

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Ламтюгова С.Н., аспирант

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Рассматривается задача расчета внешнего медленного обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью в сферической и цилиндрической системах координат. Предлагается численный метод ее решения, основанный на совместном использовании структурного метода R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева для построения структуры решения краевой задачи и проекционного метода Галеркина-Петрова для аппроксимации неопределенной компоненты структуры.

Ключевые слова: вязкая жидкость, приближение Стокса, приближение Озеена, метод R-функций, метод Галеркина-Петрова.

Ламтюгова С.М. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНЕАРИЗОВАНИХ ЗАДАЧ ОБТІКАННЯ В СФЕРИЧНІЙ ТА ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ / Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

Розглянуто задачу розрахунку зовнішнього повільного обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною в сферичній та циліндричній системах координат. Запропоновано чисельний метод її розв'язання, оснований на сумісному застосуванні структурного методу R-функцій акад. НАН України В.Л. Рвачова для побудови структури розв'язку крайової задачі та проекційного методу Гальоркіна-Петрова для апроксимації невизначеної компоненти структури.

Ключові слова: в'язка рідина, наближення Стокса, наближення Озеена, метод R-функцій, метод Гальоркіна-Петрова.

Lamtyugova S. N. MATHEMATICAL MODELLING OF FLOW LINEARIZED PROBLEMS IN THE SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEMS / Kharkov National University of Radioelectronics, Ukraine

The problem of calculating the external slow flow past a body with viscous incompressible fluid in spherical and cylindrical coordinate systems is treated. A numerical method for its solution, based on the joint use of the R-functions structural method for constructing the structure of solving the boundary problem and the Galerkin-Petrov projection method for approximating the indefinite component of the structure, is offered.

Key words: viscous fluid, Stokes approximation, Ozeen approximation, the R-functions method, the Galerkin-Petrov method.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование вязких течений представляет собой важный класс прикладных задач. Необходимость моделировать вязкие течения возникает, например, в гидроаэродинамике, теплоэнергетике, химической кинетике, биомедицине и т.д. Во многих практически важных случаях жидкость можно с большой достоверностью считать вязкой несжимаемой ньютоновской средой, и происходящие в ней процессы могут быть промоделированы с помощью уравнений Навье-Стокса [1–3]. Существенной особенностью уравнений Навье-Стокса является их нелинейность, а также наличие малого параметра при старшей производной (величина обратная числу Рейнольдса). Кроме того, задачи для уравнений Навье-Стокса часто приходится решать в областях сложной геометрии.

Существует обширный класс течений, в которых можно пренебречь нелинейными членами и получить линейную задачу. Полное пренебрежение инерционными членами приводит к так называемым уравнениям ползущего течения или уравнениям Стокса [4, 5]. Однако для задачи обтекания цилиндрического тела безграничной вязкой несжимаемой жидкостью не существует решения уравнений Стокса (парадокс Стокса). В этом случае пользуются приближением Озеена [5–7].

Различные задачи, возникающие при изучении динамики вязкой жидкости, могут быть исследованы теоретическим путем или с помощью физического эксперимента. Однако с развитием ЭВМ все активнее используется математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Существует множество подходов, применяемых при расчете вязких течений. В основном эти подходы используют метод конечных разностей и метод конечных элементов [8–16]. Эти методы просты в реализации, но не обладают необходимым свойством универсальности – при переходе к новой области (особенно неклассической геометрии) необходимо генерировать новую сетку, а часто и заменять сложные участки границы простыми, составленными, например, из отрезков прямых. Точно учесть геометрию области, а также краевые условия, можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций акад. НАН Украины В.Л.Рвачева [17]. Метод R-функций в задачах гидродинамики использовался Колосовой С.В., Суворовой И.Г., Максименко-Шейко К.В., Сидоровым М.В., но рассматривались задачи расчета течений идеальной жидкости [18], или же вязкой в ограниченных областях [19–21] или при наличии

винтовой симметрии [22]. Задачи внешнего обтекания тел вязкой жидкостью с использованием метода R-функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования внешних стационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости методом R-функций является актуальной научной проблемой.

Целью настоящего исследования является применение для расчета внешних медленных течений вязкой несжимаемой жидкости структурного метода R-функций и проекционного метода Галеркина-Петрова.

Настоящая работа распространяет результаты, полученные в [23], на случай вязкой несжимаемой жидкости. В работе не рассматриваются вопросы существования и единственности поставленных краевых задач. Предполагается, что все задачи поставлены корректно в некоторых функциональных пространствах для заданных входных данных и все математические модели рассматриваются с точки зрения их алгоритмизации для дальнейшего решения на ЭВМ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача 1. В осесимметричных задачах в сферической системе координат r, θ, φ все величины не зависят от координаты φ и третья компонента скорости жидкости равна нулю: $v_\varphi = 0$. Рассмотрим обтекание тела вращения. Пусть ему в переменных r, θ соответствует конечная область Ω с кусочно-непрерывной границей $\partial\Omega$. Медленное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в сферической системе координат описывается уравнением (приближение Стокса) [3, 4]:

$$E^2(E^2\psi) = 0 \text{ вне } \bar{\Omega}, \quad (1)$$

где $E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \right)$, $\psi = \psi(r, \theta)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями [4, 5]

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0.$$

Если граница тела непроницаема и неподвижна, то для функции тока можно поставить такие краевые условия:

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{n} – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Поведение функции тока на бесконечности задается в виде

$$\psi \sim \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Задача 2. В двумерных (плоских) течениях в цилиндрической системе координат ρ, φ, z все величины не зависят от координаты z и третья компонента скорости жидкости равна нулю: $v_z = 0$. Медленное течение вязкой несжимаемой жидкости вне цилиндрического тела, сечением которого является конечная область Ω с кусочно-непрерывной границей $\partial\Omega$, в цилиндрической системе координат описывается уравнением (приближение Озеена) [7]:

$$\Delta^2\psi + A(\Delta\psi) = 0 \text{ вне } \bar{\Omega}, \quad (4)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, $A\zeta = -\cos\varphi \frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \frac{\sin\varphi}{\rho} \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}$, $\psi = \psi(\rho, \varphi)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями [4]

$$v_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \quad v_z = 0.$$

Для функции тока ставятся краевые условия (2); поведение функции тока на бесконечности задается таким предельным соотношением:

$$\psi \sim U_\infty \rho \sin\varphi \text{ при } \rho \rightarrow \infty. \quad (5)$$

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 1 И 2

Для решения задач 1 и 2 предлагается использовать метод R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [17].

Пусть вне $\bar{\Omega}$ известна достаточно гладкая функция $\omega(r, \theta)$, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \omega(r, \theta) > 0 \text{ вне } \bar{\Omega}; \\ 2) \quad & \omega(r, \theta)|_{\partial\Omega} = 0; \\ 3) \quad & \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = -1, \end{aligned} \tag{6}$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию $y = f_M(x)$ из [23], которая удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \text{а) } & f_M(0) = 0; \quad \text{б) } f'_M(0) = 1; \\ \text{в) } & f'_M(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0; \\ \text{г) } & f_M(x) \equiv 1 \quad \forall x \geq M \quad (M = \text{const} > 0). \end{aligned} \tag{7}$$

Условием (7) удовлетворяет, например, функция [23]:

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{Mx}{x-M}\right), & 0 \leq x < M; \\ 1, & x \geq M. \end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, $f_M(x) \in C^\infty[0, \infty)$. График функции (8) приведен на рис. 1.

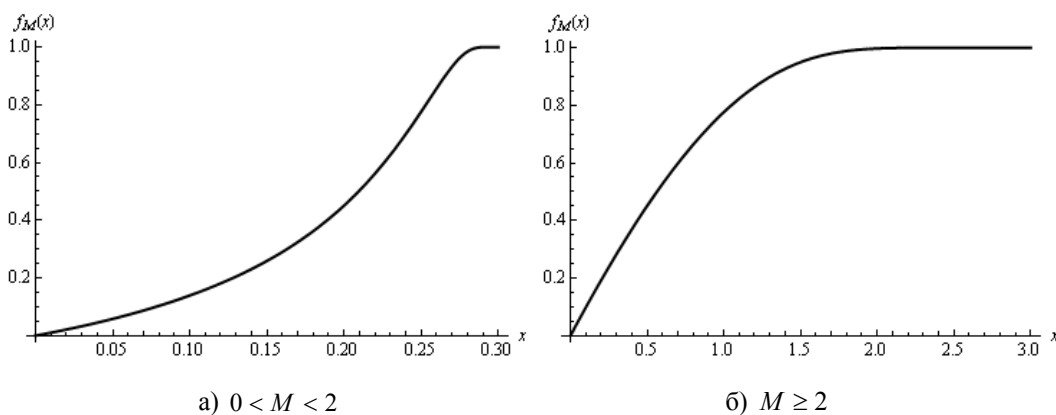


Рис. 1. График функции (8)

Обозначим $\omega_M(r, \theta) = f_M[\omega(r, \theta)]$. Имеет место утверждение [23].

Лемма. Функция $\omega_M = f_M(\omega)$ удовлетворяет условиям (6) и условию

$$\omega_M(r, \theta) \equiv 1, \text{ если } \omega(r, \theta) \geq M. \tag{9}$$

Действительно, из свойств 1) и 2) из (6) и из условий а) и в) из (7) следует, что

$$\omega_M > 0 \text{ вне } \bar{\Omega}, \quad \omega_M = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Далее,

$$\frac{\partial\omega_M}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial f_M}{\partial\omega} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}.$$

Используя свойства 3) из (6) и б) из (7) для точек границы $\partial\Omega$, т. е. для точек, для которых $\omega = 0$, получаем:

$$\frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial f_M}{\partial \omega} \Big|_{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Кроме того, очевидно, что функция $\omega_M = f_M(\omega)$ удовлетворяет условию (9).

Это означает следующее: если функция $\omega(r, \theta)$ монотонно возрастает при удалении от контура $\partial \Omega$, то функция $\omega_M(r, \theta) = f_M[\omega(r, \theta)]$ отлична от единицы, лишь в некоторой конечной кольцеобразной области $\{0 \leq \omega(r, \theta) < M\}$, лежащей вне $\bar{\Omega}$ и прилегающей к контуру $\partial \Omega$.

Задача 1. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \cdot r^{-2} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$) краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi = \omega_M^2 (\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2, \quad (10)$$

где $\psi_0 = \frac{1}{4} U_\infty (r - R)^2 \left(2 + \frac{R}{r}\right) \sin^2 \theta$ – решение Стокса для задачи про обтекание сферы радиуса R (считаем, что сфера радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела).

Доказательство. Проверим, удовлетворяет ли функция (10) краевым условиям (2). Из леммы имеем $\omega_M|_{\partial \Omega} = 0$, поэтому $\psi|_{\partial \Omega} = 0$. Следовательно, функция вида (10) удовлетворяет первое из краевых условий (2).

Находим

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 2\omega_M \frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}} (\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\psi_0 + \Phi_1) + 2\omega_M \frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}} (1 - \omega_M) \Phi_2 + \omega_M^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} ((1 - \omega_M) \Phi_2).$$

Т. к. $\omega_M|_{\partial \Omega} = 0$, то $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0$, т.е. функция (10) удовлетворяет и второе из краевых условий (2).

Проверим условие на бесконечности. Заметим, что согласно лемме $\omega_M(r, \theta) \equiv 1$, если $\omega(r, \theta) \geq M$. Следовательно, в точках области $\omega(r, \theta) \geq M$ функция ψ вида (10) приобретает вид

$$\psi = \psi_0 + \Phi_1. \quad (11)$$

Тогда $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi \cdot r^{-2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_0 \cdot r^{-2} + \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_1 \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2 \theta$, т.к. $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_1 \cdot r^{-2} = 0$ по условию теоремы 1.

Таким образом, функция $\psi(r, \theta)$ вида (10) точно удовлетворяет краевым условиям (2) – (3), т.е. является структурой решения краевой задачи (1) – (3).

Общее решение уравнения (1) имеет вид [4, 5]:

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) = & \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{3-n}) J_n(\cos \theta) + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (\tilde{A}_n r^n + \tilde{B}_n r^{1-n} + \tilde{C}_n r^{n+2} + \tilde{D}_n r^{3-n}) H_n(\cos \theta), \end{aligned} \quad (12)$$

где $A_n, B_n, C_n, D_n, \tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n$ – произвольные постоянные, $J_n(\zeta)$ и $H_n(\zeta)$ – функции Гегенбауэра первого и второго рода, которые линейно связаны с функциями Лежандра $P_n(\zeta)$ и $Q_n(\zeta)$:

$$J_n(\zeta) = \frac{P_{n-2}(\zeta) - P_n(\zeta)}{2n-1}, \quad H_n(\zeta) = \frac{Q_{n-2}(\zeta) - Q_n(\zeta)}{2n-1} \quad (n \geq 2).$$

При $n \geq 2$ функции Гегенбауэра второго рода бесконечны в точках $\zeta = \pm 1$, что отвечает $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Поэтому, если в физической постановке задачи отсутствуют сингулярные особенности, то помеченные «тильдой» в формуле (12) постоянные равны нулю. Кроме того, при $n = 0$ и $n = 1$ оставшиеся постоянные приводят к бесконечным тангенциальным скоростям v_θ на оси потока. Потому в большинстве задач об обтекании частиц, пузырей и капель стоковым потоком функцию тока можно представить в виде

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{3-n}) J_n(\cos \theta). \quad (13)$$

Из (13) видно, что для уравнения (1) полная система частных решений относительно внешности сферы конечного радиуса имеет вид:

$$\{\varphi_k(r, \theta)\} = \{r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots; r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots\}.$$

В частных случаях имеем

$$J_0(\zeta) = 1, \quad J_1(\zeta) = -\zeta, \quad J_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta^2), \quad J_3(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta(1 - \zeta^2), \quad J_4(\zeta) = \frac{1}{8}(1 - \zeta^2)(5\zeta^2 - 1).$$

Функцию Φ_1 представим в виде $\Phi_1 = \sum_k \alpha_k \cdot \varphi_k(r, \theta)$.

Учитывая вид (11) функции ψ , который она принимает, если $\omega(r, \theta) \geq M$, замечаем, что для указанной области функция ψ точно удовлетворяет уравнению (1) независимо от значений постоянных α_k и выбора произвольной функции Φ_2 . Действительно,

$$E^2(E^2\psi) = E^2\left(E^2\left(\psi_0 + \sum_k \alpha_k \cdot \varphi_k(r, \theta)\right)\right) = E^2(E^2\psi_0) + \sum_k \alpha_k \cdot E^2(E^2\varphi_k) = 0$$

для точек, принадлежащих области $\{\omega(r, \theta) \geq M\}$. Произволом функции Φ_2 и постоянных α_k воспользуемся так, чтобы наилучшим образом удовлетворить уравнению (1) внутри области $\{0 \leq \omega(r, \theta) < M\}$.

Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 воспользуемся проекционным методом Галеркина-Петрова [24]. Функции Φ_1 и Φ_2 представим в виде

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k, \quad \Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j, \quad (14)$$

где $\{\varphi_k(r, \theta)\} = \{r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots; r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots\}$ – полная система частных решений уравнения (1) относительно внешности сферы конечного радиуса;

$\{\tau_j(r, \theta)\} = \left\{ r J_2(\cos \theta), J_3(\cos \theta), J_j(\cos \theta) \frac{r^j}{r^{j+2}}, j = 2, 3, \dots \right\}$ – полная система частных решений уравнения (1) относительно области $\{\omega(r, \theta) < M\}$.

Таким образом, приближенное решение нашей задачи ищем в виде

$$\psi_n = \omega_M^2 \left(\frac{1}{4} U_\infty (r - R)^2 \left(2 + \frac{R}{r} \right) \sin^2 \theta + \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k \right) + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \cdot \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j.$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\begin{aligned} \{f_i(r, \theta)\} &= \{\omega_M^2(r, \theta) r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots; \omega_M^2(r, \theta) r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots; \\ &\omega_M^2(r, \theta) (1 - \omega_M(r, \theta)) r J_2(\cos \theta), \omega_M^2(r, \theta) (1 - \omega_M(r, \theta)) J_3(\cos \theta), \\ &\omega_M^2(r, \theta) (1 - \omega_M(r, \theta)) J_j(\cos \theta) \frac{r^j}{r^{j+2}}, j = 2, 3, \dots\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Значения коэффициентов α_k ($k = 1, 2, \dots, m_1$) и β_j ($j = 1, 2, \dots, m_2$) в соответствии с методом Галеркина-Петрова найдем из условия ортогональности невязки $E^2(E^2\psi_n)$ первым n ($n = m_1 + m_2$) элементам последовательности (15):

$$(E^2(E^2\psi_n), f_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть $\bar{\Omega}^c$ – дополнение $\bar{\Omega}$ до всего пространства. Разобьем бесконечную область $\bar{\Omega}^c$ на две области: $\bar{\Omega}^c = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (рис. 2), где Ω_1 – область, ограниченная $\partial\Omega$ и контуром, чьи точки удовлетворяют уравнению $\omega = M$; а $\Omega_2 = \bar{\Omega}^c \setminus \Omega_1$. Тогда

$$(E^2(E^2\psi_n), f_i) = \iint_{\Omega_1} E^2(E^2\psi_n) \cdot f_i d\Omega + \iint_{\Omega_2} E^2(E^2\psi_n) \cdot f_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

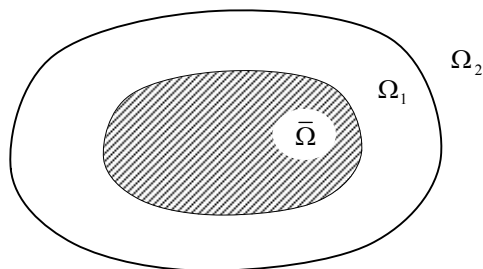


Рис. 2. Область $\bar{\Omega}^c$.

Так как в области Ω_2 $E^2(E^2\psi_n) = 0$, то в выражении (16) интегрирование следует проводить только по конечной области Ω_1 .

Учитывая связь оператора Стокса с оператором Лапласа

$$E^2 = \Delta - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

и применяя формулы Грина [25] (все контурные интегралы по $\partial\Omega_1$ обращаются в нуль, т.к. $\omega_M|_{\partial\Omega} \equiv 0$ и

$\omega_M|_{\omega=M} \equiv 1$, т.е. $\frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}}|_{\omega=M} \equiv 0$), получим

$$\begin{aligned} (E^2(E^2\psi_n), f_i) = & \iint_{\Omega_1} \left[E^2\psi_n \cdot E^2 f_i + E^2\psi_n \cdot \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial f_i}{\partial \theta} + E^2\psi_n \cdot \frac{2}{r} \frac{\partial f_i}{\partial r} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} \cdot E^2 f_i + \right. \\ & + \frac{4 \cos^2 \theta}{r^4 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \cdot E^2 f_i + \frac{4 \cos \theta}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial r} + \frac{4 \cos \theta}{r^3 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r \partial \theta} \cdot f_i + \\ & + \frac{4 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial r} - \frac{2}{r^4 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \theta^2} \cdot f_i + \frac{4 \cos \theta}{r^4 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2} \cdot f_i + \\ & + \frac{4}{r} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2} \cdot f_i + \frac{4}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial r} - \frac{2}{r^4 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \theta} - \frac{4 \cos \theta}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} \cdot f_i + \\ & \left. + \frac{4 \cos^2 \theta}{r^4 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial \theta^2} \cdot f_i - \frac{8 \cos \theta}{r^4 \sin \theta} \frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} \cdot f_i - \frac{4}{r^3} \frac{\partial \psi_n}{\partial r} \cdot f_i \right] d\Omega. \quad (17) \end{aligned}$$

Задача 2. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \cdot \rho^{-1} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow +\infty$) краевым условиям (2) и условию на бесконечности (5) точно удовлетворяет функция вида (10), где $\psi_0 = U_\infty \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right) \sin \varphi$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R (считаем, что цилиндр радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела), $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega)$ имеет вид (8), а ω – функция, обладающая свойствами (6).

Доказательство. Функция (10) удовлетворяет краевым условиям (2) по теореме 1. Проверим условие на бесконечности. Согласно лемме $\omega_M(\rho, \varphi) \equiv 1$, если $\omega(\rho, \varphi) \geq M$. Следовательно, в точках области $\omega(\rho, \varphi) \geq M$ функция ψ вида (10) приобретает вид (11). Тогда

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \psi \cdot \rho^{-1} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \psi_0 \cdot \rho^{-1} + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi_1 \cdot \rho^{-1} = U_\infty \sin \varphi,$$

т.к. $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi_1 \cdot \rho^{-1} = 0$ по условию теоремы 2.

Таким образом, функция $\psi(\rho, \varphi)$ из (10) точно удовлетворяет краевым условиям (2), (5), т.е. является структурой решения краевой задачи (4), (2), (5).

Общее решение бигармонического уравнения $\Delta^2 \psi = 0$ имеет вид [26]:

$$\psi(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \rho^{2+n} \cos n\varphi + \tilde{A}_n \rho^{2+n} \sin n\varphi + B_n \rho^{2-n} \cos n\varphi + \tilde{B}_n \rho^{2-n} \sin n\varphi + \right. \\ \left. + C_n \rho^n \cos n\varphi + \tilde{C}_n \rho^n \sin n\varphi + D_n \rho^{-n} \cos n\varphi + \tilde{D}_n \rho^{-n} \sin n\varphi \right),$$

где $A_n, B_n, C_n, D_n, \tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n$ – произвольные постоянные.

Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 воспользуемся проекционным методом Галеркина-Петрова [24]. Функции Φ_1 и Φ_2 представим в виде (14), где

$$\{\varphi_k(\rho, \varphi)\} = \left\{ \rho^{2-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=3, 4, \dots; \rho^{-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=1, 2, \dots \right\} - \text{полная система частных решений уравнения}$$

$\Delta^2 \psi = 0$ относительно внешности цилиндра конечного радиуса;

$$\{\tau_j(\rho, \varphi)\} = \left\{ \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \rho^{j+2} \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, \rho^j \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, j=1, 2, \dots \right\} - \text{полная система частных решений уравнения}$$

$\Delta^2 \psi = 0$ относительно области $\{\omega(\rho, \varphi) < M\}$.

Таким образом, приближенное решение нашей задачи ищем в виде

$$\psi_n = \omega_M^2 \left(U_\infty \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right) \sin \varphi + \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k \right) + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \cdot \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j.$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\{f_i(\rho, \varphi)\} = \left\{ \omega_M^2(\rho, \varphi) \rho^{2-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=3, 4, \dots; \omega_M^2(\rho, \varphi) \rho^{-k} \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, k=1, 2, \dots; \right. \\ \left. \omega_M^2(\rho, \varphi) \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}, \omega_M^2(\rho, \varphi) \rho^{j+2} \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, \omega_M^2(\rho, \varphi) \rho^j \frac{\cos j\varphi}{\sin j\varphi}, j=1, 2, \dots \right\}. \quad (18)$$

Значения коэффициентов α_k ($k=1, 2, \dots, m_1$) и β_j ($j=1, 2, \dots, m_2$) в соответствии с методом Галеркина-Петрова найдем из условия ортогональности невязки $R_n = \Delta^2 \psi_n + A(\Delta \psi_n)$ первым n ($n=m_1+m_2$) элементам последовательности (18)

$$(R_n, f_i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Разобьем бесконечную область $\bar{\Omega}^C$ на две области: $\bar{\Omega}^C = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (рис. 2), где Ω_1 – область, ограниченная $\partial\Omega$ и контуром, чьи точки удовлетворяют уравнению $\omega = M$; а $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$. Тогда

$$(R_n, f_i) = \iint_{\Omega_1} R_n \cdot f_i \, d\Omega + \iint_{\Omega_2} R_n \cdot f_i \, d\Omega. \quad (19)$$

Вычислим $\iint_{\Omega_2} R_n \cdot f_i \, d\Omega$. В области Ω_2 ψ_n принимает вид (11). Поскольку $\Delta \psi_0 = 0$ и $\Delta^2 \varphi_k = 0$, то

$$\Delta^2 \psi_0 = 0, \text{ а } \Delta^2 \Phi_1^{m_1} = \Delta^2 \left(\sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k \right) = 0.$$

Тогда $\Delta^2 \psi_n = 0$ и

$$R_n = A(\Delta \psi_n) = A(\Delta(\psi_0 + \Phi_1^{m_1})) = A(\Delta \psi_0 + \Delta \Phi_1^{m_1}) = A(\Delta \psi_0) + A(\Delta \Phi_1^{m_1}) = A(\Delta \Phi_1^{m_1}).$$

Исходя из выбора последовательности φ_k , $\Phi_1^{m_1}$ имеет вид

$$\Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{n_1} (\alpha_k^{(1)} \rho^{-k} \sin k\varphi + \alpha_k^{(2)} \rho^{-k} \cos k\varphi) + \sum_{k=3}^{n_2} (\alpha_k^{(3)} \rho^{2-k} \sin k\varphi + \alpha_k^{(4)} \rho^{2-k} \cos k\varphi), \quad m_1 = 2n_1 + 2(n_2 - 2).$$

Поскольку $\Delta \begin{pmatrix} \rho^{-k} \sin k\varphi \\ \cos k\varphi \end{pmatrix} = 0$, $\Delta \begin{pmatrix} \rho^{2-k} \sin k\varphi \\ \cos k\varphi \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \begin{pmatrix} \rho^{2-k} \sin k\varphi \\ \cos k\varphi \end{pmatrix} = \rho^{-k} \frac{\sin k\varphi}{\cos k\varphi} (4-4k)$, то

$$\Delta \Phi_1 = \sum_{k=3}^{n_2} (4-4k) (\alpha_k^{(3)} \rho^{-k} \sin k\varphi + \alpha_k^{(4)} \rho^{-k} \cos k\varphi).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_n &= A(\Delta \Phi_1) = A \left(\sum_{k=3}^{n_2} (4-4k) (\alpha_k^{(3)} \rho^{-k} \sin k\varphi + \alpha_k^{(4)} \rho^{-k} \cos k\varphi) \right) = \\ &= \sum_{k=3}^{n_2} (4-4k) \cdot A (\alpha_k^{(3)} \rho^{-k} \sin k\varphi + \alpha_k^{(4)} \rho^{-k} \cos k\varphi) = \\ &= \sum_{k=3}^{n_2} \left[-\cos \varphi \cdot (4-4k) k \rho^{-k-1} (-\alpha_k^{(3)} \sin k\varphi - \alpha_k^{(4)} \cos k\varphi) + \frac{\sin \varphi}{\rho} \cdot (4-4k) k \rho^{-k} (\alpha_k^{(3)} \cos k\varphi - \alpha_k^{(4)} \sin k\varphi) \right] = \\ &= \sum_{k=3}^{n_2} \left[\cos \varphi \cdot (4-4k) k \rho^{-k-1} (\alpha_k^{(3)} \sin k\varphi + \alpha_k^{(4)} \cos k\varphi) + \sin \varphi \cdot (4-4k) k \rho^{-k-1} (\alpha_k^{(3)} \cos k\varphi - \alpha_k^{(4)} \sin k\varphi) \right] = \\ &= \sum_{k=3}^{n_2} \left[(4-4k) k \rho^{-k-1} (\alpha_k^{(3)} \cos \varphi \cdot \sin k\varphi + \alpha_k^{(4)} \cos \varphi \cdot \cos k\varphi + \alpha_k^{(3)} \sin \varphi \cdot \cos k\varphi - \alpha_k^{(4)} \sin \varphi \cdot \sin k\varphi) \right] = \\ &= \sum_{k=3}^{n_2} \left[(4-4k) k \rho^{-k-1} (\alpha_k^{(3)} \sin(k+1)\varphi + \alpha_k^{(4)} \cos(k+1)\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями можно проверить, что $\iint_{\Omega_2} R_n \cdot f_i \, d\Omega = 0$. А значит, в выражении (19) интегрирование следует проводить только по конечной области Ω_1 .

Применив формулы Грина [25] (все контурные интегралы по $\partial\Omega_1$ обращаются в нуль, т.к. $\omega_M|_{\partial\Omega} \equiv 0$ и $\omega_M|_{\omega=M} \equiv 1$, т.е. $\frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\omega=M} \equiv 0$), получим

$$\begin{aligned} (R_n, f_i) &= \iint_{\Omega_1} \left[\Delta \Psi_n \cdot \Delta f_i - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \left(-\cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial \varphi} \right) + \frac{\sin \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial \varphi} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f_i}{\partial \rho} \left(-\cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial \rho} \right) + \frac{\sin \varphi}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial \rho} \right) \right) - \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\rho^3} \cdot f_i \right] d\Omega = \\ &= \iint_{\Omega_1} \Delta \Psi_n \cdot \Delta f_i \, d\Omega_1 - \iint_{\Omega_1} \left[A \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} A \left(\frac{\partial \Psi_n}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^3} \cdot \cos \varphi \cdot f_i \cdot \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial \varphi^2} \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (20)$$

МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Задача 1. Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания эллипсоида вращения $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ при $U_\infty = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $M = 0,7$, $m_1 = 12$, $m_2 = 16$. Двойные интегралы, входящие в систему (17), считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной. Линии уровня функции тока представлены на рис. 3.

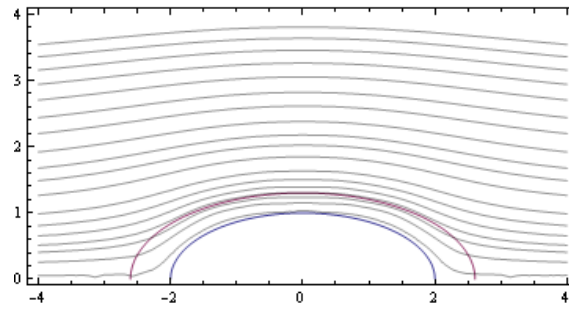


Рис. 3. Линии уровня функции тока для эллипсоида вращения

На рис. 4 представлено векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta) = \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$.

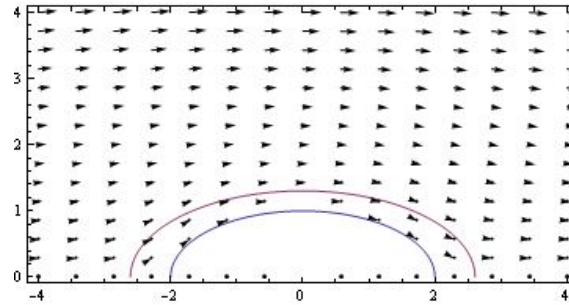


Рис. 4. Векторное поле скоростей для эллипсоида вращения

Задача 2. Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания эллиптического цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $U_\infty = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $M = 0,7$, $m_1 = 8$, $m_2 = 14$. Двойные интегралы, входящие в систему (20), считались приближенно по формуле Гаусса с 50 узлами по каждой переменной. Линии уровня функции тока представлены на рис. 5.

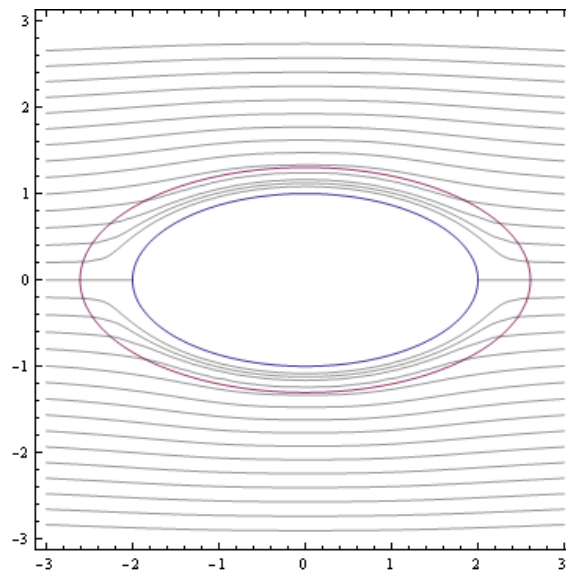


Рис. 5. Линии уровня функции тока для эллиптического цилиндра

На рис. 6 представлено векторное поле скоростей $\mathbf{v} = (v_\rho, v_\varphi) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, -\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)$.

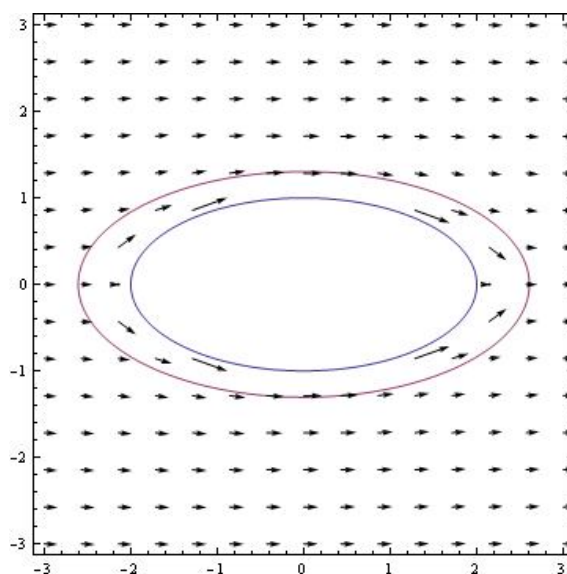


Рис. 6. Векторное поле скоростей для эллиптического цилиндра

ВЫВОДЫ

В работе впервые разработан метод расчета внешних медленных течений вязкой несжимаемой жидкости, основанный на совместном применении структурного метода R-функций и проекционного метода Галеркина-Петрова, который отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает как краевые условия на границе обтекаемого тела, так и условие на бесконечности. Разработанный метод позволяет проводить математическое моделирование разных физико-механических и биологических медленных течений, а также полученное приближенное решение может быть использовано как начальное приближение в процессе решения общих уравнений Навье-Стокса итерационными методами. Этим и определяется научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: РХД, 2003. – Т. 1. – 452 с.; Т. 2. – 452 с.
2. Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
4. Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика: Справочное пособие. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.
5. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
6. Шкадов В.Я., Запрянов З.Д. Течения вязкой жидкости. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 200 с.
7. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.Г. Расчет стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 1975. – 15, № 1. – С. 183–196.
8. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 384 с.; Т. 2. – 392 с.
9. Гущин В. А., Матюшин П. В. Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости // Мат. моделирование. – 2006. – 18, № 5. – С. 5–20.
10. Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – 7 (79), № 1. – С. 56–71.
11. Рябенский В.С., Торгашов В. А. Безытерационный способ решения неявной разностной схемы для уравнений Навье-Стокса в переменных: завихренность и функция тока // Мат. моделирование. – 1996. – 8, № 10. – С. 100–112.
12. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
13. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991. – Т.1. – 504 с; Т. 2. – 552 с.

14. Chung T. J. Computational fluid dynamics. – UK: CUP, 2002. – 1012 p.
15. Liu J.-G., Wienan E. Simple Finite Element Method in vorticity formulation for incompressible flow // Math. of Computation. – 2003. – 10, № 2. – P. 1130 – 1145.
16. Pozrikidis C. Fluid dynamics: theory, computation, and numerical simulation. – USA: Kluwer academic publishers, 2001. – 557 p.
17. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
18. Колосова С.В. Применение проекционных методов и метода R-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. ... к.ф.-м.н.: 01.01.07 – Вычислительная математика. – Харьков: ХИРЭ, 1972. – 85 с.
19. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. – 2003. – № 602. – С. 61 – 67.
20. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. – Харьков, 2004. – № 31. – С. 141 – 148.
21. Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 50–57.
22. Максименко-Шейко К.В. Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций // Доп. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 41 – 46.
23. Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л. Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. – № 9. – 1972. С. 837 – 839.
24. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
25. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
26. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.

УДК 517.95+518.517+519.6(075.8)

КРИВИЗНА ГРАНИЦЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА, ПОСТРОЕННОГО С ПОМОЩЬЮ R-ФУНКЦИЙ

Максименко-Шейко К.В., к.ф.-м.н., ст. науч. сотр.,
Шейко Т.И., д.т.н., профессор

Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины, Харьков

В работе сформулирована и доказана теорема о сохранении кривизны границы геометрического объекта, построенного с помощью теории R-функций. Приведен пример. Таким образом, опровергнуто утверждение о том, что R-операции системы $\{R_0\}$ не сохраняют кривизну опорных функций.

Ключевые слова: кривизна границы геометрического объекта, теория R-функций.

Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. КРИВИЗНА ГРАНИЦІ ГЕОМЕТРИЧНОГО ОБ'ЄКТА, ПОБУДОВАНОГО ЗА ДОПОМОГОЮ R-ФУНКЦІЙ / Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Україна

У роботі сформульовано та доведено теорему про збереження кривизни границі геометричного об'єкта, який побудовано за допомогою теорії R-функцій. Наведено приклад. Таким чином, спростовано ствердження про те, що R-операції системи $\{R_0\}$ не зберігають кривизну опорних функцій.

Ключові слова: кривизна границі геометричного об'єкта, теорія R-функцій.