МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

(Конспект лекцій з вправами для самостійної роботи)

Харків — ХДАМГ — 2000

Передмова

Методи варіаційного числення знаходять широке застосування в різних галузях науки та виробництва при постановці та розв'язуванні задач моделювання, оптимізації та управління. Володіння ними стає складовою частиною сучасної інженерної освіти.

Цей посібник орієнтований на студентів нематематичних спеціальностей і має на меті допомогти їм під час вивчення та перевірки засвоєння відповідно теоретичного матеріалу і розв'язування задач для самостійної роботи.

Вся тема розбита на окремі модулі-завдання, кожне з яких включає короткі теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач і вправи для самостійної роботи.

У кінці наведено перелік запитань для самоперевірки та підготовки до екзамену (заліку), а також список рекомендованої літератури.

Завдання 1. ФУНКЦІОНАЛ ТА ЙОГО ВАРІАЦІЯ. ЕКСТРЕМУМ

Поняття про функціонал. Екстремум функціоналу. Класичні задачі варіаційного числення. Варіація функції та приріст функціоналу. Неперервність функціоналу. Лінійний функціонал. Перша та друга варіації функціоналу.

1.1. Поняття про функціонал

Нехай задано деякий клас D функцій $y(x)$. Якщо кожній функції $y(x)$ із класу D за деяким законом ставиться у відповідність певне числове значення змінної I, то ця змінна I називається ***функціоналом*** від однієї функціональної змінної $y(x)$ і позначається

$I = I[y] = I[y(x)]$.

Клас D функцій $y(x)$, на яких визначений функціонал, називається ***областю визначення*** функціоналу. При цьому функція $y(x)$ служить ***незалежною змінною (аргументом)*** функціоналу. Функції із області визначення D даного функціоналу I називаються ***функціями порівняння*** або ***допустимими функціями***.

Кожну функцію $y(x)$, яка належить області визначення D функціоналу $I[y]$, можна розглядати як точку (елемент) деякої множини (простору) функцій. Простори, елементами яких служать функції, називаються функціональними просторами. Можна сказати, що функціонал — це функція, в якої значеннями незалежної змінної $y(x)$ є точки (елементи) функціонального простору, а значеннями залежної змінної I — числа.

Можна розглядати також функціонали від кількох незалежних функціональних змінних. Якщо скінченному набору функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ з певного класу функцій D ставиться у відповідність за деяким законом певне числове значення змінної I, то I називається функціоналом від n функціональних змінних і позначається $I = I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \; = I[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$.

Приклад 1. Обчислити заданий функціонал при заданих значеннях аргументу:

а) $I[y] = y(4); \; y_1 = \sqrt{x}; \; y_2 = \cos\dfrac{\pi x}{4}$.

б) $I[y] = \lim\limits_{x \to +\infty} y; \; y_1 = arctgx; \; y_2 = e^{-x}$.

в) $I[y] = y'(0); \; y_1 = \dfrac{x}{\cos x}; \; y_2 = tg^2 x^3$.

г) $I[y]=\int\limits_0^2 y^2(x)dx;\ y_1=\sin\pi x;\ y_2=xe^x.$

д) $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx;\ y_1=x;\ y_2=\ln\cos x.$

е) $I[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y^3 z dx;\ y_1=\cos x;\ z_1=\sin^2 x.$

Розв'язання.

а) $I[y_1]=\sqrt{4}=2;\ I[y_2]=\cos\frac{4\pi}{4}=-1.$

б) $I[y_1]=\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx=\frac{\pi}{2};\ I[y_2]=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0.$

в) $I[y_1]=\left(\frac{x}{\cos x}\right)'\Bigg|_{x=0}=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\Bigg|_{x=0}=1;$

$I[y_2]=\left(tg^2x^3\right)'\Big|_{x=0}=2tgx^3\,\frac{1}{\cos^2 x^3}\cdot 3x^2\Bigg|_{x=0}=0.$

г) $I[y_1]=\int\limits_0^2\sin^2\pi x dx=\int\limits_0^2\frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx-$

$-\frac{1}{2}\int\limits_0^2\cos 2\pi x dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^2-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x\Big|_0^2=1;\ I[y_2]=\int\limits_0^2 xe^x dx=$

$=xe^x\Big|_0^2-\int\limits_0^2 e^x dx=2e^2-e^x\Big|_0^2=2e^2-e^2+e^0=e^2-1.$

д) $y'_1=x'=1;\ I[y_1]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+1^2}\,dx=\sqrt{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{6};$

$$y_2=(\ln\cos x)'=-tgx;\ I[y_2]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(-tgx)^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x}=$$

$$\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\left|tg\frac{\pi}{3}\right|-\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|=\ln\sqrt{3}.$$

е) $I[y_1,z_1]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin^2 xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos xdx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin x=u;\ du=\cos xdx\\ \cos^2 x=1-u^2\\ u_H=\sin 0=0;\ u_B=\sin\frac{\pi}{2}=1\end{array}\right|=\int\limits_0^1 u^2\left(1-u^2\right)du=$$

$$\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{15}.$$

Надалі будемо розглядати, в основному, функціонал вигляду $I[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$, областю визначення якого служить клас функцій $C_1[a,b]$, що визначені та неперервні разом з першою похідною на відрізку $[a,b]$.

1.2. Екстремум функціоналу

Відстанню нульового порядку між функціями (лініями) $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\rho_0=\rho_0(y_1,y_2)=$ $=\max\limits_{a\le x\le b}|y_1(x)-y_2(x)|$. При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні на відрізку

$[a;b]$.

Відстанню першого порядку між функціями (лініями) $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\rho_1=\rho_1(y_1,y_2)=$ $=\max\limits_{a\le x\le b}|y_1(x)-y_2(x)|+\max\limits_{a\le x\le b}|y'_1(x)-y'_2(x)|$. При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні разом зі своїми першими похідними на відрізку $[a;b]$.

Приклад 2. Знайти відстань першого порядку між кривими $y=y_1(x)=x^2$ і $y=y_2(x)=x^3$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання.

$$\rho_1=\max_{0\le x\le 1}|y_1(x)-y_2(x)|+\max_{0\le x\le 1}|y'_1(x)-y'_2(x)|.$$

Розглянемо функції $z_0(x)=y_1(x)-y_2(x)=x^2-x^3$ і $z_1(x)=y'_1(x)-y'_2(x)=2x-3x^2$. Знайдемо їх найбільші та найменші значення на відрізку $[0;1]$:

$$z'_0(x)=2x-3x^2;\ z'_0(x)=0;\ 2x-3x^2=0;\ x_1=0;\ x_2=\frac{2}{3};$$

$$z_0(0)=0;\ z'_0\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{27};\ \ z_0(1)=0;$$

$$\max_{0\le x\le 1} z_0(x)=\frac{4}{27};\quad \min_{0\le x\le 1} z_0(x)=0;$$

$$z'_1(x)=2-6x;\ z'_1(x)=0;\ 2-6x=0;\ x_1=\frac{1}{3};$$

$$z_1\left(\frac{1}{3}\right)=2\cdot\frac{1}{3}-3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3};\ z_1(0)=0;\ z_1(1)=-1;$$

$$\max_{0\le x\le 1} z_1(x) = \frac{1}{3}; \quad \min_{0\le x\le 1} z_1(x) = -1.$$

Тоді $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|y_1(x) - y_2(x)\right| = \max\limits_{0\le x\le 1}\left|z_0(x)\right| = \frac{4}{27}$;

$$\max_{0\le x\le 1}\left|y'_1(x) - y'_2(x)\right| = \max_{0\le x\le 1}\left|z_1(x)\right| = 1;$$

$$\rho_1 = \frac{4}{27} + 1 = 1\frac{4}{27}.$$

Нехай D_1 — деякий клас функцій порівняння (підмножина області визначення D) функціоналу $I = I[y]$. Функціонал $I = I[y]$ має в цьому класі D_1 ***абсолютний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $\overline{y}(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$ виконується рівність $I[y(x)] \ge I[\overline{y}(x)]$ $\left(I[y(x)] \le I[\overline{y}(x)]\right)$.

Функціонал $I = I[y]$ має в класі D_1 ***локальний або відносний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $y_0(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$, яка близька до функції $y_0(x)$, виконується рівність $I[y(x)] \ge I[y_0(x)]$ $\left(I[y(x)] \le I[y_0(x)]\right)$.

Максимуми і мінімуми називаються ***екстремумами***.

Якщо близькість функцій розуміється в смислі відстані нульового порядку, тобто $\rho_0(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***сильним***.

Якщо близькість функцій розуміється в смислі відстані першого порядку, тобто $\rho_1(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***слабким***.

На рис. 1 зображені лінії, близькі в смислі відстані нульового порядку (координати їх близькі, а напрямки дотичних можуть суттєво відрізнятись), а на рис. 2 наведені криві, близькі в смислі відстані першого порядку (близькі не тільки їх координати, а і напрямки дотичних).

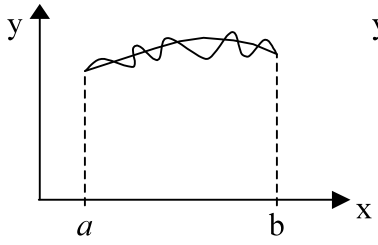

Рис.1

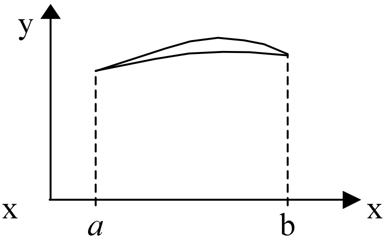

Рис.2

Абсолютний екстремум тим паче є відносним екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Сильний відносний екстремум тим паче є слабким екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Надалі будемо розглядати слабкий відносний екстремум і слова "слабкий", "відносний" будемо опускати.

Основною задачею варіаційного числення є дослідження функціоналу на екстремум.

1.3. Класичні задачі варіаційного числення

Задача про максимальну швидкодію (задача про брахістохрону). Знайти криву, розміщену у вертикальній площині, що сполучає дві задані точки $A(a;y_a)$ і $B(b;y_b)$, які не лежать на одній вертикальній прямій, і таку, що матеріальна точка, рухаючись по цій кривій під дією сили тяжіння з точки A без початкової швидкості досягне точки B за найменший проміжок часу (рис.3).

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ знайти таку, яка доставляє мінімум функціоналу

$$I[y]=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$$

при крайових умовах $y(a)=y_a$; $y(b)=y_b$.

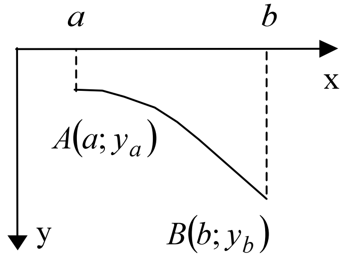

Рис. 3.

Задача про геодезичні лінії. Нехай на поверхні $\varphi(x,y,z)=0$ задано дві точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$. Серед всіх ліній, які лежать на даній поверхні і з'єднують точки A і B, вибрати ту, дуга AB якої має найменшу довжину.

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $x(t), y(t), z(t)$ параметра t знайти такі, які задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x(t),y(t),z(t))=0$ і доставляють мінімум функціоналу $I[y,y,z]=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$

при крайових умовах

$$x(t_1)=x_1;\ y(t_1)=y_1;\ z(t_1)=z_1;$$
$$x(t_2)=x_2;\ y(t_2)=y_2;\ z(t_2)=z_2.$$

Ізопериметрична задача (задача Дідо). Нехай на осі Ox задано дві точки $A(a;0)$ і $B(b;0)$. Серед всіх ліній заданої довжини l, які з'єднують на площині Oxy ці точки A і B, вибрати таку, що разом з відрізком AB обмежує найбільшу площу (рис.4).

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ вибрати таку, яка задовольняє рівняння зв'язку $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx=l$ і доставляє максимум функціоналу $I[y]=\int_a^b y(x)dx$ при крайових умовах $y(a)=0;\ y(b)=0.$

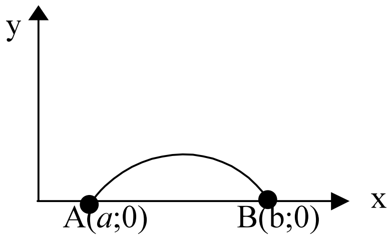

Рис. 4.

1.4. Варіація функції та приріст функціоналу. Неперервність. Лінійний функціонал

Нехай функціонал $I=I[y]$ визначений на класі функцій *D*, $y(x)$ і $\overline{y}(x)$ — довільні функції даного класу *D*. Функція, яка дорівнює різниці функцій $\overline{y}(x)$

і $y(x)$, називається ***приростом або варіацією аргументу*** y функціоналу $I[y]$ і позначається δy: $\delta y = \delta y(x) = \overline{y}(x) - y(x)$.

Тоді $\overline{y}(x) = y + \delta y$.

Різниця $\Delta I = \Delta I[y, \delta y] = I[y + \delta y] - I[y]$ називається ***приростом функціоналу*** $I[y]$, який відповідає варіації δy аргументу.

Зазначимо, що *похідна варіації функції дорівнює варіації похідної*: $(\delta y)' = \delta y'$. Дійсно, $(\delta y)' = (\overline{y}(x) - y(x))' = \overline{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$.

Якщо нескінченно малому приросту функції δy відповідає нескінченно малий приріст функціоналу ΔI, то такий функціонал $I[y]$ називається ***неперервним***. Точніше, функціонал $I[y]$ називається ***неперервним*** на кривій $y = y(x)$ в смислі відстані k–того порядку, якщо за довільно заданому $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при виконанні умови $\rho_k(y, y_0) < \delta$ справджується нерівність $|\Delta I| = |I[y] - I[y_0]| < \varepsilon$.

Функціонал $I[y]$ називається ***лінійним***, якщо виконуються умови:

1. Функціонал від алгебраїчної суми функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі функціоналів:

$$I[y_1 + y_2] = I[y_1] + I[y_2].$$

2. Сталий множник можна виносити за знак функціоналу: $I[cy] = cI[y]$.

1.5. Перша та друга варіації функціоналу

Якщо для довільно малої варіації аргументу δy приріст функціоналу ΔI можна подати у вигляді суми головної частини, лінійної відносно δy, та нескінченно малої вищого порядку порівняно з δy: $\Delta I = L[y, \Delta y] + \beta[y, \Delta y]$, де $L[y, \Delta y]$ — лінійний відносно δy функціонал, $\beta[y, \Delta y]$ — нескінченно малий вищого порядку порівняно з δy функціонал: $\beta[y, \Delta y] = o(\delta y)$, тобто, $\beta[y, \delta y] = \gamma[y, \delta y] \cdot \max|\delta y|$, де $\lim\limits_{\max|\delta y| \to 0} \gamma[y, \delta y] = 0$, то сам функціонал $I[y]$ називається ***варійовним***, а головна лінійна відносно δy частина його приросту $L[y, \Delta y]$ називається ***диференціалом*** або ***варіацією функціоналу*** і позначається δI: $\delta I = L[y, \delta y]$, $\Delta I = \delta I + \beta[y, \delta y]$, де $\beta[y, \delta y] = o(\delta y)$. (***Перше означення варіації*** функціоналу).

При дослідженні функціоналів варіація функціоналу відіграє роль, аналогічну тій, яку виконує при дослідженні функцій диференціал. В таблиці 1 наведено відповідність понять диференціального та варіаційного числень.

Таблиця 1

№ п/п	Диференціальне числення	Варіаційне числення
1.	Аргумент — числова змінна x	Аргумент — числова функція $y(x)$
2.	Залежна змінна — числова y	Залежна змінна — числова I
3.	Приріст аргументу Δx	Варіація аргументу δy
4.	Приріст функції Δy	Приріст функціоналу ΔI
5.	Диференціал функції dy	Варіація функціоналу δI
6.	Другий диференціал функції $d^2 y$	Друга варіація функціоналу $\delta^2 I$
7.	Необхідна умова екс-	Необхідна умова екст-

	тремуму $dy=0$	ремуму $\delta I=0$
8.	Стаціонарна точка функції	Стаціонарна функція (допустима екстремаль) функціоналу
9.	Достатня умова екстремуму: $\begin{matrix} d^2y>0-\min, \\ d^2y<0-\max \end{matrix}$	Достатня умова екстремуму: $\begin{matrix} \delta^2 I>0-\min, \\ \delta^2 I<0-\max \end{matrix}$

Варіацію δI називають також ***варіацією першого порядку*** або ***першою варіацією функціоналу*** $I[y]$. Варіацію другого порядку введемо аналогічно тому, як це робиться для диференціала другого порядку функції.

Візьмемо довільну допустиму функцію $y=y(x)$ і довільну її варіацію $\delta y=\delta y(x)$ таку, що функція $y+\delta y$ є допустимою функцією. Зафіксуємо y та δy і розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $\overline{y}=y+\alpha\delta y$, де α — деяке число. Функціонал $I[y]$ на вказаній сім'ї функцій є функцією параметра α:

$$I[y+\alpha\delta y]=\Phi(\alpha).$$

Розкладемо цю функцію за формулою Тейлора до квадратичного члена включно в околі точки $\alpha=0$:

$$I[y+\alpha\delta y]=I[y]+\left\{\frac{d}{d\alpha}I[y+\alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{d\alpha^2}I[y+\alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha^2+R_2(y,\delta y,\alpha),$$

де залишковий член $R_2(y,\delta y,\alpha)$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з α^2: $R_2(y,\delta y,\alpha)=o\left(\alpha^2\right)$.

Тоді варіаціям першого та другого порядку можна дати такі означення.

Варіацією або ***першою варіацією функціоналу*** δI називається значення першої похідної функції $\Phi(\alpha) = I[y + \alpha\delta y]$ при $\alpha = 0$:

$$\delta I = \delta I[y, \delta y] = \frac{d}{d\alpha} I[y + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}.$$

(***Друге означення варіації*** функціоналу).

Можна показати, що це означення першої варіації рівносильне наведеному раніше. На практиці зручніше користуватись останнім означенням.

Другою варіацією функціоналу або ***варіацією другого порядку*** $\delta^2 I$ називається значення другої похідної функції $\Phi(\alpha) = I[y + \alpha\delta y]$ при $\alpha = 0$:

$$\delta^2 I = \frac{d^2}{d\alpha^2} I[y + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}.$$

Приклад 3. Знайти варіацію функціоналу а) $I[y] = \int\limits_a^b y^2(x)dx;$ б) $I[y] = \int\limits_a^b y(y + \sin x)dx;$ в) $I[y] = \int\limits_a^b y^3(x)dx;$ користуючись першим означенням як головної лінійної відносно δy частини приросту ΔI.

Розв'язання. а) Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I = \int\limits_a^b (y(x) + \delta y)^2 dx - \int\limits_a^b y^2(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(y^2(x) + 2y(x)\delta y + (\delta y)^2\right)dx - \int\limits_a^b y^2(x)dx = \int\limits_a^b y^2(x)dx +$$

$$+2\int_a^b y(x)\delta y dx+\int_a^b(\delta y)^2dx-\int_a^b y^2(x)dx=2\int_a^b y(x)\delta y dx+\int_a^b(\delta y)^2dx.$$

За першим означенням $\delta I=2\int_a^b y(x)\delta y dx.$

б) Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int_a^b(y+\delta y)(y+\delta y+\sin x)dx-\int_a^b y(y+\sin x)dx=$$

$$=\int_a^b\left(y^2+y\delta y+y\sin x+y\delta y+(\delta y)^2+\sin x\cdot\delta y\right)dx-$$

$$-\int_a^b y(y+\sin x)dx=\int_a^b\Big(y^2+2y\delta y+y\sin x+(\delta y)^2+\sin x\cdot\delta y-$$

$$-y^2-y\sin x\Big)dx=\int_a^b\left(2y\delta y+(\delta y)^2+\sin x\cdot\delta y\right)dx=$$

$$=\int_a^b(2y+\sin x)\delta y dx+\int_a^b(\delta y)^2dx.$$

За першим означенням $\delta I=\int_a^b(2y+\sin x)\delta y dx$.

в) Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int_a^b(y+\delta y)^3dx-\int_a^b y^3dx=$$

$$=\int_a^b\left(y^3+3y^2\delta y+3y(\delta y)^2+(\delta y)^3\right)dx-$$

$$-\int_a^b y^3dx=3\int_a^b y^2\delta y dx+3\int_a^b y(\delta y)^2dx+\int_a^b(\delta y)^3dx.$$

За першим означенням $\delta I = 3\int\limits_a^b y^2 \delta y dx$.

<u>Приклад 4</u>.Знайти варіацію функціоналу а) $I[y] = \int\limits_a^b y^2(x)dx$; б) $I[y] = \int\limits_a^b x\sqrt{y}dx$; в) $I[y] = \int\limits_a^b (y')^2 \sin y dx$; користуючись другим означенням варіації функціоналу як похідної по параметру.

<u>Розв'язання.</u> У відповідності з другим означенням варіації функціоналу маємо:

$$\text{а) } \delta I = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_a^b (y+\alpha\delta y)^2 dx\Bigg|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \left((y+\alpha\delta y)^2\right)'_\alpha dx\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b 2(y+\alpha\delta y)\delta y dx\Bigg|_{\alpha=0} = 2\int\limits_a^b y\delta y dx;$$

$$\text{б) } \delta I = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_a^b x\sqrt{y+\alpha\delta y}dx\Bigg|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b \left(x\sqrt{y+\alpha\delta y}\right)'_\alpha dx\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+\alpha\delta y}}\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha dx\Bigg|_{\alpha=0} = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{x\delta y}{\sqrt{y+\alpha\delta y}}dx\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{x\delta y}{\sqrt{y}}dx;$$

$$\text{в) } \delta I = \frac{d}{d\alpha}\int\limits_a^b \left((y+\alpha\delta y)'_x\right)^2 \sin(y+\alpha\delta y)dx\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{d\alpha}\Big(\big(y'+\alpha\delta y'\big)^2 \sin\big(y+\alpha\delta y\big)\Big)dx\Bigg|_{\alpha=0} = \int_a^b \Big(2\big(y'+\alpha\delta y'\big)\times$$

$$\times\, \delta y' \sin\big(y+\alpha\delta y\big) + \big(y'+\alpha\delta y'\big)^2 \cos\big(y+\alpha\delta y\big)\cdot \delta y\Big)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \Big(2y' \sin y \cdot \delta y' + \big(y'\big)^2 \cos y \cdot \delta y\Big)dx.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Обчислити заданий функціонал при заданих значеннях аргументу.

1.1. $I[y] = \int_0^1 y^3(x)dx;\ y_1 = \cos \pi x;\ y_2 = \ln x.$

1.2. $I[y] = y(1) + y'(1);\ y_1 = tg\pi x;\ y_2 = \arcsin \frac{1-x}{1+x}.$

1.3. $I[y] = \int_0^1 \big(y + xy'\big)dx;\ y_1 = \sin \pi x;\ y_2 = arctgx.$

2. Знайти відстань нульового порядку між заданими кривими на вказаних відрізках.

2.1. $y = y_1(x) = xe^{-x};\ y = y_2(x) = 0;\ [0;2].$

2.2. $y = y_1(x) = \sin 2x;\ y = y_2(x) = \sin x;\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right].$

2.3. $y = y_1(x) = \sqrt{x};\ y = y_2(x) = \sqrt{x}\ln x;\ \left[e^{-2};1\right].$

3. Знайти відстань першого порядку між заданими лініями на вказаних відрізках.