z = 2\lambda. \end{cases}$$

Враховуючи рівняння зв'язку, маємо систему:

$$\begin{cases} \lambda' = 2y - 3\lambda; \\ z = 2\lambda; \\ y' = 3y + 4z. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему зведенням до диференціального рівняння вищого порядку: