3.1. $y = y_1(x) = x;\ y = y_2(x) = \ln x;\ \left[e^{-1}; e\right].$

3.2. $y = y_1(x) = 2arctgx;\ y = y_2(x) = x;\ \left[0; \sqrt{3}\right].$

3.3. $y = y_1(x) = x^2;\ y = y_2(x) = 8\ln x;\ [1; e].$

4. Знайти варіацію δI для заданого функціоналу.

4.1. $I[y] = \int\limits_{-1}^{1}\left(y^3 - 3x^4 y\right)dx.$ 4.2. $I[y] = \int\limits_{0}^{1} y(y + x)dx.$

4.3. $I[y] = \int\limits_{0}^{1}\left(y^2 - (y')^2\right)dx.$ 4.4. $I[y] = \int\limits_{0}^{1}\left(xy + (y')^2\right)dx.$

4.5. $I[y] = \int\limits_{0}^{\pi} y' \cos y dx.$ 4.6. $I[y] = \int\limits_{1}^{3} y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$

4.7. $I[y] = \int\limits_{2}^{5} x^2 (y')^3\, dx.$ 4.8. $I[y] = \int\limits_{0}^{1} y' \cdot arctgy\, dx.$

4.9. $I[y] = \int\limits_{1}^{e} y \ln(x + y')dx.$

Завдання 2. НЕОБХІДНА УМОВА ЕКСТРЕМУМУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЕКСТРЕМАЛЕЙ

Необхідна умова екстремуму функціоналу. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння екстремалей (рівняння Ейлера).

Диференціальне рівняння екстремалей функціоналу, в який входять похідні вищих порядків (рівняння Ейлера-Пуассона). Система диференціальних рівнянь екстремалей функціоналу, що залежить від кількох функцій (система рівнянь Ейлера-Лагранжа). Канонічні рівняння екстремалей.

2.1. Необхідна умова екстремуму функціоналу

Як відомо, необхідна умова екстремуму функції полягає в рівності нулю її диференціала. Аналогічно, для функціоналу справедлива теорема (***необхідна умова екстремуму*** в варіаційній формі):

Якщо функціонал $I[y]$ *має варіацію* δI *і досягає на деякій функції* $y_0 = y_0(x)$ *екстремуму, то його варіація на цій функції дорівнює нулю:* $\delta I[y_0, \delta y] = 0$.

Доведення. Розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $y_0 + \alpha\delta y$, де α — деяке число. На вказаній сім'ї функцій функціонал $I[y]$ є функцією параметра α: $\delta I[y_0, \delta y] = \Phi(\alpha)$, яка згідно з умовою теореми має екстремум при α=0.

У відповідності з необхідною умовою екстремуму функції маємо $\left.\dfrac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$, тобто $\left.\dfrac{d}{d\alpha} I[y_0 + \alpha\delta y]\right|_{\alpha=0} = 0$. Згідно з другим означенням вказана похідна є варіацією функціоналу $\delta I[y_0, \delta y]$. Отже, $\delta I[y_0, \delta y] = 0$.

Функції, на яких варіація функціоналу існує і дорівнює нулю, називаються ***стаціонарними функ-***

ціями або ***допустимими екстремалями***.

2.2. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння екстремалей (рівняння Ейлера)

Знайти мінімум (максимум) функціоналу $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$ при крайових умовах $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$ серед неперервно диференційованих на відрізку $[x_1;x_2]$ функцій $y=y(x)y$, де x_1,x_2,y_1,y_2 — відомі числа.

Оскільки в даній задачі всі допустимі криві, серед яких шукається та, що доставляє екстремум функціоналу, проходять через дві різні нерухомі точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$, то поставлена задача називається ***варіаційною задачею з закріпленими кінцями***.

Теорема. *Допустимі екстремалі функціоналу* $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$ *з закріпленими кінцями* $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$, *визначаються як розв'язки диференціального рівняння* $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ *при крайових умовах* $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$.

Диференціальне рівняння другого порядку $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ називається ***рівнянням Ейлера***. Розв'язки рівняння Ейлера називаються ***екстремалями***, а само рівняння Ейлера — ***диференціальним рівнянням екстремалей***.

Таким чином, в даній задачі ***допустимі екстремалі*** виділяються зі всіх екстремалей врахуванням крайових умов.

Доведення. Необхідна умова екстремуму, з якої знаходяться екстремалі, має вигляд $\delta I[y,\delta y]=0$. Оскільки ця умова повинна виконуватись для будь-якої варіації функції δy, то при закріплених кінцях повинні справджуватись рівності $\delta y(x)=0,\ \delta y(x_2)=0$.

Виразимо варіацію функціоналу через функцію $F(x,y,y')$ та її похідні:

$$dI=\frac{d}{d\alpha}I[y_0+\alpha\,\delta y]=\frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\alpha}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\,dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+$$

$$+\alpha\delta y')\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha+F'_{y'}\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\times$$

$$\times\,(y'+\alpha\delta y')'_\alpha\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y+$$

$$+F'_{y'}\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y'\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y,y')\cdot\delta y+$$

$$+F'_{y'}\,(x,y,y')\cdot\delta y'\Big]dx=\int_{x_1}^{x_2}F'_y\,\delta y\,dx+\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'\,dx\ ,$$

де $F'_y=F'_y\,(x,y,y'),\quad F'_{y'}=F'_{y'}\,(x,y,y')$.

До другого доданка останньої рівності застосуємо інтегрування частинами:

$$\int_{x_1}^{x_2} F'_{y'}\,\delta y'\,dx = \left| \begin{array}{c} u = F'_{y'}; \quad du = \dfrac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx \\ dv = \delta y'\cdot dx = (\delta y)'\,dx; \quad v = \int (\delta y)'\,dx = \delta y \end{array} \right| =$$

$$= F'_{y'}\cdot\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y\cdot\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx = F'_{y'}\cdot\delta y(x_2) - F'_{y'}\cdot\delta y(x_1) -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx,$$

оскільки $\delta y(x_1)=0,\qquad \delta y(x_2)=0.$

Тоді варіацію функціоналу можна подати у вигляді

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} F'_y\cdot\delta y\,dx - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

На екстремалі варіація функціоналу повинна дорівнювати нулю:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx = 0,$$

причому для довільної варіації функції δy такої, що $\delta y(x_1)=0$, $\delta y(x_2)=0$. Це можливо лише за умови, що вираз в дужках під знаком інтеграла дорівнює нулю для всіх x із відрізка $[x_1;x_2]$:

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0.$$

Приклад 5. Знайти екстремалі функціоналу:

а) $I[y] = \int_0^1 \left(2y - 2xy' + (y')^2\right)dx;$

б) $I[y] = \int_0^{+\infty}\left(a^2y^2 + (y')^2\right)dx,$ де $a=const,\ a>0.$

Розв'язання. а)Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y') = 2y - 2xy' + (y')^2; \quad F'_y = 2; \quad F'_{y'} = -2x + 2y';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}(-2x + 2y') = -2 + 2y''$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду: 2-(-2+2y")=0; y"+2=0.

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y = \int(-2)dx = -2x + C_1; \quad y = \int(-2x + C_1)dx =$$

$$= -x^2 + C_1x + C_2.$$

Отже, екстремалями служать функції:

$$\underline{y = -x^2 + C_1x + C_2},$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера: $F(x,y,y') = a^2y^2 + (y')^2$; $F'_y = 2a^2y$;

$$F'_{y'} = 2y'; \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду $2a^2y-2y''=0$; $y''-a^2y=0$.

Розв'яжемо одержане рівняння:

$k^2 - \alpha^2 = 0$; $k_{1,2} = \pm\alpha$; $\underline{y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{-\alpha x}}$ — шукані екстремалі, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Приклад 6. Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(9y^2-(y')^2\right)dx;\ y(0)=2;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

б) $I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(4y\cos x+(y')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y(\pi)=0;$

в) $I[y]=\int\limits_0^{1}\left(y^2+(y')^2+8y\left(e^{-x}+3e^{2x}\right)\right)dx;$

$y(0)=4;\ y(1)=4e^2;$

г) $I[y]=\int\limits_0^{1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx;\ y(0)=1;\ y(1)=0.$

Розв'язання. а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$F(x,y,y')=9y^2-(y')^2;\ F'_y=18y;\ F'_{y'}=-2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=-2y''.$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду

$18y-(-2y'')=0; \qquad y''+9y=0.$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$к^2+9=0; \qquad к_{1,2}=\pm 3i.$

Екстремалями служать функції

$y=C_1\cos 0+C_2\sin 0,$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Знайдемо конкретні значення C_1 і C_2 із крайових умов:

$$\begin{cases} C_1\cos 0+C_2\sin 0=2; & C_1=2;\\ C_1\cos\frac{3\pi}{2}+C_2\sin\frac{3\pi}{2}=0; & C_2=0.\end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль

$\underline{y=2\cos 3x}$.

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y') = 4y\cos x + (y')^2 - y^2;\ F'_y = 4\cos x - 2y;\ F'_{y'} = 2y';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

4cosx-2y-2y"=0; y"+y=2cosx.

Розв'яжемо одержане рівняння:

y"+y=0; $к^2+1=0$; $к_{1,2}=\pm i$; $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x;$

$$y_* = (A\cos x + B\sin x)x;\quad y'_* = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + \\ + B\cos x);$$

$$y''_* = 2(-A\sin x + B\cos x) - x(A\cos x + B\sin x);$$

$$2(-A\sin x + B\cos x) - x(A\cos x + B\sin x) + (A\cos x + B\sin x)x = \\ = 2\cos x;\quad -A\sin x + B\cos x = \cos x;$$

$$\begin{matrix} \cos x: \\ \sin x: \end{matrix}\begin{cases} B = 1; & B = 1; \\ -A = 0; & A = 0; \quad y_* = x\sin x; \end{cases}$$

$y = \overline{y} + y_* = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x$ — екстремалі, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Крайові умови дають систему алгебраїчних рівнянь для знаходження C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 + 0\cdot\sin 0 = 0; \\ C_1\cos\pi + C_2\sin\pi + \pi\cdot\sin\pi = 0; \end{cases}\quad \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 + C_2\cdot 0 = 0; \end{cases}$$

$$C_1 = 0;\quad 0\cdot C_2 = 0.$$

З останньої рівності випливає, що C_2 може набувати довільних значень. Значить, допустимими екстремалями служать функції

<u>$y=C_2\sin x+x\sin x$,</u>

де C_2 — довільна стала.

Таким чином, варіаційна задача має нескінченну множину розв'язків.

в) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = y^2 + (y')^2 + 8y\left(e^{-x} + 3e^{2x}\right); \; F'_y = 2y + 8\left(e^{-x} + \right.$$

$$\left. + 3e^{2x}\right); \quad F'_{y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$2y + 8\left(e^{-x} + 3e^{2x}\right) - 2y'' = 0; \quad y'' - y = 4e^{-x} + 12e^{2x}.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$y'' - y = 0$; $k^2 - 1 = 0$; $k_{1,2} = \pm 1$; $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$;

$f_1(x) = 4e^{-x}$; $y_{*1} = Axe^{-x}$; $y'_{*1} = Ae^{-x} - Axe^{-x}$;

$y''_{*1} = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = Axe^{-x} - 2Ae^{-x}$;

$Axe^{-x} - 2Ae^{-x} - Axe^{-x} = 4e^{-x}$; $-2A = 4$; $A = -2$;

$y_{*1} = -2xe^{-x}$; $f_2(x) = 12e^{2x}$; $y_{*2} = Ae^{2x}$; $y'_{*2} = 2Ae^{2x}$;

$y''_{*2} = 4Ae^{2x}$; $4Ae^{2x} - Ae^{2x} = 12e^{2x}$; $3A = 12$; $A = 4$;

$y_{*2} = 4e^{2x}$; $y_* = y_{*1} + y_{*2} = -2xe^{-x} + 4e^{2x}$;

$y = \overline{y} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 4e^{2x}$ — екстремалі, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Використаємо крайові умови для знаходження C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^{-0} - 2 \cdot 0 \cdot e^{-0} + 4e^{2 \cdot 0} = 4; \\ C_1 e^1 + C_2 e^{-1} - 2 \cdot 1 \cdot e^{-1} + 4e^{2 \cdot 1} = 4e^2; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 e + C_2 e^{-1} = 2e^{-1}; \end{cases}$$

$$C_1 = C_2; \quad -C_2 \cdot e + C_2 \cdot \frac{1}{e} = 2 \cdot \frac{1}{e}; \quad C_2\left(-e^2 + 1\right) = 2;$$

$$C_2=\frac{2}{1-e^2};\quad C_1=-\frac{2}{1-e^2}=\frac{2}{e^2-1}.$$

Отже, допустима екстремаль

$$\underline{y=\frac{2}{e^2-1}e^x+\frac{2}{1-e^2}e^{-x}-2xe^{-x}+4e^{2x}.}$$

г) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x};\quad F'_y=0;\quad F'_{y'}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+(y')^2}}2y'=$$

$$=\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}};\quad \frac{d}{dx}F'_{y'}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}\right).$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду: $-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0.$ Звідси

$$y'=\frac{C_1x}{\sqrt{1-C_1^2x^2}};\quad y=\int\frac{C_1xdx}{\sqrt{1-C_1^2x^2}}=\begin{vmatrix}u=1-C_1^2x^2;\\ du=-2C_1^2xdx\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2C_1}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{C_1}\sqrt{u}+C_2=-\frac{1}{C_1}\sqrt{1-C_1^2x^2}+C_2.$$

Отже, $y=-\frac{1}{C_1}\sqrt{1-C_1^2x^2}+C_2$ або в неявній формі $x^2+(y-C_2)^2=\frac{1}{C_1^2}$ - рівняння екстремалей.

Як бачимо, екстремалями служить сім'я кіл. Використовуючи крайові умови, знаходимо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 0^2+(1-C_2)^2=\dfrac{1}{C_1^2}; \\ 1^2+(0-C_2)^2=\dfrac{1}{C_1^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 1-2C_2+C_2^2=\dfrac{1}{C_1^2}; \\ 1+C_2^2=\dfrac{1}{C_1^2}; \end{cases}$$

$$-2C_2=0; \quad C_2=0; \quad \frac{1}{C_1^2}=1; \quad C_2=1.$$

Тоді $\underline{x^2+y^2=1}$ —допустима екстремаль.

<u>Приклад 7</u>. Визначити форму твердого тіла, що рухається в потоці газу з найменшим опором. Вважати шукане тіло тілом обертання.

<u>Розв'язання</u>. З фізичних міркувань випливає, що задача зводиться до мінімізації сили опору

$$I[y]=4\pi\rho v^2\int_0^l (y')^3\, y\,dx$$

при крайових умовах y(0)=0;   y(l)=R,
де ρ — густина газу, v —швидкість газу відносно тіла.

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=(y')^3 y; \quad F'_y=(y')^3; \quad F'_{y'}=y\cdot 3(y')^2=3y(y')^2;$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=\frac{d}{dx}\left(3y(y')^2\right)=3\left(y'\cdot(y')^2+y\cdot 2y'\cdot y''\right)=3(y')^3+6y\cdot y'\cdot y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\dfrac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду: $\quad (y')^3-\left(3(y')^3+6y\cdot y'\cdot y''\right)=0; \quad 3y\cdot y'\cdot y''+(y')^3=0.$

Ясно, що $y\neq const$, тоді $y'\neq 0$. Останнє рівняння спрощується: $\quad 3yy''+(y')^2=0.$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' = p, \quad p = p(y); \quad y'' = p' \cdot p; \quad p' = \frac{dp}{dy};$$

$$3y \cdot p' \cdot p + p^2 = 0 \quad \Big| \; : p = y' \neq 0; \quad 3y \cdot p' + p = 0;$$

$$3y\frac{dp}{dy} = -p; \quad \int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{3}\int \frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln|C_1|;$$

$$p = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y^{-\frac{1}{3}};$$

$$\int y^{\frac{1}{3}} dy = C_1 \int dx; \quad \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} = C_1 x + C_2;$$

$y = \left(\dfrac{4(C_1 x + C_2)}{3} \right)^{\frac{3}{4}}$ — екстремалі, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{4(C_1 \cdot 0 + C_2)}{3} \right)^{\frac{3}{4}} = 0; \qquad C_2 = 0; \\ \left(\dfrac{4(C_1 \cdot l + C_2)}{3} \right)^{\frac{3}{4}} = R; \qquad \dfrac{3}{4} C_1 l = R^{\frac{4}{3}}; \quad C_1 = \dfrac{3}{4} R^{\frac{4}{3}} l^{-1}. \end{cases}$$

Тоді $y = \left(\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{4} R^{\frac{4}{3}} l^{-1} x \right)^{\frac{3}{4}} = R\left(\dfrac{x}{l} \right)^{\frac{3}{4}}$ — допустима екстремаль.

Оскільки допустима екстремаль єдина і з фізичних міркувань випливає, що поставлена задача має розв'язок, то функція $\underline{y = R\left(\dfrac{x}{l} \right)^{\frac{3}{4}}}$ визначає форму тіла обертання з найменшим опором.

2.3. Диференціальне рівняння екстремалей функціоналу, в який входять похідні вищих порядків (рівняння Ейлера-Пуассона)

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) dx$$

при крайових умовах $y^{(i)}(x_1)=y_1^{(i)},\ y^{(i)}(x_2)=y_2^{(i)},\ i=\overline{0, n-1}.$

Із необхідної умови екстремуму $\delta I=0$ при $\delta y(x_1)=0$ і $\delta y(x_2)=0$ випливає, що допустимі екстремалі є розв'язками диференціального рівняння $F_y' + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{d^i}{dx^i} F'_{y^{(i)}} = 0$ при крайових умовах $y^{(i)}(x_1)=y_1^{(i)},\ y^{(i)}(x_2)=y_2^{(i)},\ i=\overline{0, n-1}.$

Розв'язки останнього диференціального рівняння називаються ***екстремалями***, а саме рівняння називається диференціальним рівнянням екстремалей або ***рівнянням Ейлера-Пуассона***.

Приклад 8. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

$$\text{а) } I[y]=\int_0^1 \left(y^2+2(y')^2+(y'')^2\right)dx;\ y(0)=0,\ y'(0)=1,$$

$y(1)=0,\ y'(1)=-sh1;$

$$\text{б) } I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((y'')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=1,\ y'(0)=0,$$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;$

в) $I[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(240y-(y''')^2\right)dx;\ y(-1)=1,\ y'(-1)=-\frac{9}{2},$

$y''(-1)=16,\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

<u>Розв'язання.</u> а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера-Пуассона:

$$F(x,y,y',y'')=y^2+2(y')^2+(y'')^2;\ F'_y=2y;\ F'_{y'}=2\cdot 2y'=$$

$$=4y';\ F'_{y''}=2y'';\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=\frac{d}{dx}(4y')=4y'';\ \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(2y'')\right)=\frac{d}{dx}(2y''')=2y^{IV}.$$

Тоді рівняння Ейлера-Пуассона $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F'_{y''}=0$ набуває вигляду:

$2y-4y''+2y^{IV}=0;\ y^{IV}-2y''+y=0.$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$k^4-2k^2+1=0;\ \left(k^2-1\right)^2=0;\ k_1=k_2=1;\ k_3=k_4=-1;$$

$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}$ — екстремалі, де C_1,C_2,C_3,C_4 — довільні сталі.

Допустимі екстремалі знайдемо, визначивши конкретні значення C_1,C_2,C_3,C_4 із крайових умов:

$$y'=C_1e^x+C_2e^x+C_2xe^x-C_3e^{-x}+C_4e^{-x}-C_4xe^{-x};$$

$$\begin{cases} 0 = C_1e^0 + C_2 \cdot 0e^0 + C_3e^{-0} + C_4 \cdot 0e^{-0}; \\ 1 = C_1e^0 + C_2e^0 + C_2 \cdot 0e^0 - C_3e^{-0} + C_4e^{-0} - C_4 \cdot 0e^{-0}; \\ 0 = C_1e^1 + C_2 \cdot 1e^1 + C_3e^{-1} + C_4 \cdot 1e^{-1}; \\ -sh1 = C_1e^1 + C_2e^1 + C_2 \cdot 1e^1 - C_3e^{-1} + C_4e^{-1} - C_4 \cdot 1e^{-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_3; \\ 1 = C_1 + C_2 - C_3 + C_4; \\ 0 = C_1e + C_2e + C_3e^{-1} + C_4e^{-1}; \\ -sh1 = C_1e + 2C_2e - C_3e; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = \frac{1}{2}; & C_3 = -\frac{1}{2}; \\ C_2 = -\frac{1}{2}; & C_4 = \frac{1}{2}. \end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль

$$y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} = \underline{(1-x)sh\,x.}$$

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера-Пуассона:

$$F(x, y, y', y'') = (y'')^2 - y^2;\ F'_y = -2y;\ F'_{y'} = 0;\ F'_{y''} = 2y'';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = 0;\ \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 2y^{IV}.$$

Тоді рівняння Ейлера-Пуассона

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 0$$

набуває вигляду $-2y - 0 + 2y^{IV} = 0;\ y^{IV} - y = 0.$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$k^4 - 1 = 0;\ (k^2-1)(k^2+1) = 0;\ \left[\begin{array}{l} k^2 - 1 = 0;\ k_{1,2} = \pm 1; \\ k^2 + 1 = 0;\ k_{3,4} = \pm i; \end{array} \right.$$

$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$ — екстремалі.

Конкретні значення C_1, C_2, C_3, C_4 знайдемо з крайових умов: $y' = C_1e^x - C_2e^{-x} - C_3\sin x + C_4\cos x;$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + C_3; \\ 0 = C_1 - C_2 + C_4; \\ 0 = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4; \\ -1 = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_3; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = 0; & C_3 = 1; \\ C_2 = 0; & C_4 = 0. \end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y = \cos x}$.

в) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера-Пуассона:

$$F(x, y, y', y'', y''') = 240y - (y''')^2;\ F'_y = 240;\ F'_{y'} = 0;\ F'_{y''} = 0;$$

$$F'_{y'''} = -2y''';\ \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0;\ \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} = 0;\ \frac{d^3}{dx^3} F'_{y'''} = -2y^{(6)}.$$

Тоді рівняння Ейлера-Пуассона

$$F'_{y'} - \frac{d}{dx} F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F'_{y''} - \frac{d^3}{dx^3} F'_{y'''} = 0$$

набуває вигляду $240 - 0 + 0 - \left(-2y^{(6)}\right) = 0;\ y^{(6)} + 120 = 0.$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$y^{(6)} = -120;\ \ y^{(5)} = -120x + C_1;$$

$$y^{(4)} = \int (-120x + C_1) dx = -60x^2 + C_1 x + C_2;$$

$$y^{(3)} = \int \left(-60x^2 + C_1 x + C_2\right) dx = -20x^3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3;$$

$$y^{(2)} = \int \left(-20x^3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right) dx = -5x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} +$$

$$+ C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4;$$

$$y^{(1)} = \int \left(-5x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4\right) dx = -x^5 +$$

$$+C_1\frac{x^4}{24}+C_2\frac{x^3}{6}+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5;$$

$$y=\int\left(-x^5+C_1\frac{x^4}{24}+C_2\frac{x^3}{6}+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5\right)dx=-\frac{x^6}{6}+$$

$$+C_1\frac{x^5}{120}+C_2\frac{x^4}{24}+C_3\frac{x^3}{6}+C_4\frac{x^2}{2}+C_5x+C_6$$ — екстремалі, де $C_1, C_2, \dots, C_6$ — довільні сталі.

Використавши крайові умови, знайдемо значення $C_1, C_2, \dots, C_6$.

Спочатку із крайових умов $y^{(i)}(0)=0,\ i=\overline{0,2}$ визначаємо $C_4=C_5=C_6=0$.

Тоді на основі крайових умов $y(-1)=1;\ y'(-1)=-\frac{9}{2};\ y''(-1)=16$ одержуємо систему для знаходження C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 1=-\frac{1}{6}-\frac{C_1}{120}+\frac{C_2}{24}-\frac{C_3}{6}; \\ -\frac{9}{2}=1+\frac{C_1}{24}-\frac{C_2}{6}+\frac{C_3}{2}; \\ 16=-5-\frac{C_1}{6}+\frac{C_2}{2}-C_3; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_3=-1; \quad C_2=0; \\ C_1=-120. \end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=-\frac{x^6}{6}-x^5-\frac{x^3}{6}}$.

2.4. Система диференціальних рівнянь екстремалей функціоналу, що залежить від кількох функцій (система рівнянь Ейлера-Лагранжа)

Ставиться задача знаходження мінімуму (мак-