Знайдемо dx=x'(t)dt, dy=y'(t)dt, dz=z'(t)dt і підставимо в інтеграл:

$$\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\right]dt$$

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + (x+y-1)\bar{k}$ по відрізку прямої, який з'єднує точки $A(1;1;1)$ та $B(2;3;4)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння лінії L тобто прямої AB: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали: $\begin{cases} x = t+1 & dx = dt \\ y = 2t+1 & dy = 2dt \\ z = 3t+1 & dz = 3dt \end{cases}$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування а саме, якщо $1 \le x \le 2$, то $0 \le t \le 1$.

Отже: $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_A^B xdx + ydy + (x+y-1)dz =$

$$= \int\limits_0^1 \left[t+1+(2t+1)\cdot 2 + (t+1+2t+1-1)\cdot 3\right]dt = \int\limits_0^1 (14t+6)dt = 14\cdot\frac{t^2}{2} + 6z)\Big|_0^1 = 13$$

У випадку плоского векторного поля $\overline{F}(x,y) = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$ якщо крива L задана в явному вигляді $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, можна використати також попередній спосіб, записавши рівняння лінії L так:

$$L: \begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases} \quad a \le x \le b, \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} dy = y'(x)dx \\ dx = dx \end{cases}$$

і маємо інтеграл:

$$\int_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x)\right]dx \quad .$$

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F}(x,y) = 2xy\overline{i} + x^2\overline{j}$ по відрізку прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння лінії L: $y = x$ $(0 \le x \le 1)$, звідки $dy = dx$, а інтеграл набуде вигляду

$$\int_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int_L 2xydx + x^2 dy = \int_0^1 \left[2x \cdot x + x^2\right]dx = 3\int_0^1 x^2\,dx = 3 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1.$$

Приклад. Обчислити роботу силового поля $\overline{F} = 2xy\overline{i} + y^2\overline{j} - x^2\overline{k}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж перерізу гіперболоїда $x^2+y^2-2z^2=2$ площиною $y=x$ від т.$A(1;1;0)$ до т.$B\left(\sqrt{2};\sqrt{2};1\right)$.

Розв'язання. $A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_l 2xy\,dx + y^2dy - x^2dz$

Запишемо рівняння лінії $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$ у параметричному

вигляді: $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t} \\ z = \sqrt{t-1} \end{cases}$ при цьому $1 \le t \le 2$, якщо, наприклад $1 \le x \le \sqrt{2}$.

Далі обчислимо $\begin{aligned} dx &= \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ dy &= \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ dz &= \frac{dt}{2\sqrt{t-1}} \end{aligned}$ і все підставимо в

інтеграл: $\int\limits_l 2xy\,dx + y^2 dy - x^2 dz = \int\limits_1^2 \left[2\sqrt{t}\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}} + t\,\frac{1}{2\sqrt{t}} - t\,\frac{1}{2\sqrt{t-1}} \right] dt =$

$$= \int\limits_1^2 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{2}\sqrt{t} - \frac{t}{2\sqrt{t-1}} \right) dt = \frac{3}{2}\int\limits_1^2 \sqrt{t}\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \sqrt{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}} =$$

$$= t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 - \frac{1}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 - \sqrt{t-1}\Bigg|_1^2 = 2\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{3-1} = 2\sqrt{2} - \frac{7}{3} = \frac{6\sqrt{2}-7}{3}.$$

Властивості криволінійного інтегралу по координатах

Криволінійний інтеграл визначається підінтегральним виразом, формою кривої інтегрування та напрямком інтегрування.

Властивість 1. При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл змінює знак.

Це виходить з означення, оскільки при цьому вектор $\Delta\overline{S_i}$, а відповідно і його проекції Δx та Δy змінюють знак.

Властивість 2. Розіб'ємо дугу інтегрування L на частини, нехай $\overset{\cup}{AB} = \overset{\cup}{AC} + \overset{\cup}{CB}$. Тоді $\int\limits_L \overline{F}\,\partial\overline{S} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \overline{F}\,\partial\overline{S} = \int\limits_{\overset{\cup}{AC}} \overline{F}\,\partial\overline{S} + \int\limits_{\overset{\cup}{CB}} \overline{F}\,\partial\overline{S}$.

Ця властивість справедлива для довільного числа доданків.

Властивість 3. Розглянемо циркуляцію $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{\partial S}$ по замкненому контуру L. З'єднаємо дві довільні точки цього контуру дугою $\overset{\cup}{AB}$ (Рис.8). Таким чином одержимо два замкнені контури L_1: AmB та L_2: BnA

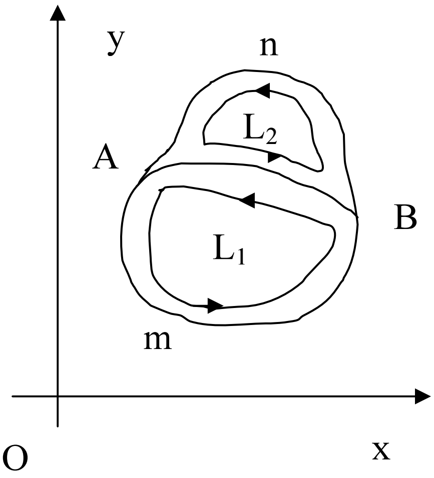

Рис.8.

Тоді $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{\partial S} = \int\limits_{L_1} \overline{F}\,\overline{\partial S} + \int\limits_{L_2} \overline{F}\,\overline{\partial S}$

враховуючи, що $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \overline{F}\,\overline{\partial S} + \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \overline{F}\,\overline{\partial S} = 0$.

Вправи.

1. $\int\limits_{L_{OB}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$ L: дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$ від $O(0;0)$ до $B(1;2)$

2. $\int\limits_{L_{AB}} (x + y)dx + (x - y)dy$ L: дуга параболи $y = x^2$ від $A(-1;1)$ до $B(1;1)$

3. $\int\limits_{L_{AB}} xe^x ydx + (x - 1)e^x dy$ L: відрізок AB ($A(0;2)$; $B(1;2)$)

4. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$ L: дуга параболи $y = x^2$ від $A(-1;1)$ до $B(1;1)$

5. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y - x)dy$ L: дуга кубічної параболи $y = x^3$ від $A(0;0)$ до $B(1;1)$

6. $\int\limits_{L_{AB}} -x\cos y dx + y\sin x dy$ L: відрізок AB ($A(0;0)$; $B(\pi;2\pi)$)

7. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x} de$ L: дуга параболи $y=\frac{1}{2}x^2$ від $A(1;\frac{1}{2})$ до $B(2;2)$

8. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y-x)dy$ L: відрізок AB ($A(0;0)$; $B(1;1)$)

9. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + x^2dy$ L: дуга параболи $y=x^2$

від $A(0;0)$ до $B(1;1)$

10. $\int\limits_{L} 2xydx + x^2dy$ L: дуга параболи $y^2=x$

від $A(0;0)$ до $B(1;1)$

11. $\int\limits_{L} ydx + xdy$ L: чверть кола $x=2\cos t, y=2\sin t, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

12. $\int\limits_{L} ydx + xdy$ L: еліпс $x=4\cos t, y=\sin t$,

що обігається у додатному

напрямку

13. $\int\limits_{L} \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$ L: півколо $x=2\cos t, y=2\sin t, 0\le t\le\pi$

14. $\int\limits_{L_{AB}} xdx + ydy + (x+y-1)dz$ L: відрізок AB ($A(1;1;1)$; $B(2;3;4)$)

Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D та криволінійним інтегралом по границі L цієї області.

Теорема. *Нехай задано плоске векторне поле $\overline{F}(x,y)=P(x,y)\bar{i}+Q(x,y)\bar{j}$, де $P(x,y)$* та *$Q(x,y)$ - функції двох змінних, неперервні разом з частинними похідними першого порядку. Якщо L - лінія, яка обмежує область D, то*

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]dxdy.$$

<u>*Доведення*</u>. Обчислимо $\iint_D\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy=$

$$=\int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx=\int_a^b\left[P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))\right]dx=-\int_a^b P(x,y_2(x))\,dx-$$

$$-\int_a^b P(x,y_1(x))\,dx=\int_L P(x,y)\,dx$$

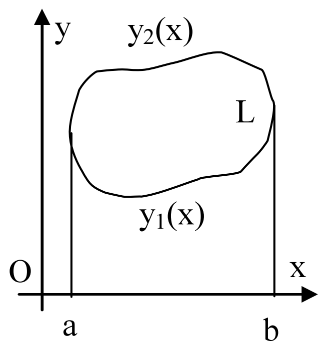

Рис.9.

аналогічно $\iint_D\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy=\int_L Q(x,y)\,dy.$

Склавши відповідні вирази, маємо:

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]dxdy$$

Приклад. Обчислити $\oint_L\frac{1}{x}arctg\frac{y}{x}dx+\frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}dy$ якщо *L* - замкнений контур *ABCD*, обмежений колами $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ та прямими $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, $x>0$, $y>0$ (рис.10.).

Розв'язання. У прийнятих позначеннях $P(x,y)=\frac{1}{x}arctg\frac{y}{x}$,

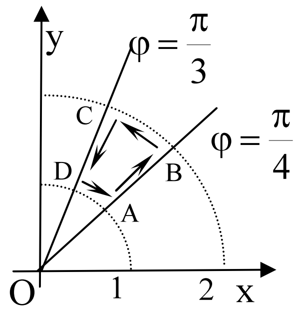

Рис.10.

$$Q(x,y)=\frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}.$$

Знайдемо $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{2}{x^2+y^2}.$$

Тоді за формулою Гріна

$$\int_L \frac{1}{x}arctg\frac{y}{x}dx+\frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}dy=\iint_D\frac{dxdy}{x^2+y^2},$$

де область D обмежена контуром L.

Перейдемо до полярних координат $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$, де $\begin{matrix}1\le\rho\le 2\\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\end{matrix}$.

Отже: $$\iint_D\frac{dxdy}{x^2+y^2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_1^2\frac{1}{\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{\pi}{12}\ln 2.$$

Вправи.

1. За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл $\int_L(x-y)dx+(x+y)dy$, де L – коло $x^2+y^2=R^2$

2. Обчислити $\int_L\left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy$,

   якщо L – коло $x^2+y^2=R^2$

а. безпосередньо

b. за допомогою формули Гріна

3. Обчислити $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$

a. безпосередньо

b. за допомогою формули Гріна

4. За допомогою формули Гріна обчислити різницю між інтегралами $\mathrm{I}_1 = \int\limits_{AmB} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$ та $\mathrm{I}_2 = \int\limits_{AnB} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$, де AmB – відрізок прямої, яка з'єднує точки $A(0;0)$ та $B(1;1)$, а AnB – дуга параболи $y = x^2$

5. Обчислити за допомогою формули Гріна $\int\limits_L 2(x^2 - y^2)dx + (x + y)^2 dy$, де L – контур трикутника з вершинами у точках $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$, що пробігається у додатному напрямку. Перевірте результат, обчислюючи безпосередньо інтеграл

6. Обчислити $\int\limits_L -x^2 ydx + xy^2 dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$

7. Через точки $A(1;0)$ та $B(2;3)$ проведена парабола AmB, віссю якої є вісь OY та хорда її AnB.
Знайти $\int\limits_{AmBnA} (x + y)dx - (x - y)dy$

a. безпосередньо

b. за допомогою формули Гріна

Умови незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування

Розглянемо приклад. Раніше ми обчислили інтеграл $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_A^B 2xy\,dx + x^2\,dy$ по відрізку прямої, що з'єднує точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$, тобто L: $y = x$ (рис.11.) і одержали значення інтеграла, рівне 1.

Обчислимо той же інтеграл, але шлях інтегрування оберемо параболою L: $y = x^2 \qquad dy = 2xdx$

$$\int\limits_A^B 2xydx + x^2\,dy =$$

$$= \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} 2xydx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 (2x \cdot x + x^2 \cdot 2x)dx = 4\int\limits_0^1 x^3\,dx = \left.\frac{4x^4}{4}\right|_0^1 = 1.$$

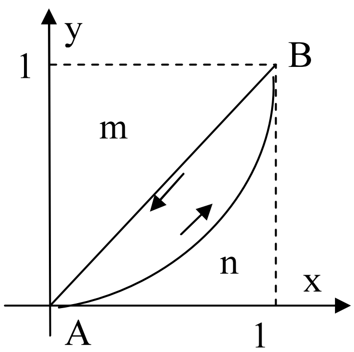

Рис. 11.

Як бачимо, значення інтегралу не змінилося, хоча шлях інтегрування був іншим: $\int\limits_{AmB} \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_{AnB} \overline{F}\,\overline{ds}$.

З іншого боку, якщо обчислити інтеграл по замкненій кривій L: $AnBmA$, то, очевидно, $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = 0$.

Виникає питання: за яких умов щодо функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$

$$\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad ?$$

Теорема. *Нехай у всіх точках деякої області D функції P(x,y) та Q(x,y) разом зі своїми частинними похідними* $\frac{\partial \mathrm{P(x,y)}}{\partial \mathrm{y}}$ *та* $\frac{\partial \mathrm{Q(x,y)}}{\partial \mathrm{x}}$ *неперервні. Тоді для того, щоб криволінійний інтеграл по довільному замкненому контуру L, який цілком лежить в області D, дорівнював нулю, тобто* $\int_L Pdx + Qdy = 0$, *необхідно і достатньо виконання умови* $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ *у всіх точках області D.*

Доведення. Нехай контур L обмежує область D. Запишемо формулу Гріна: $\int_L P\partial x + Q\partial y = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy$.

Якщо умова теореми виконана, то подвійний інтеграл у правій частині дорівнює нулю і цим доведено достатність.

Доведемо необхідність. Допустимо, що $\int_L Pdx + Qdy = 0$, а умова не виконується, тобто $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ хоча б в одній точці області D, скажімо, в точці $P(x_0;y_0)$ $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$.

Оскільки в лівій частині нерівності функція неперервна, то вона буде додатня і у всіх точках деякої досить малої області D_1, яка містить в собі точку $P(x_0,y_0)$. Візьмемо подвійний інтеграл по цій області, який матиме додатне значення: $\iint_{D_1} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy > 0$

Але за формулою Гріна ліва частина нерівності дорівнює криволінійному інтегралу по контуру L_1, який обмежує область D_1, і дорівнює нулю. Виходить, наше допущення невірне і це приводить до висновку, що $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ в усіх точках області D.

Коли згадати, що рівність $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ був повним диференціалом, то доведену теорему можна сформулювати таким чином: для того, щоб криволінійний інтеграл $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб його підінтегральний вираз був повним диференціалом.

Підсумовуючи *висновки* нашого дослідження, можна стверджувати, що коли область D однозв'язна і функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ разом зі своїми частинними похідними в цій області неперервні, то всі чотири наступні твердження рівносильні, тобто якщо виконується одне з них, то виконуються і всі інші:

1). криволінійний інтеграл $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, взятий по довільному замкненому контуру, цілком розміщеному в області D, дорівнює нулю;

2). криволінійний інтеграл $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від лінії інтегрування;

3). вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повний диференціал;

4). у всіх точках області D має місце рівність $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Вправи.

Перевірити, що інтеграли по замкненому контуру дорівнюють нулю.

1. $\oint\limits_L \sin x dx + \cos y dy$

2. $\oint\limits_L \dfrac{ydx + xdy}{xy}$

3. $\oint\limits_L \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{xdy - ydx}{x^2}$

4. $\int\limits_L e^{xy}\left(ydx + xdy\right)$

5. $\oint\limits_L \left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x+y} - \dfrac{1}{x-y}\right)dy$

6. $\oint\limits_L \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(xdx + ydy + zdz\right)$

7. $\oint\limits_L \dfrac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$

8. $\oint\limits_L \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Обчислити криволінійні інтеграли від повних диференціалів

1. $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx + xdy$

2. $\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xydx + x^2dy$

3. $\int\limits_{(3;4)}^{(5;12)} \dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ (початок координат не лежить на контурі інтегрування)

4. $\int\limits_{(0;1)}^{(3;4)} xdx + ydy$

5. $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)(dx+dy)$

6. $\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{ydx + xdy}{y^2}$ (не перетинають вісь OX)

7. $\int\limits_{(1;0;-1)}^{(6;4;8)} xdx + ydy - zdz$

8. $\int\limits_{(0;0;0)}^{(3;4;5)} \frac{xdx + ydy - zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Обчислення функції за її повним диференціалом

Розглянемо функцію $u=u(x,y)$, задану в деякій області D, де вона неперервна разом зі своїми частинними похідними. Обчислимо її повний диференціал $du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$.

Позначимо $P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, тоді, очевидно, для повного диференціалу $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$.

Але за цієї умови криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від шляху інтегрування, а залежить від початкової і кінцевої точок. Звичайно такий інтеграл позначають так: $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, а шлях інтегрування обирають довільно.

Розглянемо приклад: $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2 dy$, а шлях інтегрування оберемо вздовж осей координат.

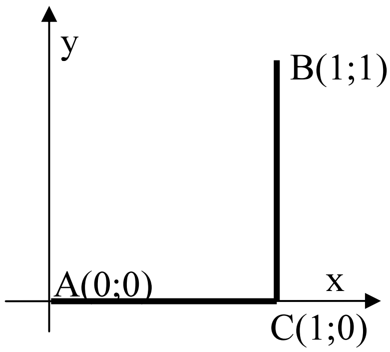

Рис.12.

На відрізку AC: $y = 0$; $dy = 0$, значить, інтеграл дорівнює нулю.

На відрізку CB: $x = 1$; $dx = 0$, отже: $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2 dy = \int\limits_0^1 dy = y\Big|_0^1 = 1.$

Розглянемо тепер інтеграл з фіксованою початковою точкою $M_0(x_0;y_0)$ та змінною кінцевою $M(x;y)$ $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$ а шлях інтегрування оберемо так: на відрізку M_0N: $y = y_0$; $dy = 0$ і інтеграл набуде вигляду:

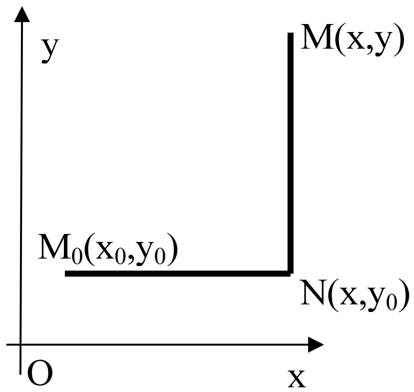

Рис.13.

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial u(x,y_0)}{\partial x} dx = u(x,y_0)\Big|_{x_0}^{x} = u(x,y_0) - u(x_0,y_0);$$

на відрізку NM: x=const; dx=0, а інтеграл набуде вигляду:

$$\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} dy = u(x,y)\Big|_{y_0}^{y} = u(x,y) - u(x,y_0)$$

Взагалі:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x,y_0) - u(x_0,y_0) + u(x,y) - u(x,y_0) =$$

$$= u(x,y) - u(x_0,y_0).$$

Якщо функцію $u(x,y)$ назвемо первісною, то для повного диференціалу $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ одержана формула *є формулою Ньютона-Лейбніця* для криволінійних інтегралів.

Ця формула дає спосіб відшукання функції за її повним диференціалом: $u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + u(x_0,y_0)$.

Приклад. Пересвідчитись, що вираз $\left(e^{xy}+5\right)\left(xdy+ydx\right)$ є повним диференціалом деякої функції $u=u(x,y)$ та знайти цю функцію.

Розв'язання. Запишемо даний виріз у вигляді

$$\left(e^{xy}+5\right)\cdot ydx + \left(e^{xy}+5\right)\cdot xdy$$

тобто $P(x,y) = \left(e^{xy}+5\right)\cdot y;\quad Q(x,y) = \left(e^{xy}+5\right)\cdot x.$

Обчислимо $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^{xy}xy + e^{xy} + 5$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = e^{xy}xy + e^{xy} + 5$$

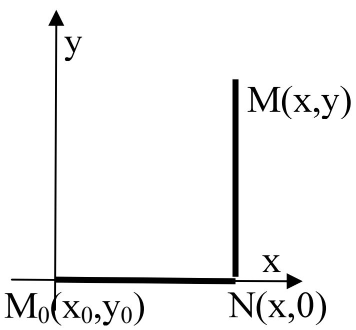

Рис.14.

Як бачимо, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ значить, заданий вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$.

Обчислимо $u(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(e^{xy}+5\right)ydx+\left(e^{xy}+5\right)xdy$

Шлях інтегрування оберемо так:

на відрізку M_0N: $y=0$; $dy=0$,

на відрізку NM: $x=\mathrm{const}$; $dx=0$,

отже: $u(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(e^{xy}+5\right)ydx+\left(e^{xy}+5\right)xdy=I_{M_0N}+I_{NM}=$

$$0+\int\limits_0^y\left(e^{xy}+5\right)xdy=x\cdot\left(\frac{1}{x}e^{xy}+5y\right)\Bigg|_0^y=x\left(\frac{1}{x}e^{xy}+5y\right)-1=e^{xy}+5xy-1.$$

Отже: $u(x,y)=e^{xy}+5xy-1$.

Перевіримо вірність результату, тобто обчислимо повний диференціал функції $u(x,y)=e^{xy}+5xy-1$:

$$\partial u(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy=\left(e^{xy}y+5y\right)dx+\left(e^{xy}x+5x\right)dy.$$

Вправи.

Знайти функції за даними повними диференціалами

1. $du=x^2dx+y^2dy$
2. $du=4\left(x^2-y^2\right)\left(xdx\ \ -ydy\right)$
3. $du=\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$
4. $du=(2x+3y)dx+(3x-4y)dy$
5. $du=\left(3x^2-2xy+y^2\right)dx-\left(x^2-2xy+3y^2\right)dx$
6. $du=e^{x-y}\left[(1+x+y)dx-(1-x-y)dy\right]$
7. $du=\dfrac{dx}{x+y}+\dfrac{dy}{x+y}$

8. $du = \dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z}$

9. $du = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

10. $du = \dfrac{yzdx + xzdy + xydz}{1 + x^2 y^2 z^2}$

11. $du = \dfrac{2(zxdy + xydz - yzdx)}{(x - yz)^2}$

Потенціальне векторне поле

Розглянемо плоске векторне поле $\overline{F}(x, y) = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$.

Нехай у деякій однозв'язній області D поля виконується умова $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$.

Тоді вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u=u(x,y)$, тобто $du = \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy$,

де $P(x, y) = \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx, \quad Q(x, y) = \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy$.

Але тоді задане векторне поле можна записати так:

$$\overline{F}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\bar{j} = grad\, u(x, y).$$

Означення. *Векторне поле* $\overline{F}$ *зветься* ***потенціальним****, якщо воно є градієнтом деякого скалярного поля u:* $\overline{F} = grad\, u(x, y)$.

Скалярна функція *u* зветься *потенціалом* векторного поля $\overline{F}$.

Іноді перед градієнтом ставиться знак "-", що не має принципового значення, а лише відповідає конкретному фізичному змісту. Наприклад, для електростатичного поля $\overline{F} = -grad\, u$ означає, що в напрямку вектора напруги електричного поля $\overline{F}$ електричний потенціал спадає.

Як бачимо, умова $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ в потенціальному полі рівнозначна існуванню повного диференціала. Відповідно, задача відшукання повного диференціала рівнозначна задачі обчислення потенціалу векторного поля.

Зазначимо, що потенціал векторного поля обчислюється з точністю до довільної сталої на підставі того, що $grad(u+c)=grad u$.

Приклад. Пересвідчитись, що векторне поле $\overline{F} = (2x - 3y^2 + 1)\bar{i} + (2 - 6xy)\,\overline{j}$ потенціальне і знайти його потенціал.

Розв'язання. $P(x,y)=2x-3y^2+1$

$Q(x,y)=2-6xy$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -6y \qquad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -6y$$

$\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ свідчить про те, що поле потенціальне.

Потенціал векторного поля дорівнює циркуляції цього поля по деякій лінії L $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_L (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy.$

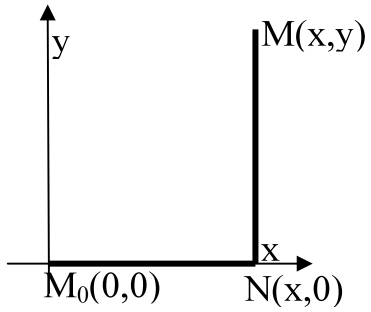

Рис.15.

Шлях інтегрування L виберемо так:

$$\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy =$$

по відрізку M_0N: $y=0$; $dy=0$

по відрізку NM: $x=\text{const}$; $dx=0$

$$= \int\limits_0^x (2x+1)dx + \int\limits_0^y (2 - 6xy)dy = \left(2\cdot\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^x +$$

$$+\left(2y - 6x\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^y = x^2 + x + 2y - 3xy^2$$

Отже, $u(x,y)=x^2+x+2y-3xy^2+C$ ($C=\text{const}$).

Розглянемо просторове векторне поле

$$\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}\,.$$

Якщо векторне поле $\overline{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ потенціальне, а $u=u(x,y,z)$ - його потенціал, то $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \dfrac{\partial u}{\partial z}.$

У потенціальному векторному полі циркуляція не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової і кінцевої точок $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та $M(x;y;z)$:

$$\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_{M_0}^{M} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{M_0}^{M} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz =$$

$$= \int\limits_{M_0}^{M} du = u\Bigg|_{M_0}^{M} = u(M) - u(M_0)\,.$$

Приклад. Знайти циркуляцію градієнта скалярного поля $u=xy$ по відрізку прямої, яка з'єднує точки $A(1;1)$ та $B(2;2)$.

Розв'язання: $\overline{F} = grad\,u$, тоді

$$\int_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int_{(1,1)}^{(2,2)} \overline{F}\,\overline{ds} = \int_{(1,1)}^{(2,2)} grad\,u\,\overline{ds} = u(x,y)\Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = xy\Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 3$$

Циркуляцією градієнта скалярного поля є різниця потенціалів цього поля.

Для потенціального поля справедлива теорема, яка відповідає розглянутим раніше властивостям криволінійного інтегралу:

Теорема. Наступні чотири властивості векторного поля $\overline{F}$, заданого в однозв'язній області D, еквівалентні:

1. циркуляція поля $\overline{F}$ по будь-якому замкненому контуру, розміщеному в області D, дорівнює нулю;
2. циркуляція поля $\overline{F}$ впродовж довільної кривої L (яка лежить в області D) з початком в точці A та кінцем в точці B залежить тільки від положення точок A та B і не залежить від форми кривої;
3. існує функція $u(x;y;z)$ така, що $\overline{F} = grad u$;
4. поле $\overline{F}$ є безвихорним, тобто $rot\overline{F} = 0$.