Оператор Гамільтона та його застосування

Оператор Гамільтона, або "набла" записується символічно як вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.$$

Оператор Гамільтона у скалярному полі

Нехай задано скалярне поле $u=u(x,y,z)$.

Застосуємо до функції $u=u(x,y,z)$ оператор "набла":

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = grad\, u$$

Отже, $\nabla u = grad\, u$.

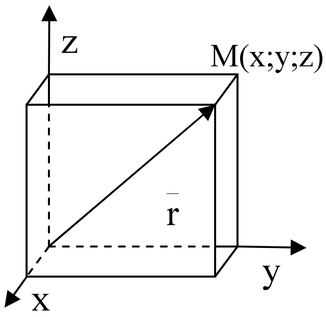

Рис.16.

Приклад 1. Знайти $grad\left|\bar{r}\right|$, де $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ відповідно $\left|\bar{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Розв'язання. $grad\left|\bar{r}\right| = \nabla\left|\bar{r}\right| =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\bar{k} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \frac{\bar{r}}{\left|\bar{r}\right|}.$$

Приклад 2. Знайти $grad\dfrac{1}{|\overline{r}|}$.

Розв'язання. $grad\dfrac{1}{|\overline{r}|} = grad\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\overline{k} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x\overline{i} - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2y\overline{j} - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2z\overline{k} =$$

$$= -\frac{x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = -\frac{\overline{r}}{|\overline{r}|^3}.$$

Оператор Гамільтона у векторному полі

Нехай задано векторне поле

$$\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}.$$

Застосуємо оператор "набла" до цього векторного поля за правилами множення векторів. Оскільки добуток двох векторів може бути або скалярним, або векторним, то розглянемо спочатку скалярний добуток:

$$\left(\nabla\cdot\overline{F}\right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)\cdot\left(P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}\right)\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Такий добуток має назву *дивергенція* і позначається так $div\overline{F}$.

Отже, $$div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \qquad \nabla\cdot\overline{F} = div\overline{F}.$$

Наприклад, для вектора

$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} \quad div\,\overline{r} = \nabla \cdot \overline{r} = 1 + 1 + 1 = 3$.

Розглянемо тепер векторний добуток, що означає соленоїдальність поля

$$\left[\nabla \times \overline{F}\right] = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right) \cdot \left(P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}\right)\right) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Такий добуток має назву *ротор*, і позначається:

$$rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \qquad \left[\nabla \times \overline{F}\right] = rot\,\overline{F}.$$

Приклад. Знайти ротор векторного поля

$\overline{F} = y^2\overline{i} - 2xz\overline{j} - x^2\overline{k}$.

Розв'язання.

$$rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -2xz & -x^2 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial\left(-x^2\right)}{\partial y} - \frac{\partial(-2xz)}{\partial z}\right]\overline{i} -$$

$$-\left[\frac{\partial\left(-x^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial z}\right]\overline{j} + \left[\frac{\partial(-2xz)}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial y}\right]\overline{k} = 2x\overline{i} + 2x\overline{j} - (2z + 2y)\overline{k}.$$

Застосування оператора Гамільтона до суми скалярних полів здійснюється за правилами чисельного добутку: $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$.

Застосування оператора Гамільтона до суми векторних полів здійснюється за правилами скалярного добутку: $\nabla \cdot \left(\overline{F_1} + \overline{F_2}\right) = \nabla\, \overline{F_1} + \nabla\, \overline{F_2}$.

або за правилами векторного добутку:

$$\nabla \times \left(\overline{F_1} + \overline{F_2}\right) = \nabla \times \overline{F_1} + \nabla \times \overline{F_2}.$$

Застосування оператора Гамільтона до добутку скалярних та векторних полів

При вживанні оператора *набла* до добутку двох полів, якими можуть бути $u \cdot v$, $u \cdot \overline{F}$, $\overline{F}_1 \cdot \overline{F}_2$, $\overline{F}_1 \times \overline{F}_2$, треба користуватися правилами векторної алгебри та правилами диференціювання.

Як диференціальний оператор він діє лише на множник, що стоїть безпосередньо за ним

$$\nabla u \cdot v = \left(\nabla u\right) \cdot v = v \cdot grad\, u$$

$$\nabla \left(u \cdot v\right) = grad\left(u \cdot v\right)$$

В останньому випадку за правилами диференціювання $grad\,\left(u \cdot v\right) = \nabla \left(u \cdot v\right) = \nabla u \cdot v + u \cdot \nabla v = v\, grad\, u + u\, grad\, v$.

Як бачимо, у процесі диференціювання на певному етапі ми деякі функції вважаємо фіксованими (сталими). Щоб виділити ці функції, їх позначають індексом, наприклад:

$$div\left(u \cdot \overline{F}\right) = \nabla \left(u \cdot \overline{F}\right) = \nabla \left(u_c \cdot \overline{F}\right) + \nabla \left(u \cdot \overline{F_c}\right) =$$

$$= \nabla \left(\overline{F} \cdot u_c\right) + \nabla u \cdot \overline{F_c} = div\, \overline{F} \cdot u + grad\, u \cdot \overline{F}$$

До речі, цей же результат можна одержати без вживання оператора набла:

$$div\left(u \cdot \overline{F}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k} \right) \cdot \left(uP\bar{i} + uQ\overline{j} + uR\overline{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(uQ)}{\partial y} + \frac{\partial(uR)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}P + \frac{\partial P}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}Q + \frac{\partial Q}{\partial y}u + \frac{\partial u}{\partial z}R + \frac{\partial R}{\partial z}u =$$

$$= u\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k} \right)\left(P\bar{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}\right) =$$

$$= u\, div\,\overline{F} + grad\, u \cdot \overline{F}\,.$$

Ще приклад:

$div\left(\overline{F}_1 \times \overline{F}_2\right) = \nabla\left(\overline{F}_1 \times \overline{F}_2\right) = \nabla\left(\overline{F}_{1c} \times \overline{F}_2\right) + \nabla\left(\overline{F}_1 \times \overline{F}_{2c}\right) =$ далі, користуючись циклічністю мішаного добутку трьох векторів $\overline{a} \cdot \left(\overline{b} \times \overline{c}\right) = \overline{b} \cdot \left(\overline{c} \times \overline{a}\right) = \overline{c} \cdot \left(\overline{a} \times \overline{b}\right)$, запишемо останній вираз так, аби оператор набла стояв безпосередньо перед тією функцією, на яку він діє:

$$= \overline{F}_{1c} \cdot \left(\overline{F}_2 \times \nabla\right) + \overline{F}_{2c} \cdot \left(\nabla \times \overline{F}_1\right) = -\overline{F}_{1c} \cdot \left(\nabla \times \overline{F}_2\right) + \overline{F}_{2c} \cdot \left(\nabla \times \overline{F}_1\right) =$$

$$= \overline{F}_2\, rot\, \overline{F}_1 - \overline{F}_1\, rot\, \overline{F}_2.$$

Введений індекс є допоміжним і в кінці обчислення його не пишуть, наприклад,

$$rot\left(u \cdot \overline{F}\right) = \nabla \times \left(u \cdot \overline{F}\right) = \nabla x\left(u_c \cdot \overline{F}\right) + \nabla x\left(u \cdot \overline{F}_c\right) = u_c \cdot \left(\nabla \times \overline{F}\right) - \overline{F}_c \times \nabla \cdot u =$$

$$= u \cdot \left(\nabla \times \overline{F}\right) - \overline{F} x \nabla u = u \cdot rot\,\overline{F} - \overline{F}\, grad\, u\,.$$

Ми розглянули деякі диференціальні операції першого порядку. Після їх застосування до поля виникає нове поле, до якого знову можна вжити ці операції У результаті маємо диференціальні операції другого порядку. Таких операцій існує лише п'ять:

у скалярному полі $u=u(x,y,z)$

$\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla\nabla u = div\ grad\ u$

$\nabla\times(\nabla u)=\nabla\times\nabla u = rot\ grad\ u$

у векторному полі $\overline{F}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$

$\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\overline{F}\right)= grad\,div\overline{F}$

$\nabla\cdot\left(\nabla\times\overline{F}\right)= div\,rot\overline{F}$

$\nabla\times\left(\nabla\times\overline{F}\right)= rot\,rot\overline{F}$.

Розглянемо ці операції докладніше:

$$\nabla\cdot\nabla\cdot u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{k}\right)u=$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{i}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{j}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{k}\right)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор $\nabla\cdot\nabla$ позначається через Δ ("дельта") і зветься *оператором Лапласа*.

Отже, $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ або $\Delta u=div\ grad\ u$ (як відомо, векторний добуток $\left[\overline{a}\times\overline{a}\right]=0$). Це означає, що поле градієнта є *безвихорним*. Зокрема, в електротехніці $rot\,grad u=0$,

$$grad\,div\,\overline{F}=\nabla\left(\nabla\cdot\overline{F}\right),$$
$$div\,rot\overline{F}=\nabla\left(\nabla\times\overline{F}\right)=0,$$

оскільки в мішаному добутку векторів є два однакових вектори.

Це значить, що поле вихору – поле *соленоїдальне*

$$rotrot\overline{F} = \nabla \times \left(\nabla \times \overline{F}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \overline{F}\right) - \left(\nabla \cdot \nabla\right)F = grad\, div\overline{F} - \Delta\overline{F},$$

тут $\Delta\overline{F}$ - результат застосування оператора Лапласа до вектора $\overline{F}$, а до подвійного векторного добутку застосовано перетворення $\overline{a} \times \overline{b} \times \overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{b} & \overline{c} \\ \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) & \left(\overline{a} \cdot \overline{c}\right) \end{vmatrix} = \overline{b} \cdot \left(\overline{a} \cdot \overline{c}\right) - \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) \cdot \overline{c}$.

Ротор векторного поля

За означенням *ротор* (або *вихор*) векторного поля

$$\overline{F} = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}$$

має вигляд

$$rot\,\overline{F} = \left[\nabla \times \overline{F}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \overline{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \overline{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Підсумуємо властивості ротора:

1. Ротор сталого вектора дорівнює нулю $rot\; a = 0 \quad a = \text{const}$;
2. $rot\left(\overline{F_1} \pm \overline{F_2}\right) = rot\,\overline{F_1} \pm rot\,\overline{F_2}$;
3. $rot\left(u \cdot \overline{F}\right) = grad\, u \times \overline{F} + u \cdot rot\,\overline{F}$;

4. $div\, rot\overline{F}=0$;

5. $div\,\overline{F_1}\times\overline{F_2}=\overline{F_2}\cdot rot\,\overline{F_1}-\overline{F_1}\cdot rot\,\overline{F_2}$.

Нехай тепер задане поле – потенціальне, а u=u(x,y,z) - його потенціал. Тоді $P=\dfrac{\partial u}{\partial x},\quad Q=\dfrac{\partial u}{\partial y},\quad R=\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Обчислимо ротор потенціального поля:

$$rot\,\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\bar{k}=0.$$

Отже, $rot\overline{F}=0$, якщо поле - потенціальне.

Зворотне твердження також вірне.

Означення. Векторне поле будемо називати *безвихорним,* якщо його ротор дорівнює нулю.

Тож всяке потенціальне поле є безвихорним.

Зокрема, рівність *rot grad u*=0 свідчить про те, що поле градієнтів завжди потенціальне.

Висновок: щоб визначити, чи буде задане поле потенціальним, достатньо пересвідчитись, щоб його ротор дорівнював нулю.

Приклад: Пересвідчитись, що векторне поле $\overline{E}=q\dfrac{\bar{r}}{\left|\bar{r}\right|^3}$ потенціальне, і обчислити його потенціал (q=const).

$$\overline{E}=q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}x\bar{i}+q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}y\bar{j}+q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}z\bar{k}.$$

Позначимо: $P(x,y,z)=q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}x$

$$Q(x,y,z)=q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}y$$

$$R(x,y,z)=q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}z$$

Тоді, наприклад, $\dfrac{\partial R}{\partial y}=-\dfrac{3}{2}q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}2yz$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{3}{2}q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}2zy$$

і вираз у дужках $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=0$.

Аналогічно можна показати, що два інші вирази в дужках також дорівнюють нулю, а, отже, $rot\,\overline{E}=0$, значить, $\overline{E}$ - потенціальне.

Обчислимо його потенціал $u(x,y,z)=\int\limits_L \overline{E}\overline{ds}=$

$$=\int\limits_{M_0}^{M} q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}x\,dx+q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}y\,dy+q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}z\,dz=$$

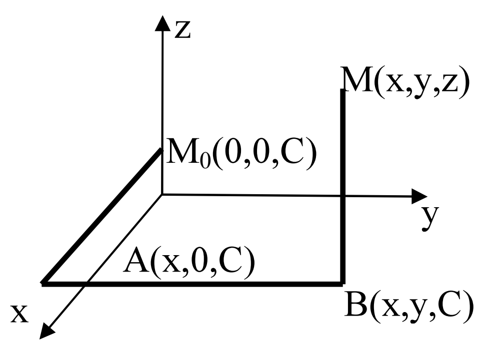

Рис.17.

виберемо початкову точку $M_0(0;0;C)$ (C=const), і шлях інтегрування:

M_0A: $y=0$, $z=C$, $dy=0$, $dz=0$

AB: $x=x=$const, $z=C$, $dx=0$, $dz=0$

BM: $x=x=$const, $y=y=$const, $dx=0$, $dy=0$

тоді:

$$= q\int_0^x \left(x^2+C^2\right)^{-\frac{3}{2}} x\,dx + q\int_0^y \left(x^2+y^2+C^2\right)^{-\frac{3}{2}} y\,dy + q\int_0^z \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} z\,dz =$$

$$= \frac{q}{2}\frac{\left(x^2+C^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_0^x + \frac{q}{2}\frac{\left(x^2+y^2+C^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_0^y + \frac{q}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_C^z =$$

$$= -q\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+C^2}} - \frac{1}{C} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+C^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+C^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+C^2}}\right\} = -q\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{q}{C} = -\frac{q}{\left|\bar{r}\right|} + C_1.$$

Отже, скалярний потенціал поля $\overline{F}$ в точці $M(x;y;z)$ дорівнює циркуляції вектора $\overline{F}$ уздовж довільної кривої, що з'єднує точку M з точкою M_0, в якій потенціал поля прийнятий рівним нулю.

Якщо потенціальне поле $\overline{F}$ - силове, то потенціал цього поля у точці $M(x;y;z)$ чисельно дорівнює роботі сили уздовж довільної кривої, яка з'єднує точку M з точкою нульового потенціалу M_0.

Дивергенція векторного поля

За означенням дивергенція (розходження) векторного поля $\overline{F} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ має вигляд $div\,\overline{F} = \nabla \cdot \overline{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$.

Векторне поле $\overline{F}$ зветься *соленоїдальним* (або *трубчатим*), якщо його дивергенція дорівнює нулю.

Зокрема, відома нам рівність $div\, rot\, \overline{F} = 0$ свідчить про те, що поле ротора є соленоїдальним.

Означення. *Якщо у векторному полі $\overline{F}$ дивергенція в точці M_0 $div\,\overline{F}(M_0) > 0$, то точка M_0 зветься **джерелом** (або **витоком**), а якщо $div\,\overline{F}(M_0) < 0$, то точка M_0 зветься **стоком**.*

Приклад 1. Розглянемо векторне поле

$$\overline{F} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}} = (x+y+z)^{-\frac{2}{3}}\bar{i} + (x+y+z)^{-\frac{2}{3}}\bar{j} + (x+y+z)^{-\frac{2}{3}}\bar{k}$$

і знайдемо його дивергенцію:

$$div\,\overline{F} = -3\frac{2}{3}(x+y+z)^{-\frac{5}{3}} = -2\frac{1}{\sqrt[3]{(x+y+z)^5}}$$

У точці $M_0(1;0;0)$ $\quad div\,F(M_0) < 0$, отже, в цьому випадку M_0 - точка стоку.

У точці $M_0(0;0;-1)$ $\quad div\,F(M_0) > 0$, отже, тепер точка M_0 - точка витоку.

Приклад 2. Розглянемо векторне поле $\overline{F} = e^{xy}\left(y\bar{j} - x\bar{i} + xy\bar{k}\right)$.

$$div\,\overline{F} = -e^{xy} - xy\,e^{xy} + e^{xy} + xy\,e^{xy} = 0$$

Поле буде соленоїдальним, тобто не має ані джерел, ані стоків.

Поверхневий інтеграл першого роду

Нехай у просторі задано деяку область *V*. Нехай в цій області задано двосторонню поверхню σ, обмежену просторовою лінією *L*.

Нехай на поверхні σ визначено деяку скалярну функцію *u*=*u*(*y*;*y*;*z*). Інакше кажучи, розглянемо скалярне поле u=u(*y*;*y*;*z*) на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. У середині кожної частини візьмемо довільну точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $u(M_i)=u(x_i;y_i;z_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму $\sum\limits_{i=1}^{n} u(M_i)\,\Delta\sigma_i = \sum\limits_{i=1}^{n} u(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i$.

Ця сума є інтегральною, а її скінчена границя за умови прямування до нуля кожного з діаметрів елементарних частин зветься *поверхневим інтегралом першого роду* (або *поверхневим інтегралом по площі поверхні*):

$$\iint\limits_{\sigma} u(x;y;z)\,d\sigma_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i \ .$$

Якщо, наприклад, функція u(x;y;z) є поверхневою густиною маси, розповсюдженої по поверхні, то інтеграл виражає масу всієї поверхні; якщо u(x;y;z) є густиною розповсюдження елементарних зарядів, то інтеграл виражає сумарний заряд поверхні.

У тому випадку, коли u(x;y;z)≡1, інтеграл $\iint\limits_{\sigma} d\sigma$ просто дорівнює площі поверхні σ.

Обчислення поверхневого інтегралу першого роду

Розглянемо інтеграл $\iint\limits_{\sigma} u(x;y;z)\,d\sigma_i$.

Припустимо, що поверхня σ задана рівнянням z=z(x;y). Покажемо, що в такому випадку обчислення інтегралу по поверхні зводиться до обчислення подвійного інтегралу по області D - проекції σ на площину XOY (рис.18.).

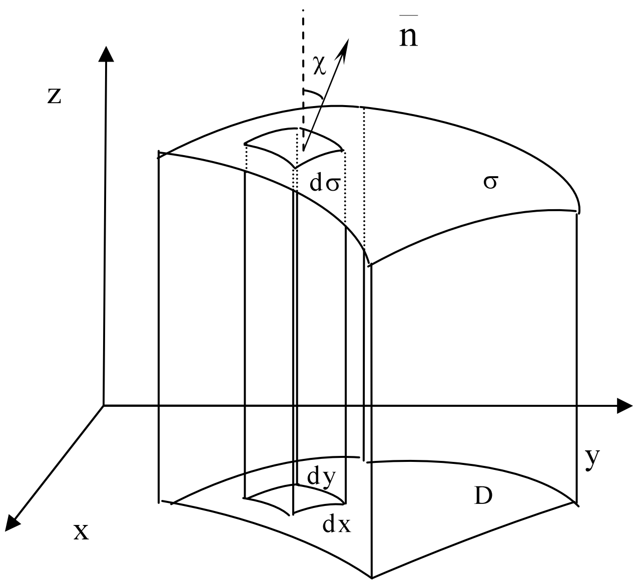

Рис.18.

Розглянемо елементарну площинку $d\sigma$ на поверхні σ, яка проектується на елемент $dxdy$ області D.

Проведемо нормаль $\bar{n}$ так, щоб вона утворила гострий кут γ з віссю OZ. Будемо вважати, що $d\sigma$ настільки мала, що на всій цій площинці нормаль не змінюється. Тоді $\cos\gamma\, d\sigma = dxdy$.

З іншого боку, нормаль $\bar{n}$ до поверхні z=z(x;y) має проекції z'_x, z'_y,-1, тому $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}$.

Значить, $d\sigma = \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy$ і інтеграл

$$\iint_D u(x;y;z)\,d\sigma = \iint_D u(x;y;z(x;y))\sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2} dxdy.$$

Зауваження. Може статися, що рівняння поверхні не може бути розв'язане відносно Z , але може бути записане у вигляді y=y(x;z) чи x=x(y;z). Тоді хід міркувань залишається тим же з тією лише різницею, що поверхню σ будемо проектувати на площину XOZ чи YOZ.

Приклад. Обчислити площу частини поверхні параболоїда обертання $2z=x^2+y^2$, яка міститься в середині циліндра $x^2+y^2=R^2$.

Розв'язання. $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, звідки $z'_x=x$, $z'_x=y$, тоді шукана площа поверхні $S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$, де область D - проекція відшукуваної частини поверхні σ на площину XOY являє собою круг радіусу R з центром у початку координат.

Якщо перейти до полярних координат

$$\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\cos\varphi \end{matrix} \qquad x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad dxdy = \rho d\rho d\varphi$$

то $S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_0^R \right] d\varphi = \frac{2\pi}{3}\left[\left(1+R^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$

Вправи. Обчислити поверхневі інтеграли першого роду:

1. $\iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\,d\sigma$, де σ – поверхня кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

2. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2}\,d\sigma$, де σ – бічна поверхня конусу $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$

3. $\iint\limits_{\sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y^2)\,d\sigma$, де σ – частина площини $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ в першому октанті

4. $\iint\limits_{\sigma} xyz\,d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + z = 1$ в першому октанті

5. $\iint\limits_{\sigma} x\,d\sigma$, де σ – частина поверхні кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в першому октанті

6. $\iint\limits_{\sigma} y\,d\sigma$, де σ – поверхня півкулі $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

7. $\iint\limits_{\sigma} x^2 y^2\,d\sigma$, де σ – поверхня півкулі $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Поверхневий інтеграл другого роду. Потік векторного поля

Нехай, як і раніше, у просторі задано деяку область V і нехай в цій області задано поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Відносно поверхні σ будемо припускати, що в кожній її точці визначено нормаль $\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$, $\left(\left|\bar{n}\right| = 1\right)$...

Нехай в кожній точці поверхні σ визначено векторну функцію $\overline{F} = P(x;y;z)\overline{i} + Q(x;y;z)\overline{j} + R(x;y;z)\overline{k}$.

Інакше кажучи, розглянемо векторне поле $\overline{F}$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільним способом на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. У середині кожної частини візьмемо довільну точку $M_i(x_i;y_i;z_i)$, обчислимо в ній значення функції $\overline{F_i} = \overline{F}(M_i)$, потім візьмемо скалярний добуток векторів $\overline{F_i}$ та $\overline{n_i}$, і складемо суму $\sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}\,\overline{n_i}\,\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{F}(M_i)\cdot\overline{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i$.

Ця сума є інтегральною, а її скінченна границя за умови прямування до нуля кожного з діаметрів елементарних частин зветься *поверхневим інтегралом другого роду* (або *поверхневим інтегралом по координатах*): $\iint\limits_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{F}(M_i)\cdot\overline{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i$.

Розглянемо докладніше вираз i-го доданку. За правилом обчислення скалярного добутку

$$\left(\overline{F}(M_i)\cdot\overline{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i = \left|\overline{F_i}\right|\cdot\left|\overline{n_i}\right|\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\sigma_i = \left|\overline{F_i}\right|\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\sigma_i.$$

Останній вираз можна тлумачити таким чином: цей добуток визначає об'єм циліндру з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $\left|\overline{F_i}\right|\cdot\cos\varphi$. Отже, коли визнати, що векторне поле $\overline{F}$ є швидкість рідини, яка протікає через поверхню σ, то цей добуток дорівнює кількості рідини, яка протікає через площинку $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямку вектора $\overline{F_i}$. Вираз $\iint\limits_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma$ являє собою загальну кількість рідини, що протікає за одиницю часу через поверхню σ.

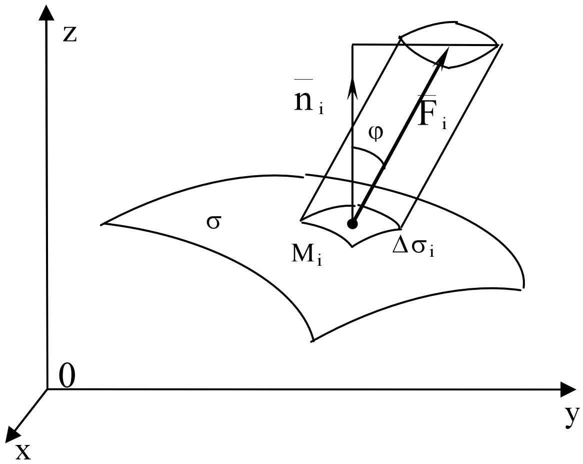

Рис.19.

Таким чином, поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n}\, d\sigma$ *зветься потоком векторного поля* $\bar{F}$ *через поверхню* σ.

Якщо розкрити скалярний добуток, то одержимо:

$$\iint\limits_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma +\right) d\sigma .$$

Векторне поле $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів, тоді і інтеграл $\iint\limits_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n}\, d\sigma$ також можна виразити через суму трьох інтегралів:

$$\iint\limits_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} P\bar{i} \cdot \bar{n}\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma} Q\bar{j} \cdot \bar{n}\, d\sigma + \iint\limits_{\sigma} R\bar{k} \cdot \bar{n}\, d\sigma .$$

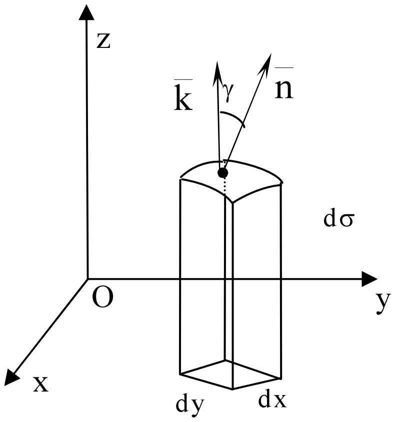

Рис.20.

Розглянемо останній з інтегралів: $\iint\limits_{\sigma} R\bar{k}\bar{n}\, d\sigma$. $\left(\bar{k} \cdot \bar{n}\right) = \left|\bar{k}\right| \cdot \left|\bar{n}\right| \cdot \cos\gamma$ (рис.20).

Далі: $\cos\gamma\, d\sigma$ є проекція площинки $d\sigma$ на площину XOY: $\cos\gamma\, d\sigma = dxdy$, то можна записати: $\iint\limits_{\sigma} R\bar{k}\bar{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} R dxdy$.

Аналогічно: $\cos\alpha\, d\sigma = dydz, \quad \cos\beta\, d\sigma = dxdz$.

Весь інтеграл записується так:

$$\iint_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Відповідно до запису цей поверхневий інтеграл другого роду ще звуть *поверхневим інтегралом по координатах*.

Зауважимо, що в запису $\iint_{\sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma$ в дужках є скалярна функція. Позначивши її через $u(x;y;z)=P(x;y;z)\cos\alpha+Q(x;y;z)\cos\beta+R(x;y;z)\cos\gamma$, маємо $\iint_{\sigma} u(x;y;z)\,d\sigma$, тобто поверхневий інтеграл першого роду.

Таким чином, рівність

$$\iint_{\sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\chi\right)d\sigma = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

відображає, по суті, *зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду*.

Обчислення поверхневого інтегралу другого роду

Обчислення поверхневого інтегралу

$$\iint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma$$

зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Якщо знову розбити інтеграл на складові частини, можна розглянути окремо $\iint_{\sigma} R(x;y;z)\cos\gamma\,d\sigma$.

Нехай задана поверхня може бути записана рівнянням $z=z(x;y)$, а проекцію поверхні σ на площину XOY позначимо D_{xy}. Тоді

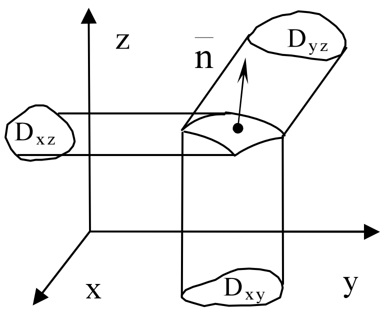

Рис.21.

$$\iint_{\sigma} R(x;y;z)\cos\gamma\, d\sigma = \pm \iint_{D_{xy}} R[x;y;z(x;y)]dxdy$$

при цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \geq 0$, і знак мінус, якщо $\cos\gamma \leq 0$.

Аналогічно обчислюються інтеграли, що були зведені до подвійних інтегралів по областях D_{xy} та D_{yz} (рис.21).

Отже: $$\iint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\, d\sigma = \iint_{D_{yz}} P[x(y;z);y;z]dydz +$$

$$+\iint_{D_{xz}} Q[x;y(x;z);z]dxdz + \iint_{D_{xy}} R[x;y;z(x;y)]dxdy$$

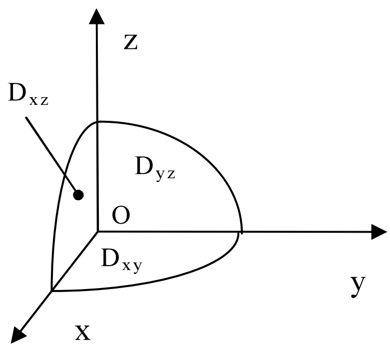

Рис.22.

Приклад. обчислити потік векторного поля $\overline{F} = x\overline{i} + \overline{y} + xz^2\overline{k}$ через поверхню $x^2+y^2+z^2=1$ $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.

Розв'язання. Поверхня σ являє собою частину сфери, розміщену в першому октанті (рис.22). Позначимо проекції σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz}, D_{xy}, які будуть чвертями кругів радіуса 1. Тоді

$$\iint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma} x\, dydz + dxdz + x z^2 dxdy = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}\, dydz +$$

$$+\iint_{D_{xz}} dxdz + \iint_{D_{xy}} x\left(1-x^2-y^2\right)dxdy = I_1 + I_2 + I_3$$

Обчислимо окремо кожний з інтегралів:

$$I_1 = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz = \left| \begin{array}{l} y=\rho\cos\varphi \\ z=\rho\sin\varphi \\ y^2+z^2=\rho^2 \\ dydz=\rho d\rho d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 \right) = \frac{\pi}{6},$$

$I_1 = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz = \dfrac{1}{4}\pi$ (це просто площа чверті круга),

$$I_3 = \iint\limits_{D_{xy}} x\left(1-x^2-y^2\right)dxdy = \left| \begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ x^2+y^2=\rho^2 \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \rho\left(1-\rho^2\right)\rho\,d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^1 \left(\rho^2-\rho^4\right)d\rho = \right] \cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{5}\rho^5 \right)\Bigg|_0^1 \right] \cos\varphi\,d\varphi = \frac{2}{15}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{2}{15}\sin\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15}$$

Отже, $\quad I = I_1 + I_2 + I_3 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{15} = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{2}{15}.$

Якщо поверхня σ замкнена, додатним напрямком нормалі до поверхні прийнято вважати зовнішню нормаль.

Приклад. Позитивний електричний заряд **e**, розміщений на початку координат, створює векторне поле, так що в кожній