

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ ДО РОЗРАХУНКУ ЗОВНІШНІХ ПОВІЛЬНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

The problem of calculating the slow flow past a body with viscous incompressible fluid in the presence of axial symmetry is treated. The R-functions method of acad. V.L. Rvachev and Galerkin-Petrov method are used for solving the task.

Keywords: viscous fluid, axisymmetric flow, Stokes approximation, the R-functions method, the Galerkin-Petrov method.

Розглянуто задачу розрахунку повільного обтікання тіла в'язкою нестисливою рідиною за наявності в течії осової симетрії. Для розв'язання цієї задачі використано метод R-функцій акад. В.Л. Рвачова і метод Гальоркіна-Петрова.

Ключові слова: в'язка рідина, осесиметрична течія, наближення Стокса, метод R-функцій, метод Гальоркіна-Петрова.

Вивчення законів руху рідини відіграє важливу роль у розвитку техніки і природознавства. Дослідження в цій області стимулюються потребами авіації, кораблебудування, теплоенергетики, геофізики, біології та ін. За останні десятиліття сфера дослідження і застосування явищ, пов'язаних з рухом рідини, постійно розширюється і охоплює провідні напрями промисловості (хімічні технології, нафто- і газорозробка, металургія і т.д.) і ряд природничих наук (біологія, фізика атмосфери і океану і ін.). У багатьох практично важливих випадках рідину можна з великою достовірністю вважати в'язким нестисливим ньютонівським середовищем, і процеси, що відбуваються в ній, можуть бути промодельовані за допомогою рівнянь Нав'є-Стокса [7–9]. Істотною особливістю рівнянь Нав'є-Стокса є їх нелінійність, а також наявність малого параметра при старшій похідній (величина зворотна числу Рейнольдса). Крім того, задачі для рівнянь Нав'є-Стокса часто доводиться розв'язувати в областях складної геометрії. Рівняння Нав'є-Стокса помітно спрощуються для течій з малим числом Рейнольдса. Якщо $Re \ll 1$, отримуємо лінеарізовану систему Нав'є-Стокса – систему Стокса. Через лінійність задача Стокса розв'язується простіше, ніж загальна задача Нав'є-Стокса.

Різні задачі, що виникають у процесі вивчення динаміки в'язкої рідини, можуть бути досліджені теоретичним способом або за допомогою фізичного експерименту. Проте з розвитком ЕОМ все активніше використовується математичне моделювання і обчислювальний експеримент. Є безліч чисельних методів, вживаних для розрахунку в'язких течій. В основному ці чисельні методи використовують метод скінченних різниць і метод скінченних елементів [1, 2, 11–13, 18, 20–22]. Ці методи прості в реалізації, але не мають необхідну властивість універсальності – при переході до нової області (особливо неklasичної геометрії) необхідно генерувати нову сітку, а часто і замінювати складні ділянки границі простими, складеними, наприклад, з відрізків прямих. Точно врахувати геометрію області, а також крайові умови, можна, скориставшись конструктивним апаратом теорії R-функцій акад. НАН України В. Л. Рвачова [14]. Метод R-функцій у задачах гідродинаміки застосовувався Колосовою С. В., Суворовою І. Г., Максименко-Шейко К. В., Сидоровим М. В., але розглядалися задачі розрахунку течій ідеальної рідини [3], або ж в'язкої у скінченних областях [4, 15, 17] чи за наявності гвинтової симетрії [10]. Задачі зовнішнього обтікання тіл в'язкою рідиною з використанням методу R-функцій не розглядалися, хоча вони становлять важливий клас прикладних задач.

Тому розробка нових, а також вдосконалення існуючих методів математичного моделювання плоских стаціонарних задач динаміки в'язкої нестисливої рідини методом R-функцій є актуальною науковою проблемою.

Мета роботи – застосування для розрахунку зовнішніх повільних осесиметричних течій в'язкої нестисливої рідини структурного методу R-функцій та проєкційного методу Гальоркіна-Петрова. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити *такі задачі*:

- побудувати повну структуру розв'язку крайової задачі, тобто жмуток функцій, який точно задовольняє усім крайовим умовам задачі;
- розробити алгоритм апроксимації невизначеної компоненти побудованої структури на основі методу Гальоркіна-Петрова;
- провести обчислювальний експеримент.

Постановка задачі. Розглянемо повільну осесиметричну течію в'язкої нестисливої рідини. В осесиметричних задачах в сферичній системі координат r, θ, φ всі величини не залежать від координати φ і третя компонента швидкості рідини дорівнює нулю: $v_\varphi = 0$.

Рівняння Стокса в сферичній системі координат мають такий вигляд [6, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) &= 0, \\ \mu \left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \mu \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (1)$$

де v_r, v_θ – компоненти швидкості рідини, p – тиск, μ – динамічний коефіцієнт

в'язкості, $\Delta \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$.

Компоненти швидкості рідини можна виразити через функцію течії ψ за формулами:

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Після виключення з системи Стокса (1) членів, що містять тиск, одержимо таке рівняння для функції течії:

$$E^2 (E^2 \psi) = 0 \text{ зовні } \bar{\Omega}, \quad (2)$$

де

$$E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Якщо у фізичній постановці задачі відсутні сингулярні особливості, то загальний розв'язок рівняння (2) можна подати у вигляді [6, 19]:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{3-n}) J_n(\cos \theta),$$

де A_n, B_n, C_n, D_n – довільні сталі; $J_n(\zeta)$ – функції Гегенбауера першого роду.

Якщо межа тіла непроникна та нерухома, то для функції течії можна поставити такі крайові умови:

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

де \mathbf{n} – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль; поведінка функції течії на нескінченності задається таким граничним співвідношенням:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_{\infty} \sin^2 \theta, \quad (4)$$

де U_{∞} – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

Метод розв’язання. Для розв’язання задачі (2) – (4) пропонуємо використовувати метод R -функцій акад. НАН України В. Л. Рвачова [14].

Нехай зовні $\bar{\Omega}$ відома досить гладка функція $\omega(r, \theta)$ з властивостями:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \omega(r, \theta) > 0 \text{ зовні } \bar{\Omega}; \\ 2) \quad & \omega(r, \theta)|_{\partial\Omega} = 0; \\ 3) \quad & \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = -1, \end{aligned} \quad (5)$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$.

Введемо в розгляд досить гладку функцію $y = f_M(x)$, яка задовольняє умовам [16]:

$$\begin{aligned} \text{а) } & f_M(0) = 0; \\ \text{б) } & f'_M(0) = 1; \\ \text{в) } & f'_M(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0; \\ \text{г) } & f_M(x) \equiv 1 \quad \forall x \geq M \quad (M = \text{const} > 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Легко перевірити, що умовам (6) задовольняє, наприклад, функція

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{Mx}{x-M}\right), & 0 \leq x < M; \\ 1, & x \geq M. \end{cases} \quad (7)$$

Помітимо, що така $f_M(x) \in C^{\infty}[0, \infty)$.

Графік функції (7) зображений на рис. 1а ($0 < M < 2$) і рис. 1б ($M \geq 2$).

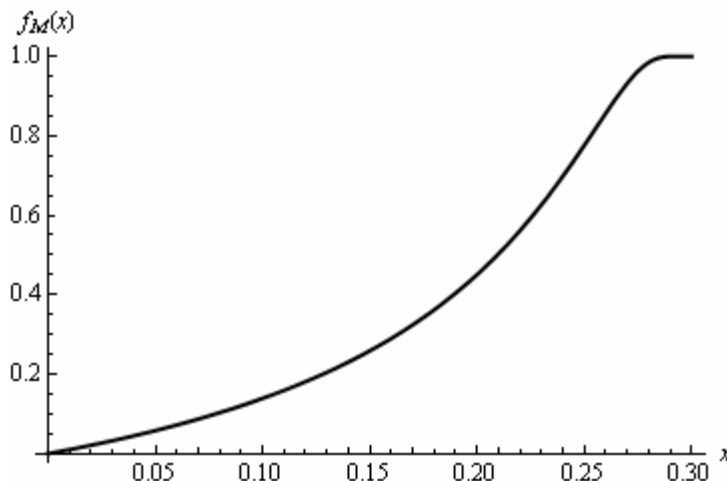


Рис. 1а. Графік функції (7), якщо $0 < M < 2$.

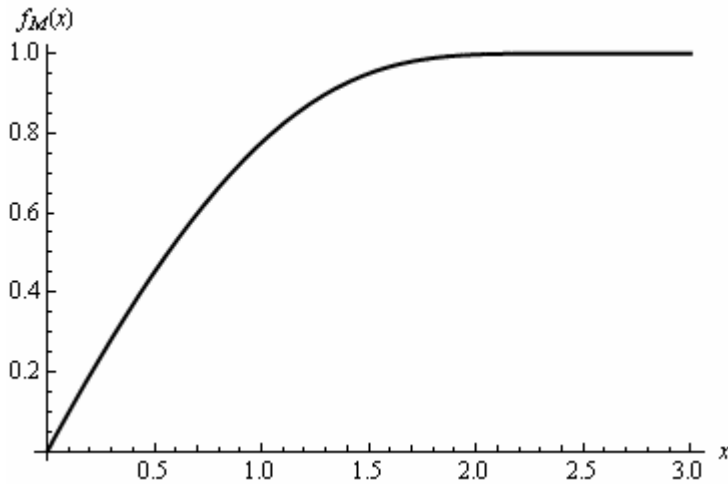


Рис. 16. Графік функції (7), якщо $M \geq 2$.

Позначимо $\omega_M(r, \theta) = f_M[\omega(r, \theta)]$. Справджується твердження [16].

Лема. Функція $\omega_M = f_M(\omega)$ задовольняє умовам (5) і умові

$$\omega_M(r, \theta) \equiv 1, \text{ якщо } \omega_M(r, \theta) \geq M. \quad (8)$$

Доведення. Насправді, із властивостей 1) і 2) із (5) і з умов а) і в) із (6) виходить, що

$$\begin{aligned} \omega_M &> 0 \text{ зовні } \overline{\Omega}, \\ \omega_M &= 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Далі

$$\frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial f_M}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}}.$$

Використовуючи властивості 3) із (5) і б) із (6) для точок границі $\partial\Omega$, тобто для точок, для яких $\omega = 0$, отримуємо:

$$\left. \frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = \left. \frac{\partial f_M}{\partial \omega} \right|_{\partial\Omega} \cdot \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Крім того, очевидно, що функція $\omega_M = f_M(\omega)$ задовольняє умові (8).

Це означає таке: якщо функція $\omega(r, \theta)$ монотонно зростає при віддаленні від контура $\partial\Omega$, то функція $\omega_M(r, \theta) = f_M[\omega(r, \theta)]$ відмінна від одиниці лише в деякій скінченій кільцеподібній області $\{0 \leq \omega(r, \theta) < M\}$, яка лежить зовні $\overline{\Omega}$ і прилягає до контуру $\partial\Omega$.

Теорему доведено.

Теорема. При будь-якому виборі досить гладких функцій Φ_1 і Φ_2 ($\Phi_1 \cdot r^{-2} \rightarrow 0$, якщо $r \rightarrow +\infty$) крайовим умовам (3) і умові на нескінченності (4) точно задовольняє функція вигляду

$$\psi = \omega_M^2 (\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2, \quad (9)$$

де

$$\psi_0 = \frac{1}{4} U_\infty (r - R)^2 \left(2 + \frac{R}{r} \right) \sin^2 \theta$$

– розв’язок Стоксу для задачі про обтікання сфери радіусу R (вважаємо, що сфера радіусу R цілком лежить в $\bar{\Omega}$).

Доведення. Перевіримо, чи задовольняє функція (9) крайовим умовам (3). Із леми маємо, що $\omega_M|_{\partial\Omega} = 0$, тому $\psi|_{\partial\Omega} = 0$. Отже, функція вигляду (9) задовольняє першу з крайових умов (3).

Знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} &= 2\omega_M \frac{\partial\omega_M}{\partial\mathbf{n}}(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\psi_0 + \Phi_1) + \\ &+ 2\omega_M \frac{\partial\omega_M}{\partial\mathbf{n}}(1 - \omega_M)\Phi_2 + \omega_M^2 \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}((1 - \omega_M)\Phi_2). \end{aligned}$$

Оскільки $\omega_M|_{\partial\Omega} = 0$, то $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$, тобто функція (9) задовольняє і другу з крайових умов (3).

Перевіримо умову на нескінченності.

Помітимо, що згідно з лемою $\omega_M(r, \theta) \equiv 1$, якщо $\omega(r, \theta) \geq M$. Тобто, в точках області $\omega(r, \theta) \geq M$ функція ψ вигляду (9) набуває вигляду

$$\psi = \psi_0 + \Phi_1. \quad (10)$$

Тоді

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi \cdot r^{-2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_0 \cdot r^{-2} + \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_1 \cdot r^{-2} = \frac{1}{2} U_\infty \sin^2 \theta,$$

тому що $\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_1 \cdot r^{-2} = 0$ за умовою теореми.

Отже, функція $\psi(r, \theta)$ із (9) точно задовольняє крайові умови (3) – (4), тобто є структурою розв’язку крайової задачі (2) – (4).

Для рівняння (2) відома повна система часткових розв’язків відносно зовнішності сфери скінченного радіусу. Вона має вигляд [6, 19]:

$$\{\varphi_k(r, \theta)\} = \left\{ r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots; r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots \right\}.$$

Функцію Φ_1 подамо у вигляді $\Phi_1 = \sum_k \alpha_k \varphi_k(r, \theta)$.

Враховуючи вид (10) функції ψ , який вона приймає, якщо $\omega_M(r, \theta) \geq M$, помічаємо, що для вказаної області функція ψ точно задовольняє рівнянню (2) незалежно від значень сталих α_k і вибору довільної функції Φ_2 . Дійсно,

$$E^2(E^2\psi) = E^2(E^2(\psi_0 + \sum_k \alpha_k \varphi_k(r, \theta))) = E^2(E^2\psi_0) + \sum_k \alpha_k E^2(E^2\varphi_k) = 0$$

для точок, які належать області $\{\omega(r, \theta) \geq M\}$. Невизначеністю функції Φ_2 і сталих α_k скористаємося так, щоб якнайкраще задовольнити рівнянню (2) усередині області $\{0 \leq \omega(r, \theta) < M\}$.

Для апроксимації невизначених компонент Φ_1 і Φ_2 скористаємося проєкційним методом Гальоркіна-Петрова [5]. Функції Φ_1 і Φ_2 подамо у вигляді:

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \varphi_k, \quad \Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \tau_j,$$

де

$$\{\phi_k(r, \theta)\} = \{r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots; r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots\}$$

– повна система часткових розв’язків рівняння (2) відносно зовнішності сфери скінченного радіусу;

$$\{\tau_j(r, \theta)\} = \{r J_2(\cos \theta), J_3(\cos \theta), r^j J_j(\cos \theta), r^{j+2} J_j(\cos \theta), j = 2, 3, \dots\}$$

– повна система часткових розв’язків рівняння (2) відносно області $\{\omega(r, \theta) < M\}$.

Задамося повною відносно усієї площини послідовністю функцій

$$\begin{aligned} \{\omega_M^2(r, \theta) r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots; \omega_M^2(r, \theta) r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots; \\ \omega_M^2(r, \theta) r J_2(\cos \theta), \omega_M^2(r, \theta) J_3(\cos \theta), \\ \omega_M^2(r, \theta) r^j J_j(\cos \theta), \omega_M^2(r, \theta) r^{j+2} J_j(\cos \theta), j = 2, 3, \dots\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Значення коефіцієнтів α_k ($k = 1, 2, \dots, m_1$) і β_j ($j = 1, 2, \dots, m_2$) відповідно до методу Гальоркіна-Петрова знайдемо з умови ортогональності відхилю першим $m_1 + m_2$ елементам послідовності (11).

Обчислювальний експеримент. Обчислювальний експеримент був проведений для задачі про обтікання еліпсоїда обертання, який задано рівнянням $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, якщо $U_\infty = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 3$, $M = 0,7$. Для цієї задачі відомий точний розв’язок [6]. Відносна похибка наближеного розв’язку становила 7%. Лінії рівня функції течії зображені на рис.2.

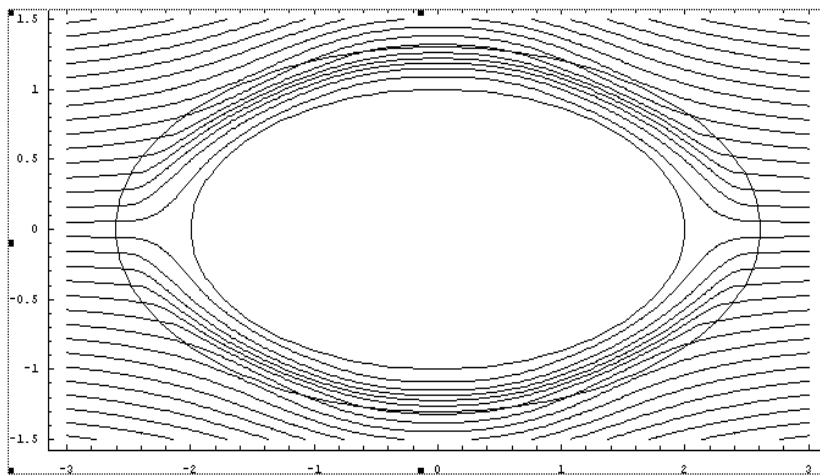


Рис. 2. Лінії рівня функції течії для еліпсоїда обертання.

Висновки. В роботі вперше розроблено метод розрахунку зовнішніх повільних осесиметричних течій в’язкої нестисливої рідини, оснований на сумісному застосуванні структурного методу R-функцій і проекційного методу Гальоркіна-Петрова, який відрізняється від відомих методів універсальністю (алгоритм не змінюється при зміні геометрії області). Розроблений метод дає змогу проводити математичне моделювання різних фізико-механічних та біологічних осесиметричних повільних течій, а також отриманий наближений розв’язок може бути використаний як початкове наближення у процесі розв’язання загальних рівнянь Нав’є-Стокса ітераційними методами.

1. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 384 с.; Т. 2. – 392 с.

2. Гуцин В. А., Матюшин П. В. Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости // *Мат. моделирование*. – 2006. – **18**, № 5. – С. 5–20.
3. Колосова С.В. Применение проекционных методов и метода R-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. ... к.ф.-м.н.: 01.01.07 – Вычислительная математика. – Харьков: ХИРЭ, 1972. – 85 с.
4. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // *Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех.* – 2003. – № 602. – С. 61 – 67.
5. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутецкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
6. Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запьянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика: Справочное пособие. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.
7. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: РХД, 2003. – Т. 1. – 452 с.; Т. 2. – 452 с.
8. Ландау Л.Ф., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
10. Максименко-Шейко К.В. Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций // *Доп. НАН України*. – 2005. – № 9. – С. 41 – 46.
11. Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса // *Прикладна гідромеханіка*. – 2005. – 7 (79), № 1. – С. 56–71.
12. Рябенкий В.С., Торгаиов В. А. Безытерационный способ решения неявной разностной схемы для уравнений Навье-Стокса в переменных: завихренность и функция тока // *Мат. моделирование*. – 1996. – **8**, № 10. – С. 100–112.
13. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
14. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
15. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // *Вестн. НТУ ХПИ*. – Харьков, 2004. – № 31. – С. 141 – 148.
16. Стрельченко А.И., Колосова С.В., Рвачев В.Л. Про один метод розв'язування крайових задач // *Доп. АН УРСР, сер. А*. – № 9. – 1972. С. 837 – 839.
17. Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // *Радиоэлектроника и информатика*. – 2007. – № 2. – С. 50–57.
18. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991. – Т.1. – 504 с; Т. 2. – 552 с.
19. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
20. Chung T. J. Computational fluid dynamics. – UK: CUP, 2002. – 1012 p.
21. Liu J.-G., Wienan E. Simple Finite Element Method in vorticity formulation for incompressible flow // *Math. of Computation*. – 2003. – **10**, № 2. – P. 1130 – 1145.
22. Pozrikidis C. Fluid dynamics: theory, computation, and numerical simulation. – USA: Kluwer academic publishers, 2001. – 557 p.