МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики
(для студентів спеціальностей 6.090603 - Електричні системи споживання, 6.090605 - Світлотехніка і джерела світла, 6.092202 - Електричний транспорт)

Харків ХНАМГ 2006

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики (для студентів спеціальностей 6.090603 - Електричні системи споживання, 6.090605 - Світлотехніка і джерела світла, 6.092202 - Електричний транспорт)

Харків − ХНАМГ − 2006

Елементи теорії поля. Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики /для студентів електротехнічних спеціальностей/. Укл. В.В.Бізюк. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 75 с.

Укладач: В.В.Бізюк

Рецензенти: А.І.Колосов

Затверджено на засіданні Вченої ради,
протокол № 8 від 1.03.2006 р.

Поняття поля

Полем *будемо називати область простору, кожній точці P якої поставлена в однозначну відповідність деяка величина $F(P)$.*

Оскільки $F(P)$ визначає поле, іноді саму цю величину називають полем.

Якщо $F(P)$ є величиною фізичною, то і поле називається фізичним, причому в залежності від природи $F(P)$ поля поділяють на *скалярні* та *векторні*.

Прикладами скалярних фізичних полів можуть бути поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу. До векторних фізичних полів відносяться, наприклад, поля сили тяжіння, швидкості частинок текучої рідини, густини електричного струму.

Якщо функція $F(P)$ не змінюється з плином часу, то поле називається ***стаціонарним*** *або* ***сталим****, у противному разі —* ***нестаціонарним*** *або* ***змінним****.* Математична теорія поля вивчає властивості векторних та скалярних полів, до розгляду яких зводять численні задачі фізики, електротехніки, математики та інших наук.

Скалярне поле

Поверхня та лінія рівня.

Розглянемо скалярне поле $\mathrm{u}(P)=\mathrm{u}(x;y;z)$.

Поверхнею рівня скалярного поля $\mathbf{u}(\boldsymbol{P})$ *називається така поверхня, на якій функція* $\mathrm{u}(P)$ *має стале значення.*

Рівняння поверхні рівня: $u(x;y;z)=C$ (C=const).

Наприклад. Для поля $u=x^2+y^2+z^2$ поверхні рівня визначаються рівнянням $u=C$; $x^2+y^2+z^2=C$. ($C\geq 0$).

Для різних значень C щоразу будемо мати окрему сферу. Тому кажуть, що поверхні рівня складають сім'ю поверхонь. Якщо задати у просторі точку, наприклад, $P(1;-1;2)$, то можна виділити ту єдину сферу, яка проходить через цю точку:

$1^2+(-1)^2+2^2=C$, $C=6$, отже: $x^2+y^2+z^2=6$.

Для плоского скалярного поля розглядають лінії рівня.

Наприклад. Для поля $u=x^2-y^2$ лінії рівня визначаються рівнянням $x^2-y^2=C$. Якщо $C>0$, маємо сім'ю гіпербол з вершинами на осі Ox, якщо $C>0$ — це сім'я гіпербол з вершинами на осі Oy, якщо $C=0$, маємо асимптоти гіперболи.

Лініями рівня можуть бути, наприклад, на топографічних картах горизонталі — лінії, уздовж яких висота місцевості над умовним рівнем моря є стала. Лінії рівня (*лінії рівного потенціалу* чи *еквіпотенціальні лінії*) знаходять широкий вжиток при розрахунках електричних полів. У цьому разі вони є лініями, уздовж яких електричний потенціал у всіх їх точках є сталим. Фізично це означає, що робота, виконувана силами електричного поля по переносу одиничного позитивного заряду з довільної точки даної лінії рівня в точку, потенціал якої прийнятий рівним нулю, буде однакова. Сукупність ліній рівного потенціалу дає наочне зображення електричного поля, що полегшує його вивчення.

Похідна за напрямком

Нехай задано скалярне поле u=u(P). Візьмемо у просторі точку $P(x;y;z)$. Проведемо з точки P вектор $\overline{S}$, який має направляючі косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис.1.). На векторі $\overline{S}$ на відстані ΔS від його початку розглянемо точку P_1 $(x+\Delta x;\ y+\Delta y;\ z+\Delta z)$. Таким чином $\Delta S=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$. Будемо вважати, що $u=u(x;y;z)$ неперервна і має неперервні похідні.

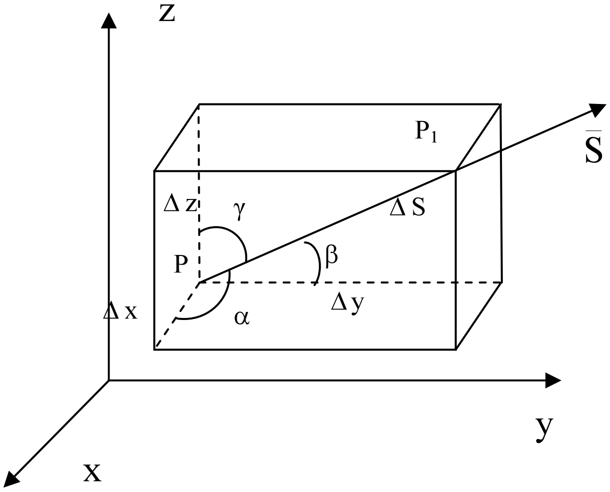

Рис.1.

Повний приріст функції можна записати у вигляді

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z,$$

де $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ наближаються до нуля, якщо $\Delta S\to 0$.

Поділимо рівність на ΔS:

$$\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta S}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta S}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta S}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta S}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta S}+\varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta S}.$$

Враховуючи, що $\dfrac{\Delta x}{\Delta S}=\cos\alpha$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta S}=\cos\beta$, $\dfrac{\Delta z}{\Delta S}=\cos\gamma$,

цю рівність перепишемо так:

$$\frac{\partial u}{\partial S}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta+\varepsilon_3\cos\gamma.$$

Границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta S}$ *при* $\Delta S \to 0$ *зветься* ***похідною*** *від функції* u=u(x;y;z) *в точці* $P(x;y;z)$ *за напрямком вектора* $\overline{S}$ *і позначається:*
$$\frac{\partial u}{\partial S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta S}.$$

Таким чином $\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

У випадку плоского поля u=u(x;y)

$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\cos\gamma = 0$ маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha,$$

де α — кут, утворений напрямком $\overline{S}$ з віссю O_x.

Приклад. Задано функцію u=x^2+y^2+z^2. Знайти похідну $\frac{\partial u}{\partial S}$ в точці $P(1;1;1)$ в напрямку вектора $\overline{S} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

Розв'язання: Обчислюємо направляючі косинуси

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Далі $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x;$ $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y;$ $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$

в точці $P(1;1;1)$: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_p = 2,$ $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_p = 2,$ $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_p = 2.$

Отже, $$\left.\frac{\partial u}{\partial S}\right|_p = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Градієнт

Нехай задано скалярне поле u = u(x;y;z), причому функція u має частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ *та* $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Вектор $\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ *зветься* ***градієнтом скалярного поля*** u *і позначається:*

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} \quad \left|grad\ u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Розглянемо зв'язок між градієнтом та похідною за напрямком.

Теорема. *Нехай задано скалярне поле* u=u(x;y;z) *і в ньому визначено скалярне поле градієнтів* $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$.

Похідна $\frac{\partial u}{\partial S}$ за напрямком деякого вектора $\bar{S}$ дорівнює проекції вектора grad u на вектор $\bar{S}$.

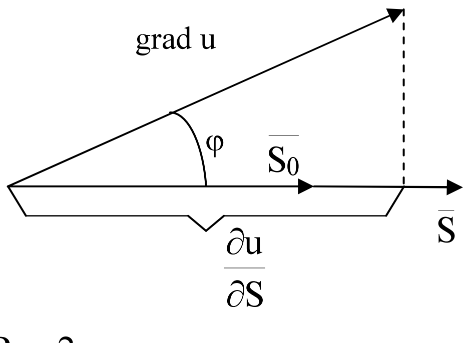

Рис.2.

Доведення. Розглянемо одиничний вектор $\overline{S_0}$, відповідний вектору $\bar{S}$:

$\overline{S_0} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$.

Обчислимо скалярний добуток

$$\left(grad\ u \cdot \overline{S_0}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Вираз у правій частині є не що інше, як похідна від функції $u=u(x;y;z)$ за напрямком $\overline{S}$: $\left(grad\, u \cdot \overline{S_0}\right) = \frac{\partial u}{\partial S}.$

Якщо позначити кут між векторами *grad* u та $\overline{S_0}$ через φ (рис.2.), то можна записати $\left| grad\, u \right| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial S}$ або $пр_{\overline{S_o}}\, grad\, u = \frac{\partial u}{\partial S}$.

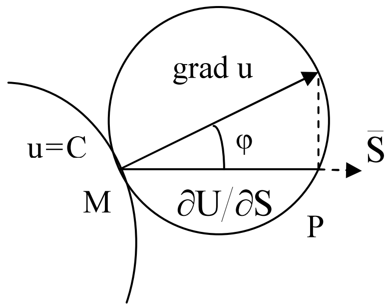

Рис.3.

З доведеної теореми легко з'ясовується зв'язок між градієнтом та похідною в даній точці за напрямком. У точці $M(x;y;z)$ будуємо вектор *grad*u (рис.3.). Далі будуємо сферу, для якої *grad*u є діаметром. З точки M проводимо вектор $\overline{S}$. Позначимо точку перетину його з поверхнею сфери через P. Тоді, очевидно, $MP = \left| grad u \right| \cdot \cos\varphi.$ $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, тобто $MP = \frac{\partial u}{\partial S}$.

З'ясуємо деякі *властивості градієнта*.

1. Похідна в заданій точці за напрямком вектора $\overline{S}$ має найбільше значення, якщо напрямок вектора $\overline{S}$ співпадає з напрямком градієнта; це найбільше значення похідної дорівнює $\left| grad u \right|$.

2. Похідна за напрямком вектора, перпендикулярного до вектора gradu, дорівнює нулю.

3. Нарешті, якщо функція u = u(x;y) є функцією двох змінних, то вектор $grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}$ лежить у площині Oxy.

Доведемо, що gradu направлений перпендикулярно до лінії рівня u(x;y)=C, яка лежить в площині Oxy і проходить через відповідну точку. Дійсно, кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до лінії рівня u(x;y)=C буде рівнятися $k_1 = -\frac{u'_x}{u'_y}$. Кутовий коефіцієнт k_2 градієнта дорівнює $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$. Тоді $k_1 * k_2 = -1$. Це і доводить справедливість твердження.

Приклад. Задана функція u=x^2+y^2+z^2. Визначити градієнт в точці M(1;1;1).

Розв'язання: У довільній точці $grad\, u = 2x\bar{i} + 2y\,\bar{j} + 2z\,\bar{k}$.

В точці М $\quad grad\, u\big|_M = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k} \qquad grad\, u\big|_M = 2\sqrt{3}$.

Вправи.

Дана функція $u(M) = u(x, y, z)$ і точки M_1 і M_2. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямом вектора $\overline{M_1M_2}$, 2) $grad\, u(M_1)$

1. $u(M) = x^2y + y^2z + z^2x, \quad M_1(1,-1,2), \quad M_2(3,4,-1)$
2. $u(M) = 5xy^3z^2, \quad M_1(2,1,-1), \quad M_2(4,-3,0)$
3. $u(M) = z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}, \quad M_1(0,0,0), \quad M_2(3,-4,2)$
4. $u(M) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}, \quad M_1(1,1,1), \quad M_2(3,2,1)$
5. $u(M) = x^2y + xz^2 - 2, \quad M_1(1,1,-1), \quad M_2(2,-1,3)$
6. $u(M) = x \cdot e^y + y \cdot e^x - z^2, \quad M_1(3,0,2), \quad M_2(4,1,3)$
7. $u(M) = \ln(1 + xy^2 + z^2), \quad M_1(1,1,1), \quad M_2(3,-5,1)$
8. $u(M) = x - 2y + e^z, \quad M_1(-4,-5,0), \quad M_2(2,3,4)$

Криволінійний інтеграл по довжині

(криволінійний інтеграл 1-го роду)

Задача про обчислення маси плоскої кривої. Нехай на площині XOY задана лінія L, по якій неперервно розподілена маса з густиною $f(x;y)$. Потрібно обчислити масу дуги AB кривої L.

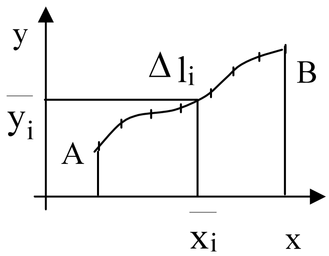

Рис.4.

Розіб'ємо дугу AB кривої L точками на n елементарних дуг $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Розглянемо одну з них l_i. Будемо вважати, що довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густина є сталою величиною і дорівнює значенню $f\left(\overline{x_i};\overline{y_i}\right)$ в деякій точці $\left(\overline{x_i};\overline{y_i}\right)\in \Delta l_i$.

Маса елементарної дуги $\Delta m_i = f\left(\overline{x_i};\overline{y_i}\right)\cdot \Delta l_i$

Складемо маси всіх елементарних дуг:

$\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i};\overline{y_i}\right)\cdot \Delta l_i$. Одержана сума називається *інтегральною* для функції $f(x,y)$, а границя цієї суми при необмеженому зростанні точок поділу $(n \to \infty)$ називається *криволінійним інтегралом по дузі* (*криволінійним інтегралом 1-го роду*) і позначається так:

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\cdot \Delta l_i .$$

З іншого боку очевидно, ця границя наближається до значення маси дуги кривої. Отже, $m = \int\limits_L f(x,y)\,dl$.

Якщо функція $f(x;y)$ неперервна в деякій області D, яка містить в собі криву L, то криволінійний інтеграл від неї існує.

Властивості криволінійного інтегралу аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтегралу.

Обчислення криволінійного інтегралу по дузі

Обчислення криволінійного інтегралу зводиться до приведення його до одновимірного інтегралу.

Випадок 1. Нехай лінія L задана в параметричному вигляді: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $a \le t \le b$, тобто коли t змінюється на відрізку $[a;b]$, точка на кривій L з координатами $(x(t);y(t))$ рухається від точки A до точки B. Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$.

У криволінійному інтегралі зробимо заміну змінної:

$$\int_L f(x;y)\, dl = \int_a^b f(x(t);y(t))\, \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\; dt .$$

Приклад. Обчислити $\int_L ye^{-x}\, dl$, якщо

$$L: \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\, arctg\, t - t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

Розв'язання. Обчислимо: $x' = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\quad y' = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Підставимо в інтеграл:

$$\int_L ye^{-x}\, dl = \int_0^1 (2\, arctg\, t - t)\, e^{-\ln\left(1+t^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\; dt =$$

$$=\int\limits_0^1 (2\,arctg\,t-t)\,\frac{1}{1+t^2}\cdot\sqrt{\frac{4t^2+1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}}\,dt\;=\;\int\limits_0^1 (2\,arctg\,t-t)\,\frac{1}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1 \frac{2\,arctg\,t}{1+t^2}\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt=arctg^2\,t\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\Big|_0^1=$$

$$=arctg^2\,1-arctg^2\,0-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 1=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Випадок 2. Нехай лінія задана в явному вигляді: $y=y(x)$, $a\le x\le b$. Тоді $dl=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$. Відповідно

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx\,.$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_{(AB)} x^2 y\,dl$, якщо AB є чвертю кола $x^2+y^2=4$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$).

Розв'язання. $y=\sqrt{4-x^2}$ $\quad 0\le x\le 2$; $\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$;

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

$$\int\limits_{(AB)} x^2 y\,dl=\int\limits_0^2 x^2\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int\limits_0^2 x^2\,dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{16}{3}\,.$$

Якщо лінія L задана у просторі $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ $\quad a\le t\le b$

то криволінійний інтеграл по дузі обчислюється за формулою

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl=\int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt\,.$$

Приклад. Обчислити масу дуги конічної гвинтової лінії $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, якщо густина $f(x;y;z)$=2π.

Розв'язання. $m = \int\limits_{(AB)} 2z\,dl$ в точках конічної гвинтової лінії $f(x,y,z)=2e^t$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$dl = \sqrt{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2}\,dt$$

$$dl = \sqrt{3}\,e^t\;dt$$

$$m = 2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} e^{2t}\,dt = \sqrt{3}$$ (одиниць маси).

Вправи.

Обчислити криволінійний інтеграл по дузі:

1. $\int\limits_L 3x^2\,dl$ $\quad L: y = \ln x \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

2. $\int\limits_L xe^y\,dl$ $\quad L: y = \ln x \quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$

3. $\int\limits_L 16xy\,dl$ $\quad L: \begin{cases} x = \sin 4t \\ y = \cos 4t \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{16}$

4. $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$ $\quad L$: перший виток лінії $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 9\sin t \\ z = 9t \end{cases}$

5. $\int\limits_L \left(z^2 + y^2\right)dl$ $\quad L: \quad z^2 + y^2 = 4$

6. $\int\limits_L xy\,dl$ $\quad L$: відрізок AB $\quad \left(A(0;0), B(4;0)\right)$

7. $\int\limits_L y\,dl$ $\quad L$: дуга параболи $y^2 = 2x$ від $A(0;0)$ до $B(2;2)$

8. $\int\limits_L y\,dl$ $\quad L$: дуга параболи $x^2 = 2y$ від $A(0;0)$ до $B(2;2)$

9. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dl$ $\quad L$:коло $x = 2\cos t \quad y = 2\sin t$

10. $\int\limits_L xy\,dl$ $\quad L$:чверть еліпсу в першому квадранті $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

11. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$ $\quad L$:перша арка циклоїди

$$x = t - \sin t\,,\ y = 1 - \cos t$$

12. $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dl$ $\quad L$: перший виток конічної лінії

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}$$

Застосування криволінійного інтегралу по дузі

Криволінійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по дузі L є маса відповідної матеріальної кривої, густина якої виражається саме функцією $f(x,y)$: $m = \int\limits_L f(x,y)\,dl$.

Якщо густина є величина стала $f(x,y)=\rho=\text{const}$, тоді $m = \rho\int\limits_L dl$.

За допомогою криволінійного інтегралу можна обчислити статичні моменти плоскої матеріальної кривої:

відносно осі Ox $\qquad S_x = \int\limits_L y f(x,y)\,dl$

відносно осі Oy $\qquad S_y = \int\limits_L x\, f(x,y)\,dl$

або моменти інерції:

відносно осі Ox $$I_x = \int_L y^2 f(x,y)\,dl$$

відносно осі Oy $$I_y = \int_L x^2 f(x,y)\,dl$$

відносно початку координат: $$I_0 = \int_L \left(x^2 + y^2\right) f(x,y)\,dl\,.$$

Координати центра ваги для плоскої кривої: $x_c = \dfrac{S_y}{m}; \quad y_c = \dfrac{S_x}{m}.$

Для просторової кривої:

статичні моменти:

$$S_{xy} = \int_L z\, f(x;y;z)\,dl\,;\ S_{xz} = \int_L y\, f(x;y;z)\,dl\,;\ S_{yz} = \int_L x\, f(x;y;z)\,dl\,.$$

моменти інерції:

відносно площини XOY $$I_{xy} = \int_L z^2 f(x,y,z)\,dl$$

відносно осі OZ $$I_z = \int_L (x^2 + y^2) f(x,y,z)\,dl$$

відносно початку координат $$I_0 = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) f(x,y,z)\,dl\,.$$

Координати центра ваги для просторової кривої:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}; \quad x_c = \frac{S_{xy}}{m}.$$

Векторне поле

Нехай в деякій області простору задано векторне поле

$$\overline{F}(P) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}\ ,$$

де $P(x,y,z),\ Q(x,y,z)\quad та\ R(x,y,z)$ - скалярні функції.

Означення. ***Векторною лінією поля*** $\overline{F}(P)$ *зветься лінія, дотична до якої в кожній її точці співпаде з вектором* $\overline{F}(P)$*, що визначає поле в цій точці.*

Прикладами векторних ліній поля в електротехніці є лінії вектора напруги магнітного поля $\overline{H}$ чи лінії вектора напруги електричного поля $\overline{E}$. Лінії вектора $\overline{E}$ називають силовими лініями внаслідок того, що напруга електричного поля чисельно дорівнює силі, яка діє в даній точці поля на одиничний додатній заряд. Напрямки вектора цієї сили та вектора $\overline{E}$ завжди співпадають.

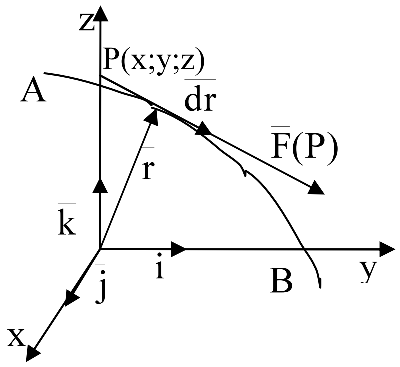

Рис.5.

Виведемо диференціальне рівняння векторних ліній.

Нехай (рис.5) AB - векторна лінія, $\overline{r}$ - радіус-вектор точки *P(x;y;z)*. Тоді $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Обчислимо $\overline{dr} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$.

З диференціального числення відомо, що вектор $\overline{dr}$ направлений по дотичній до AB в точці P. Отже, $\overline{dr} \| \overline{F}(P)$, але тоді з умови паралельності векторів $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.

Це і є диференціальне рівняння векторних ліній. Якщо векторне поле за природою є поле сили, то і його векторні лінії будуть силовими.

Якщо векторне поле задано на площині, то таке поле будемо називати плоским: $\overline{F}(x,y) = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$.

Приклад. Постійний електричний струм I тече по нескінченно довгому провіднику, співпадаючому з віссю OZ в напрямку знизу вгору. Вектор напруги магнітного поля $\overline{H}$, створюваного цим струмом, в довільній точці $P(x;y;z)$ дорівнює

$$\overline{H} = \frac{I}{2\pi\rho^2}\left(-y\bar{i} + x\bar{j}\right),$$

де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - відстань від $P(x;y;z)$ до осі OZ. Знайти векторні лінії магнітного поля $\overline{H}$.

Розв'язання. Запишемо векторне поле у вигляді $\overline{H} = -\dfrac{Iy}{2\pi\rho^2}\bar{i} + \dfrac{Ix}{2\pi\rho^2}\bar{j} + 0\cdot\bar{k}$, тобто

$$P = -\frac{Iy}{2\pi\rho^2}, \quad Q = \frac{Ix}{2\pi\rho^2}, \quad R = 0.$$

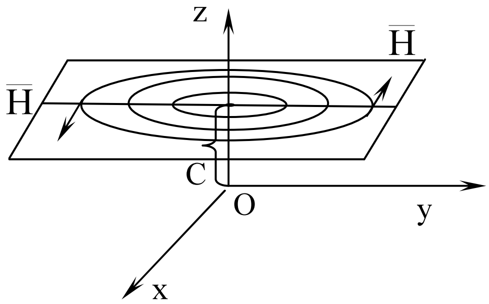

Рис.6.

Диференціальне рівняння векторних ліній після очевидних скорочень набуде вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} \\ z = C\ \left(C = const\right) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x\,dx = -y\,dy \\ z = C \end{cases}$$

Після інтегрування: $\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1^2 \quad \left(C_1 = const\right) \\ z = C \end{cases}$

Криволінійний інтеграл по координатах

(криволінійний інтеграл 2-го роду)

Задача про обчислення роботи векторного поля. Розглянемо плоске векторне поле $\overline{F}(x, y) = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$.

Нехай під дією сили матеріальна точка M рухається деякою лінією L. Необхідно обчислити роботу, яка виконується при переміщенні цієї точки від A до B по заданій лінії.

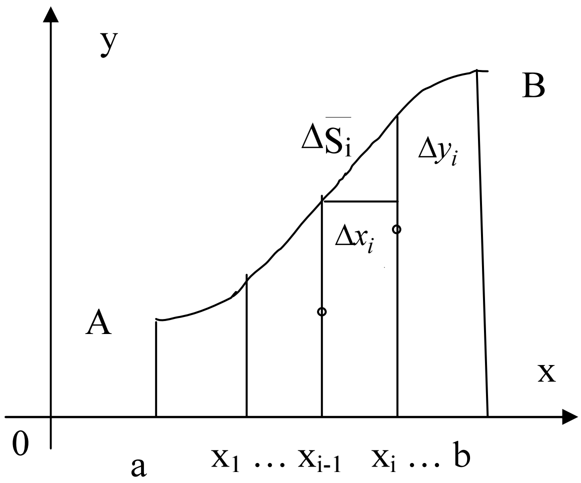

Рис.7.

Розіб'ємо дугу AB на n частин точками з абсцисами $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$

Розглянемо i-ту елементарну ланку цієї дуги $\Delta\overline{S_i} = \Delta x_i \bar{i} + \Delta y_i \bar{j}$.

Будемо вважати, що довжина вектора $\left|\Delta\overline{S_i}\right|$ настільки мала, що для всього цього проміжку значення вектора функції стале і дорівнює значенню в деякій середній точці $\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right) \in \Delta\overline{S_i}$: $\overline{F}(\overline{x_i}, \overline{y_i}) = P\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\bar{i} + Q\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\bar{j}$.

Елементарна робота на ділянці $\Delta\overline{S_i}$ дорівнює: $\Delta A_i = \left(\overline{F}(\overline{x_i},\overline{y_i})\Delta\overline{S_i}\right) = P\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta x_i + Q\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta y_i$

Якщо обчислити елементарну роботу на кожній з елементарних ділянок, можна скласти суму

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} P\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta x_i + Q\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta y_i .$$

Одержана сума є інтегральною, а її границя при необмеженому збільшенні точок розбиття ($n\to\infty$) *називається **криволінійним інтегралом** і позначається так*:

$$\int\limits_L P(x,y)\Delta x + Q(x,y)\Delta y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta x_i + Q\left(\overline{x_i},\overline{y_i}\right)\Delta y_i \ .$$

Інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ зветься *криволінійним інтегралом по координатах* або *криволінійним інтегралом 2-го роду.*

Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \ .$$

*Криволінійний інтеграл у векторному полі зветься **циркуляцією вектора** $\overline{F}$ **по дузі** L і позначається:* $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds}$.

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл записується так: $\oint \overline{F}\,\overline{ds}$, причому обов'язково вказують напрямок обходу.

Отже: $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$.

Обчислення криволінійного інтегралу по координатах

Розглянемо у просторі векторне поле $\overline{F}(x,y,z) =$

$$= P(x,y,z)\,\bar{i} + Q(x,y,z)\,\bar{j} + R(x,y,z)\,\bar{k} \ .$$

Обчислимо циркуляцію вектора $\overline{F}$ по дузі L, заданій в параметричному вигляді $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$