точці простору визначається вектор $\overline{F}$ за законом Кулона: $\overline{F} = k\dfrac{e}{r^2}\cdot\overline{r}$,

де r - відстань точки від початку координат;

$\overline{r}$ - одиничний вектор, направлений по радіусу-вектору даної точки, k=const. Обчислити потік векторного поля через сферу радіуса R з центром в початку координат.

Розв'язання. Зважаючи на те, що r=R=const, маємо

$$\iint\limits_{\sigma} k\frac{e}{r^2}\cdot\overline{r}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \frac{ke}{R^2}\iint\limits_{\delta}\overline{r}\cdot\overline{n}\,d\sigma .$$

Але останній інтеграл дорівнює площі поверхні σ, оскільки $\left(\overline{r}\cdot\overline{n}\right)=\left|\overline{r}\right|\cdot\left|\overline{n}\right|\cdot\cos 0^o = 1$:

$$\frac{ke}{R^2}\iint\limits_{\sigma}\overline{r}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \frac{ke}{R^2}\sigma = \frac{ke}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke .$$

Вправи.

Обчислити поверхневі інтеграли другого роду

1. $\iint\limits_{\delta} yzdydz + xzdzdx + xydxdy$, де δ - зовнішня сторона поверхні тетраедру, обмеженого площинами $x=0, y=0, z=0, x+y+z=3$

2. $\iint\limits_{\delta} zdxdy$, де δ - зовнішня сторона еліпсоїду $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$

3. $\iint\limits_{\delta} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, де δ - зовнішня сторона поверхні півкулі $x^2+y^2+z^2=9(z\ge 0)$

4. $\iint\limits_{\delta} xdydz + ydzdx + zdxdy$, де δ - додатна сторона кубу, утвореного площинами $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$

5. $\iint\limits_{\delta} x^2y^2z^2dxdy$, де δ - додатна сторона нижньої половини кулі $x^2+y^2+z^2=9$

6. $\iint\limits_{\delta} z^2dxdy$, де δ - зовнішня сторона еліпсоїду $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$

7. $\iint\limits_{\delta} xzdxdy+xydydz+yzdxdz$, де δ - зовнішня сторона поверхні тетраедру, утвореного площинами $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

Формула Стокса

Для поверхневих інтегралів має місце формула, аналогічна формулі Гріна. Існують різні шляхи виведення цієї формули, обгрунтовані до найменших подробиць, але ними ж і обтяжені. Зупинимось на дещо полегшеному варіанті, зате на такому, який наглядно ілюструє суть усіх різновидів – зв'язок поверхневого інтегралу з подвійним, а останнього – через формулу Гріна – з криволінійним.

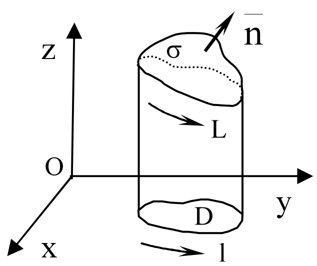

Рис.23.

Розглянемо у просторі деяку поверхню σ, обмежену лінією L. Проекцією цієї поверхні на площину XOY буде область D, обмежена замкненою лінією l. Нехай у просторі задано векторне поле $\overline{F}(x;y;z)=P(x;y;z)\overline{i}+Q(x;y;z)\overline{j}+R(x;y;z)\overline{k}$. Якщо покласти z=0 і $R(x;y;z)\equiv 0$, матимемо плоске векторне поле, яке в області D приймає значення $\overline{F}(x;y)=P(x;y)\overline{i}+Q(x;y)\overline{j}$.

Обчислимо ротор цього векторного поля:

$$rot\,\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

Тоді потік цього ротора через область D буде:

$$\iint\limits_D rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}\;\overline{n}\,d\sigma.$$

Оскільки нормаль $\overline{\mathrm{n}}$ до області D співпадає з $\overline{k}$, тобто $\left(\overline{n}\cdot\overline{k}\right)=1$ і згадуючи формулу Гріна, маємо:

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}}\right)\overline{\mathrm{k}}\;\overline{\mathrm{n}}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}}\right)\mathrm{dxdy}=\int\limits_l\overline{\mathrm{F}}\,\overline{\mathrm{d}\sigma}.$$

Остаточно: $\int\limits_l\overline{F}\,\overline{d\sigma}=\iint\limits_D rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma$.

У просторі для замкненої поверхні σ, обмеженої лінією l, формула залишиться в тому ж вигляді $\int\limits_L\overline{F}\,\overline{d\sigma}=\iint\limits_\sigma rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma$, при цьому напрямок обходу контуру L погоджується з обраною стороною поверхні таким чином: якщо дивитися з кінця вектора нормалі до поверхні, то цей обхід здійснюється проти ходу годинникової стрілки. Висновок: *циркуляція векторного поля* $\overline{F}$ *по замкненій лінії L, яка обмежує поверхню* σ*, дорівнює потоку ротора цього векторного поля через цю поверхню.*

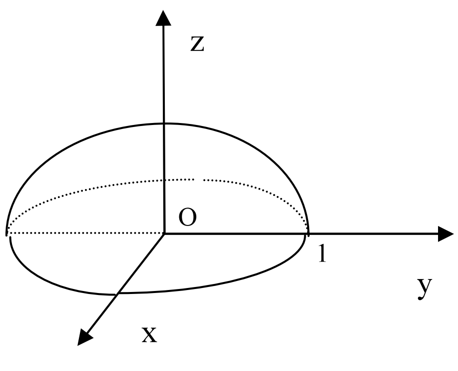

Рис.24.

Приклад. Обчислити потік ротора векторного поля $\overline{F}=x\overline{i}+xy\overline{j}+z\overline{k}$ через поверхню σ: $x^2+y^2+z^2=1,\quad z\geq 0.$

Розв'язання. Поверхня σ являє собою півсферу, радіус якої дорівнює *1*, а *L* відповідно – коло в площині XOY.

Отже:

$$\iint_{\sigma} rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = \int_{L} \overline{F}\,\overline{d\sigma} = \int_{L} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{L} x\,dx + xy\,dy + z\,dz =$$

Далі, врахуємо, що *L* лежить в площині XOY, значить *z*=0, і перейдемо до параметричних координат

$$\begin{matrix} x = 1\cdot\cos t & dx = -\sin t\,dt \\ y = 1\cdot\sin t & dy = \cos t\,dt \end{matrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} [-\cos t\cdot\sin t + \cos t\cdot\sin t\cdot\cos t]dt = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt + \int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{3}\cos^3 t\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4}(1-1) - \frac{1}{3}(1-1) = 0.$$

Принагідно зауважити, що, коли векторне поле потенціальне, $rot\,\overline{F} = 0$. За формулою Стокса якщо $rot\,\overline{F} = 0$, то $\iint_{\sigma} rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = \int_{L} \overline{F}\,\overline{d\sigma} = 0$ це означає, що векторне поле потенціальне. Інакше – потенціальне векторне поле є безвихорним.

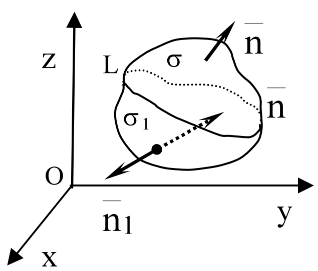

Рис.25.

Із формули Стокса виходить, що потік вихора векторного поля $\overline{F}$ не залежить від виду поверхні σ, яка "натягнута" на контур *L*. Якщо через цей контур провести дві поверхні σ_1 та σ_2, то $\iint_{\sigma} rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma_1} rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma$. За правилами орієнтації поверхні σ_2 очевидно $\overline{n}_1 = -\overline{n}$, а, отже,

$$\iint_{\sigma_1} rot\,\overline{F}\,\overline{n}_1\,d\sigma = -\iint_{\sigma_1} rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma.$$

З іншого боку, поверхні σ_1 та σ_2 обмежують деякий об'єм V, для поверхні якого одержуємо рівність:

$$\iint\limits_{\sigma+\sigma_1} rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} rot\,\overline{F}\,\overline{n}_1\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma - \iint\limits_{\sigma_1} rot\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = 0$$

Отже, потік вихора векторного поля $\overline{F}$ через замкнену поверхню дорівнює нулю.

Якщо в деякій частині поля $\overline{F}$ (або в усьому полі) $rot\,\overline{F} \equiv 0$, то $\int\limits_{L} \overline{F}\,\overline{d\delta} = \iint\limits_{\sigma} 0 \cdot \overline{n}\,d\sigma = 0$ де L - довільний контур, який лежить цілком у зазначеній частині поля.

Вправи.

Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{a}(M)$ по контуру трикутника, утвореного в результаті перетину площини $(p): Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами, при додатному напрямку обігу контуру відносно нормального вектора $\overline{n} = (A, B, C)$ цієї площини двома способами: 1) використовуючи означення циркуляції, 2) за допомогою формули Стокса

1. $\overline{a}(M) = (x+z)\overline{i} + (x+3y)\overline{j} + y\overline{k}, \quad (p): x + y + 2z = 2$

2. $\overline{a}(M) = (2z-x)\overline{i} + (x-y)\overline{j} + (3x+z)\overline{k}, \quad (p): x + y + 2z = 2$

3. $\overline{a}(M) = (x+y+z)\overline{i} + 2z\overline{j} + (y-7z)\overline{k}, \quad (p): 2x + 3y + z = 6$

4. $\overline{a}(M) = 4z\overline{i} + (x-y-z)\overline{j} + (3y+z)\overline{k}, \quad (p): x - 2y + 2z = 2$

5. $\overline{a}(M) = (y-z)\overline{i} + (2x+y)\overline{j} + z\overline{k}, \quad (p): 2x + y + z = 2$

6. $\overline{a}(M) = (x+y)\overline{i} + 3y\overline{j} + (x+z)\overline{k}, \quad (p): 2x - y - 2z = -2$

Розбіжність поля. Формула Остроградського

Нехай маємо векторне поле $\overline{F}$. Візьмемо в ньому довільну точку *P* і розмістимо її всередині замкнутої поверхні σ, яка обмежує об'єм Δv.

Знайдемо $\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma$ - потік вектора $\overline{F}$ через замкнену поверхню σ (в напрямку зовнішньої нормалі).

Обчислимо величину $\dfrac{\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma}{\Delta v}$.

Припустимо, що існує границя цієї величини за умови, якщо поверхня σ стягується в точку *P*. Ця границя зветься *розбіжністю* або *дивергенцією* векторного поля $\overline{F}$ і позначається:

$$div\,\overline{F} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma}{\Delta v}$$

$div\,\overline{F}$ є скалярною величиною. Якщо в точці *P* $div\,\overline{F}(P) > 0$, то для досить малого Δv $\dfrac{\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma}{\Delta v} > 0$, і оскільки $\Delta v>0$, то $\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma > 0$, що за фізичним змістом потоку векторного поля означає, що в точці *P* маємо джерело поля. Якщо $div\,\overline{F}(P) < 0$, тоді в точці *P* маємо стік поля. У точках, де

$div\,\overline{F} > 0$ векторні лінії починаються, а в точках, де $div\,\overline{F} < 0$, вони закінчуються.

Векторне поле, в кожній точці якого $div\,\overline{F} = 0$, називається *соленоїдальним* (або *трубчатим*). У такому полі немає ані джерел, ані стоків.

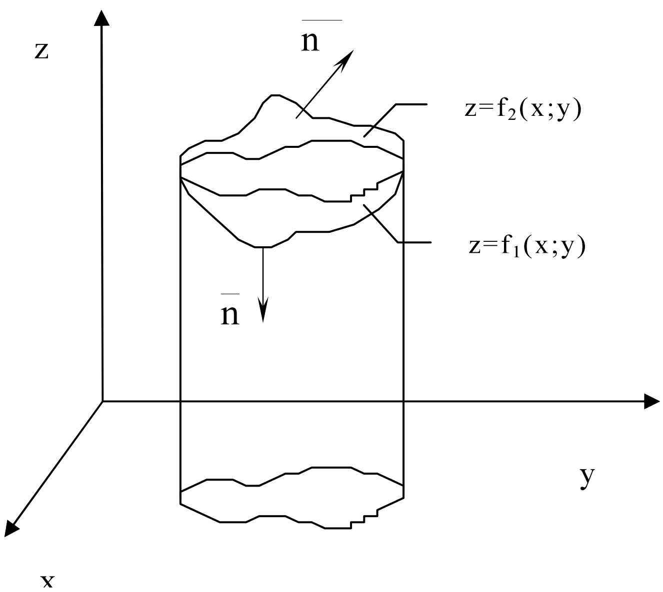

Рис.26.

Розглянемо у просторі тіло *V*, обмежене замкненою поверхнею σ (Рис.26). Проекцію тіла на площину XOY позначимо через *D*. Лінія на поверхні тіла, яка проектується в границю області *D*, поділяє поверхню σ на дві частини σ_+ та σ_-, які описуються функціями відповідно $z=f_2(x;y)$ та $z=f_1(x;y)$. Окрім того, будемо відрізняти зовнішню сторону поверхні та внутрішню в залежності від направленості нормалі до поверхні. Нехай тепер у цьому просторі задано векторне поле

$$\overline{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\overline{i} + Q(x;y;z)\overline{j} + R(x;y;z)\overline{k}.$$

Обчислимо потрійний інтеграл $\iiint\limits_V \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z} dV =$

$$= \iiint\limits_V \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{f_1(x;y)}^{f_2(x;y)} \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z} dz \right] dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \left[R(x;y;z) \Big|_{f_1(x;y)}^{f_2(x;y)} \right] dx\,dy = \iint\limits_D \left[R(x;y;f_2(x;y)) - R(x;y;f_1(x;y)) \right] dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D R(x;y;f_2(x;y))\,dx\,dy - \iint\limits_D R(x;y;f_1(x;y))\,dx\,dy .$$

Перетворимо одержані подвійні інтеграли в поверхневі. Для цього розглянемо поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{\sigma_+} R\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma_+} R(x;y;z)\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_D R(x;y;f_2(x;y))\,dx\,dy ,$$

враховуючи, що $\cos\left(\bar{k} \,\hat{}\, \bar{n}\right) > 0$.

Аналогічно:

$$\iint\limits_{\sigma_-} R\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma_-} R(x;y;z)\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma = -\iint\limits_D R(x;y;f_1(x;y))\,dx\,dy ,$$

враховуючи, що в цьому випадку $\cos\left(\bar{k} \,\hat{}\, \bar{n}\right) < 0$ склавши одержані два інтеграли, маємо:

$$\iint\limits_D R(x;y;f_2(x;y))\,dx\,dy - \iint\limits_D R(x;y;f_1(x;y))\,dx\,dy =$$

$$\iint\limits_{\sigma_+} R(x;y;z)\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_-} R(x;y;z)\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} R(x;y;z)\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma .$$

Таким чином $\iiint\limits_V \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z} dV = \iint\limits_{\sigma} R(x;y;z)\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma .$

Аналогічно можна обчислити:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint_\sigma Q\,\bar{j}\,\bar{n}\,d\sigma;$$

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint_\sigma P\,\bar{i}\,\bar{n}\,d\sigma.$$

Склавши ці три рівності, маємо:

$$\boxed{\iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz = \iint_\sigma \left(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}\right)\bar{n}\,d\sigma}.$$

Ця рівність і є формулою *Остроградського*.

Вправи.

Обчислити потік векторного поля $\bar{a}(M)$ через зовнішню поверхню піраміди, утворену площиною (p) і координатними площинами, двома способами: 1) використовуючи означення потоку, 2) за допомогою формули Остроградського-Гаусса

1. $\bar{a}(M) = x\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (y+z)\bar{k},\quad (p): 3x+3y+z=3$

2. $\bar{a}(M) = (2y+z)\bar{i} + (x-y)\bar{j} + 2z\bar{k},\quad (p): x-y+z=2$

3. $\bar{a}(M) = 4x\bar{i} + (x-y-z)\bar{j} + (3y+2z)\bar{k},\quad (p): 2x+y+z=4$

4. $\bar{a}(M) = (2z-x)\bar{i} + (x+2y)\bar{j} + 3z\bar{k},\quad (p): x+4y+2z=8$

5. $\bar{a}(M) = 4z\bar{i} + (x-y-z)\bar{j} + (3y+z)\bar{k},\quad (p): x-2y+2z=2$

6. $\bar{a}(M) = (2x-z)\bar{i} + (y-x)\bar{j} + (x+2z)\bar{k},\quad (p): x-y+z=2$

Використаємо формулу в наступній теоремі:

<u>Теорема</u>. *Дивергенція векторного поля* $\overline{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ *виражається формулою* $div\,\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, *де значення частинних похідних беруться в точці M.*

<u>Доведення</u>. За формулою Остроградського потік векторного поля можна записати у вигляді

$$\iint_{\sigma} \overline{F}\,\bar{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma} \left(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}\right)\bar{n}\,d\sigma = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

Потрійний інтеграл за теоремою про середнє значення дорівнює добутку об'єму V на значення підінтегральної функції в деякій точці M_1 області V, тобто

$$\iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_1} \cdot V$$

Якщо об'єм V стягується в точку M, то точка M_1 також прямує до точки M, і ми маємо

$$div\,\overline{F}(M) = \lim_{M_1 \to M} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_1} \cdot V}{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

що і треба було довести.

Користуючись одержаним виразом для дивергенції, тепер і формулу Остроградського можна записати у вигляді: $\iint_{\sigma} \overline{F}\,\bar{n}\,d\sigma = \iiint_{V} div\,\overline{F}\,dV$, тобто потік векторного поля з середини замкнутої поверхні дорівнює потрійному інтегралу за об'ємом, обмеженим цією поверхнею від дивергенції поля.

Розглянемо соленоїдальне (або трубчате) поле саме таке, для якого $div\,\overline{F}=0$.

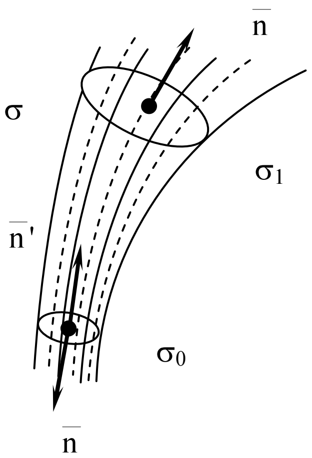

Рис.27.

Візьмемо в цьому полі яку-небудь площинку σ_0 і проведемо через кожну точку її границі векторні лінії. Ці лінії обмежують частину простору, так звану векторну трубку. Рідина рухається в цій трубці, не перетинаючи її стінок. Розглянемо частину цієї трубки, обмеженою вже згадуваною площинкою σ_0 і σ_1 деяким перерізом (Рис.27).

Оскільки умовою $div\,\overline{F}=0$, то потік векторного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю, отже

$$\iint\limits_{\sigma}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_0}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_1}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma=\iiint\limits_{V}div\,\overline{F}\,dV=0,$$

де σ - бічна поверхня трубки, а $\overline{n}$ - зовнішня нормаль.

Оскільки на бічній поверхні трубки нормаль $\overline{n}$ перпендикулярна до векторної лінії поля, то $\iint\limits_{\sigma}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma=0$.

Тоді виходить, що $\iint\limits_{\sigma_1}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_0}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma$.

Якщо змінити напрямок нормалі на площинці σ_0, тобто взяти внутрішню нормаль $\overline{n}$, то одержимо: $\iint_{\sigma_1} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma_0} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma$.

Це означає, що потік вектора в напрямку векторних ліній через кожний переріз векторної трубки один і той же, тобто в полі без джерел через кожний переріз векторної трубки протікає одна й та ж кількість рідини.

Відповідно до формули $div\,rot\,\overline{F} = 0$ поле ротора довільного векторного поля – трубчате. Справедливо й зворотне твердження – кожне трубчате поле є полем ротора деякого векторного поля, тобто якщо $div\,\overline{F} = 0$, то існує таке векторне поле $\overline{\Phi}$, що $\overline{\Phi} = rot\,\overline{F}$.

Вектор $\overline{\Phi}$ називають *вектором-потенціалом* даного поля.

Висновки

Для соленоїдального (трубчатого) поля наступні чотири властивості еквівалентні:

1). потік поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю;

2). потік поля через поверхню σ, обмежену контуром L і відповідно з ним орієнтовану, залежить тільки від вибору контуру L і не залежить від конкретного вибору поверхні σ;

3). існує таке поле $\overline{\Phi}$, що $\overline{\Phi} = rot\,\overline{F}$;

4). розбіжність поля $\overline{\Phi}$ дорівнює нулю.

Список літератури

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Том второй. – М.: Наука, 1985.

2. Чинаев П.И., Минин Н.А., Перевозников А.Ю., Черенков А.А. Высшая математика. Специальные главы. – К: Вища школа, 1981.

Зміст

Навчальне видання

Елементи теорії поля. Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики (для студентів електротехнічних спеціальностей)

Укладач: БІЗЮК Валерій Васильович

Відповідальний за випуск А.І.Колосов

Редактор М.З.Аляб'єв

План 2006, поз. 95

Підп. до друку 06.05.06 Формат 60х84 1/16. Папір офісний.
Друк на ризографі. Обл.-вид.арк.4,5 Тираж 200 прим.
Зам.№

ХНАМГ. 61002 Харків, вул. Революції, 12.

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ.

61002, Харків, вул. Революції, 12.