СИСТЕМЫ И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9:532.5

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ, УСЛОЖНЕННЫХ МАССООБМЕНОМ (ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ)

КОЛОСОВА С.В., ЛАМТЮГОВА С.Н., СИДОРОВ М.В.

Рассматривается применение методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина к расчету задач внешнего обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью, усложненных массообменом.

1. Введение

Актуальность исследования. Задачи расчета вязких течений, усложненных массообменом, применяются в теплоэнергетике, химической и пищевой технологиях, гео- и астрофизических исследованиях, охране окружающей среды. Так, многие процессы химической технологии связаны с движением жидкости в технологическом оборудовании. При подготовке реагентов и выделении продуктов реакции такие операции, как выщелачивание, абсорбция, экстракция и перегонка, играют важную роль. Законы гидродинамики, тепло- и массопередачи существенны для всего технологического процесса. Процессы тепло- и массообмена также являются одними из основных в энергетике, а также в целом ряде технологических процессов металлургической и других отраслей промышленности. Кроме того, задачи массообмена тел с равномерным вязким потоком лежат в основе расчета многих технологических процессов, связанных с растворением, экстракцией, испарением, осаждением коллоидов [1].

В общем случае задача о стационарном массообмене тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению уравнения гидродинамического обтекания поверхности и уравнения для концентрации с соответствующими краевыми условиями на поверхности тела и вдали от него. Точно учесть геометрию области, а также краевые условия (в том числе и условие на бесконечности) можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2].

Метод R-функций в задачах гидродинамики использовался в работах [3–8], но рассматривались задачи расчета течений идеальной жидкости [3] или же вязкой в ограниченных областях [4–7], или при наличии винтовой симметрии [8].

Метод R-функций для задач внешнего обтекания тел вязкой жидкостью использовался в работах [9,10], но задачи внешнего обтекания тел вязкой жидкостью, усложненные массообменом, с использованием метода R-функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования и численного анализа внешних стационарных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости с учетом массообмена методом R-функций является актуальной научной проблемой.

Эта работа опирается на метод R-функций акад. В.Л. Рвачева [2] и его применение к расчету стационарных течений жидкости в бесконечных односвязных областях сложной геометрии [11].

Цели и задачи исследования. Целью данного исследования является разработка нового метода численного анализа задачи массообмена тела вращения с равномерным поступательным потоком. Этот метод основан на совместном применении метода последовательных приближений, структурного метода R-функций и проекционного метода Галеркина. В данной работе не обсуждается степень строгости, условия применимости использованных уравнений движения жидкости, они рассматриваются как математические модели, подлежащие численной алгоритмизации.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

– на основании методов теории R-функций построить полную структуру решения нелинейной краевой задачи для функции тока;

– заменить исходную нелинейную задачу последовательностью линейных краевых задач;

– для решения линейных задач на каждом шаге итерационного процесса разработать численный алгоритм на основании метода Галеркина;

– на основании методов теории R-функций построить полную структуру решения линейной краевой задачи для концентрации;

– для решения линейной задачи для концентрации разработать численный алгоритм на основании метода Галеркина.

2. Постановка задачи

Рассмотрим массообмен тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости. Считаем, что в пространстве введена декартова система координат (x, y, z), а обтекаемое тело образовано вращением вокруг оси Oz фигуры Ω, лежащей в плоскости Oxz (фигура Ω односвязная, конечная и симметричная относительно оси Oz). Кроме того, предположим, что поток жидкости равномерный, его скорость равна U_∞ вдали от тела и он сонаправлен с осью Ox. Такие течения удобно рассматривать в сферической системе координат. В осесимметричных задачах в сферической системе координат r, θ, φ все величины не зависят от координаты φ и третья компонента скорости жидкости равна нулю: $v_\varphi = 0$. Тогда остальные две компоненты скорости жидкости можно представить в виде [1, 12]

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{1}$$

где $\psi = \psi(r,\theta)$ – функция тока.

Процесс массопереноса описывается уравнением для концентрации [1]

$$\Delta c = \mathrm{Pe}(\bar{v}\cdot\nabla)c, \tag{2}$$

здесь $c = c(r,\theta)$ – концентрация; Pe – число Пекле – безразмерный параметр, характеризующий меру отношения конвективного переноса растворенного в жидкости вещества к диффузионному переносу,

$$\Delta c = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial c}{\partial\theta}\right),$$

$$(\bar{v}\cdot\nabla)c = v_r\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial c}{\partial\theta}.$$

Подставив (1) в (2), для концентрации $c = c(r,\theta)$ получим следующую задачу:

$$\Delta c = \frac{\mathrm{Pe}}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial\theta}\right) \text{ вне } \bar{\Omega}, \tag{3}$$

$$c\big|_{\partial\Omega} = c_0, \tag{4}$$

$$c \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{5}$$

где c_0 – заданная концентрация на границе $\partial\Omega$ обтекаемого тела.

Функцию тока $\psi(r,\theta)$ можно найти, например, как решение следующей нелинейной задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью [13]:

$$\nu E^2\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial E\psi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial E\psi}{\partial\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\,\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)E\psi \text{ вне } \bar{\Omega}, \tag{6}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

$$\psi \sim \frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta \text{ при } r \to \infty, \tag{8}$$

где $E\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$, $E^2\psi = E(E\psi)$,

$\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль; $\nu = \mathrm{Re}^{-1}$; Re – число Рейнольдса.

Итак, решение задачи (3) – (5) состоит из двух этапов:

1) нахождение функции тока как решения задачи (6) – (8);

2) решение задачи (3) – (5) для концентрации.

Для решения поставленных задач воспользуемся методом R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2]: с помощью конструктивных средств теории R-функций построим структуры решения краевых задач, т.е. пучки функций, точно удовлетворяющих краевым условиям.

3. Метод решения задачи для функции тока

Пусть вне $\bar{\Omega}$ известна достаточно гладкая функция $\omega(r,\theta)$, обладающая следующими свойствами:

1) $\omega(r,\theta) > 0$ вне $\bar{\Omega}$;

2) $\omega(r,\theta) = 0$ на $\partial\Omega$;

3) $\frac{\partial\omega(r,\theta)}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$,

где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию $y = f_M(x)$ [11], удовлетворяющую следующим условиям:

а) $f_M(0) = 0$;

б) $f'_M(0) = 1$;

в) $f'_M(x) \ge 0\ \forall x \ge 0$;

г) $f_M(x) \equiv 1\ \forall x \ge M$ $(M = \mathrm{const} > 0)$.

Условиям а) – г) удовлетворяет, например, функция

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp\frac{Mx}{x-M}, & 0 \le x < M; \\ 1, & x \ge M. \end{cases}$$

Ясно, что такая $f_M(x) \in C^\infty[0,+\infty)$.

Обозначим

$$\omega_M(r,\theta) = f_M[\omega(r,\theta)]. \tag{9}$$

Функция $\omega_M(r,\theta)$ удовлетворяет условиям 1) – 3). Кроме того, $\omega_M(r,\theta) \equiv 1$, если $\omega(r,\theta) \ge M$. Это условие означает, что если функция $\omega(r,\theta)$ монотонно возрастает при удалении от $\partial\Omega$, то функция $\omega_M(r,\theta)$ вида (9) отлична от единицы лишь в некоторой кольцеобразной области $\{0 \le \omega(r,\theta) < M\}$, содержащейся во внешности $\bar{\Omega}$ и прилегающей к $\partial\Omega$.

В работе [9] показано, что при любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \cdot r^{-2} \to 0$ при $r \to +\infty$) краевым условиям (7) и условию на бесконечности (8) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2, \tag{10}$$

где $\psi_0 = \frac{1}{4}U_\infty(r-R)^2\left(2+\frac{R}{r}\right)\sin^2\theta$ – решение Стокса для задачи обтекания сферы радиуса R (считаем, что сфера радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела $\bar{\Omega}$).

Для решения задачи (6) – (8) воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть начальное приближение $\psi^{(0)}$ задано. В качестве начального приближения $\psi^{(0)}$ можно взять, например, решение соответствующей линеаризованной задачи (приближение Стокса) [10].

Если i-е приближение $\psi^{(i)}$ построено, то новое $(i+1)$-е приближение $\psi^{(i+1)}$ находим как решение линейной задачи:

$$\nu E^2\psi^{(i+1)} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\theta}\frac{\partial E\psi^{(i)}}{\partial r} - \frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial r}\frac{\partial E\psi^{(i)}}{\partial\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\,\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\theta}\right)E\psi^{(i)} \text{ вне } \bar{\Omega}, \quad (11)$$

$$\psi^{(i+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi^{(i+1)}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (12)$$

$$\psi^{(i+1)} \sim \frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta \text{ при } r\to\infty. \quad (13)$$

В соответствии с (10) структура решения задачи (11) – (13) имеет вид

$$\psi^{(i+1)} = \omega_M^2\Phi_1^{(i+1)} + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2^{(i+1)}.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ воспользуемся методом Галеркина [14].

Известно [12, 15], что общее решение уравнения $E^2\psi = 0$ при отсутствии в физической постановке сингулярностей может быть записано в виде

$$\psi(r,\theta) = \sum_{n=2}^{\infty}\Big(A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} +$$

$$+D_n r^{3-n}\Big)J_n(\cos\theta), \quad (14)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n – произвольные постоянные; $J_n(\zeta)$ – функции Гегенбауэра первого рода. Представлением (14) воспользуемся для выбора координатных последовательностей.

Для аппроксимации неопределенной компоненты $\Phi_1^{(i+1)}$ воспользуемся функциями системы

$$\Big\{r^{-1}J_2(\cos\theta), r^{-1}J_4(\cos\theta), r^{-2}J_3(\cos\theta), r^{-2}J_5(\cos\theta), ...,$$

$$r^{-n}J_{n+1}(\cos\theta), r^{-n}J_{n+3}(\cos\theta), ...\Big\}, \quad (15)$$

а для аппроксимации неопределенной компоненты $\Phi_2^{(i+1)}$ воспользуемся функциями системы

$$\Big\{J_3(\cos\theta), r J_2(\cos\theta), r^2 J_2(\cos\theta), r^4 J_2(\cos\theta), r^3 J_3(\cos\theta),$$

$$r^5 J_3(\cos\theta), ..., r^n J_n(\cos\theta), r^{n+2} J_n(\cos\theta), ...\Big\}. \quad (16)$$

Итак, функции $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ представим в виде

$$\Phi_1^{(i+1)} \approx \Phi_{1,m_1}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{m_1}\alpha_n^{(i+1)}\tau_n,$$

$$\Phi_2^{(i+1)} \approx \Phi_{2,m_2}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{m_2}\alpha_{n+m_1}^{(i+1)}\tau_{n+m_1},$$

где $\tau_1, ..., \tau_{m_1}$ – первые m_1 функций системы (15), а $\tau_{m_1+1}, ..., \tau_{m_1+m_2}$ – первые m_2 функций системы (16).

Тогда

$$\psi^{(i+1)} \approx \psi_N^{(i+1)} = \omega_M^2\psi_0 + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{(i+1)}\varphi_n, \quad (17)$$

где $N = m_1 + m_2$,

$$\varphi_1 = \omega_M^2\tau_1, \ \ldots, \ \varphi_{m_1} = \omega_M^2\tau_{m_1},$$

$$\varphi_{m_1+1} = \omega_M^2(1-\omega_M)\tau_{m_1+1}, \ \ldots,$$

$$\varphi_N = \omega_M^2(1-\omega_M)\tau_{m_1+m_2}.$$

Таким образом, построенные функции φ_n образуют координатную последовательность.

Коэффициенты $\alpha_1^{(i+1)}, ..., \alpha_N^{(i+1)}$ найдем из условия ортогональности невязки, полученной после подстановки функции (17) в уравнение (11), к системе функций

$$\{\omega_M^2(r,\theta)r^{1-k}J_k(\cos\theta), k = 2,3,...;$$

$$\omega_M^2(r,\theta)r^{3-k}J_k(\cos\theta), k = 4,5,...;$$

$$\omega_M^2(r,\theta)rJ_2(\cos\theta), \omega_M^2(r,\theta)J_3(\cos\theta),$$

$$\omega_M^2(r,\theta)r^jJ_j(\cos\theta), \omega_M^2(r,\theta)r^{j+2}J_j(\cos\theta), j = 2,3,...\}.$$

Это приводит к необходимости решения системы линейных уравнений относительно $\alpha_1^{(i+1)}, ..., \alpha_N^{(i+1)}$.

Итерации следует прекратить, когда $\left\|\psi^{(i+1)} - \psi^{(i)}\right\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число.

4. Метод решения задачи для концентрации

Подставив найденную функцию тока в уравнение (3), решим задачу (3) – (5) также методом R-функций.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. *При любом выборе достаточно гладких функций* Ψ_1 *и* Ψ_2 *(*$\Psi_1 \to 0$ *при* $r\to+\infty$*) краевым условиям (4) и (5) точно удовлетворяет функция вида*

$$c = c_0(1-\omega_M) + \omega_M\Psi_1 + \omega_M(1-\omega_M)\Psi_2.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент Ψ_1 и Ψ_2 также воспользуемся методом Галеркина [14].

Для аппроксимации неопределенной компоненты Ψ_1 воспользуемся функциями полной системы частных решений уравнения Лапласа относительно области $\{\omega(r,\theta) > 0\}$:

$$\Big\{r^n P_n^m(\cos\theta), m = 0,1,2,...,n, n = 0,1,2,...\Big\}, (18)$$

а для аппроксимации неопределенной компоненты Ψ_2 воспользуемся функциями полной системы частных решений уравнения Лапласа относительно области $\{\omega(r,\theta) < M\}$:

$$\{r^{-n-1}\, P_n^m(\cos\theta), m = 0,1,2,...,n, n = 0,1,2,...\}, \qquad (19)$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра.

Итак, функции Ψ_1 и Ψ_2 представим в виде

$$\Psi_1 \approx \Psi_{1,m_3} = \sum_{k=1}^{m_3} \beta_k \gamma_k ,$$

$$\Psi_2 \approx \Psi_{2,m_4} = \sum_{k=1}^{m_4} \beta_{k+m_3} \gamma_{k+m_3} ,$$

где γ_1, ..., γ_{m_3} – первые m_3 функций системы (18), а γ_{m_3+1}, ..., $\gamma_{m_3+m_4}$ – первые m_4 функций системы (19).

Тогда

$$c \approx c_K = c_0\,(1-\omega_M) + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \phi_k , \qquad (20)$$

где $K = m_3 + m_4$,

$$\phi_1 = \omega_M\, \gamma_1,\ \ldots,\ \phi_{m_3} = \omega_M\, \gamma_{m_3},$$

$$\phi_{m_3+1} = \omega_M\,(1-\omega_M)\,\gamma_{m_3+1},\ \ldots,$$

$$\phi_K = \omega_M\,(1-\omega_M)\,\gamma_{m_3+m_4}\,.$$

Коэффициенты β_1, ..., β_K найдем из условия ортогональности невязки, полученной после подстановки функции (20) в уравнение (3), к первым m_3 функциям системы (18) и к первым m_4 функциям системы (19).

Это приводит к необходимости решения системы линейных уравнений относительно β_1, ..., β_K.

Таким образом, мы получим приближенное решение задачи (3) – (5).

5. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и эллипсоида вращения $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ при $c_0 = 1$, M=5, разных числах Рейнольдса и Пекле. На рис. 1 – 6 приведены линии концентрации для сферы, на рис. 7 – 12 – для эллипсоида вращения.

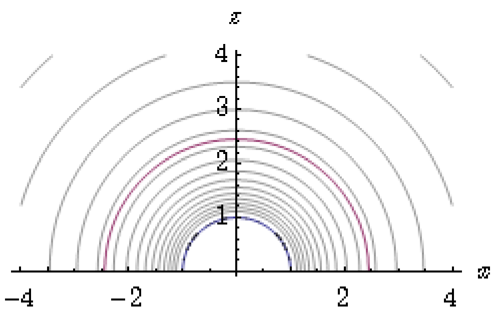

Рис. 1. Линии концентрации для сферы для $Re = 0$ и $Pe = 0$

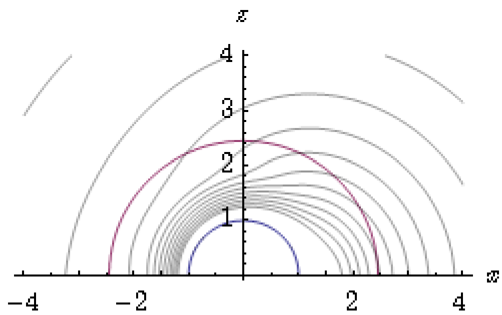

Рис. 2. Линии концентрации для сферы для $Re = 0$ и $Pe = 10$

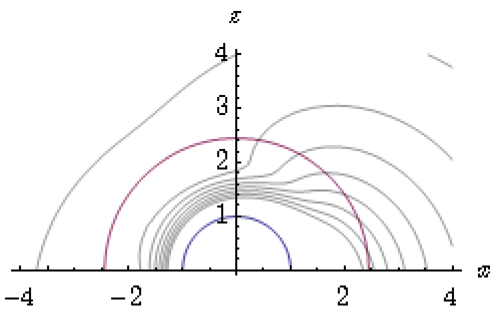

Рис. 3. Линии концентрации для сферы для $Re = 0$ и $Pe = 20$

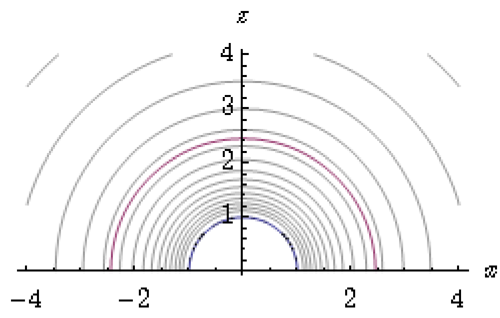

Рис. 4. Линии концентрации для сферы для $Re = 25$ и $Pe = 0$

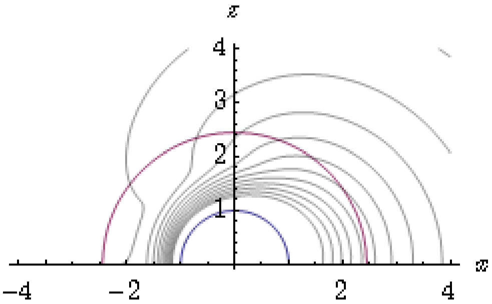

Рис. 5. Линии концентрации для сферы для $\mathrm{Re}=25$ и $\mathrm{Pe}=10$

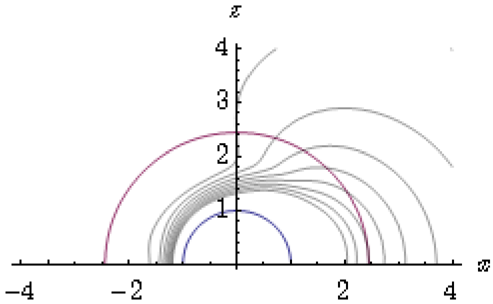

Рис. 6. Линии концентрации для сферы для $\mathrm{Re}=25$ и $\mathrm{Pe}=20$

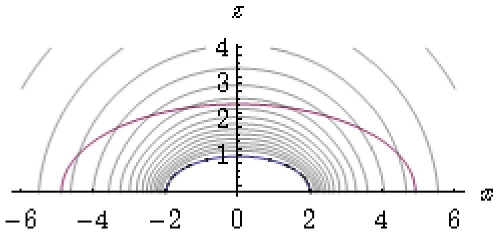

Рис. 7. Линии концентрации для эллипсоида для $\mathrm{Re}=0$ и $\mathrm{Pe}=0$

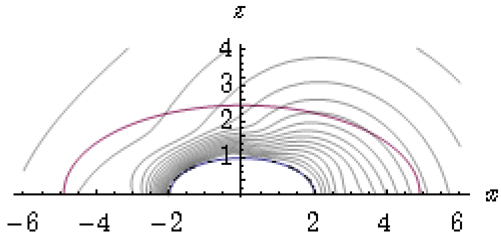

Рис. 8. Линии концентрации для эллипсоида для $\mathrm{Re}=0$ и $\mathrm{Pe}=10$

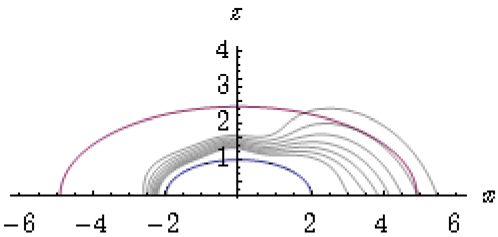

Рис. 9. Линии концентрации для эллипсоида для $\mathrm{Re}=0$ и $\mathrm{Pe}=20$

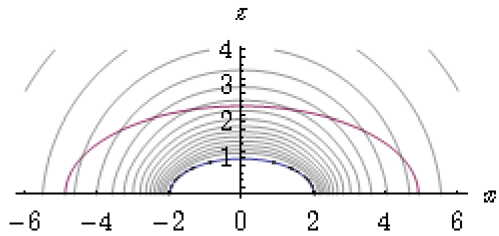

Рис. 10. Линии концентрации для эллипсоида для $\mathrm{Re}=30$ и $\mathrm{Pe}=0$

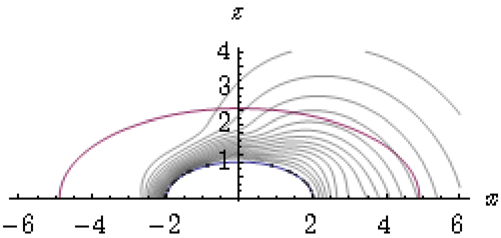

Рис. 11. Линии концентрации для эллипсоида для $\mathrm{Re}=30$ и $\mathrm{Pe}=10$

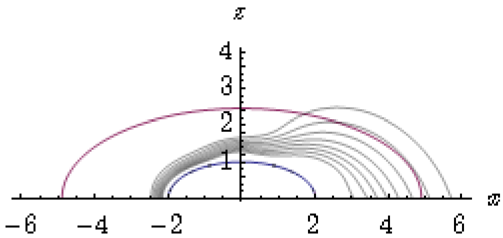

Рис. 12. Линии концентрации для эллипсоида для $\mathrm{Re}=30$ и $\mathrm{Pe}=20$

Выводы

Впервые предложен численный метод расчета массообмена тела вращения с равномерным поступательным потоком, основанный на совместном применении методов последовательных приближений, R-функций и Галеркина, который отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает все краевые условия задачи, в том числе и условие на бесконечности. Разработанный метод позволяет проводить математическое моделирование разных технологических и физико-механических процессов.

Сказанное выше и определяет *научную новизну* и *практическую значимость* полученных результатов.

Литература: 1. *Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А.* Химическая гидродинамика: Спр. пос. М.: Квантум, 1996. 336 с. **2.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. **3.** *Колосова С.В.* Применение проекционных методов и метода R-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. … канд.физ.-мат.наук: 01.01.07 Вычислительная математика. Харьков: ХИРЭ, 1972. 85 с. **4.** *Колосова С.В., Сидоров М.В.* Применение метода R–функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. 2003. № 602. С. 61 – 67.

5. *Суворова И.Г.* Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. Харьков, 2004. № 31. С. 141 – 148. **6.** *Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В.* Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 2. С. 50 – 57. **7.** *Суворова И.Г., Кравченко О.В., Баранов И.А.* Математическое и компьютерное моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием метода R-функций // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2011. 54, № 2. С. 139 – 149. **8.** *Максименко-Шейко К.В.* Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций // Доп. НАН України. 2005. № 9. С. 41 – 46. **9.** *Ламтюгова С.М., Сидоров М.В.* Застосування методу R-функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини // Відбір та обробка інформації. 2012. № 36 (112) С. 56 – 62. **10.** *Ламтюгова С.Н.* Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. №1. С. 112 – 122. **11.** *Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л.* Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. 1972. № 9. С. 837 – 839. **12.** *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с. **13.** *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 432 с. **14.** *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 420 с. **15.** *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.

Поступила в редколлегию 14.03.2014

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Колосова Светлана Васильевна, канд. физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы математической физики. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Ламтюгова Светлана Николаевна, аспирантка каф. прикладной математики ХНУРЭ, ассистентка каф. высшей математики ХНУГХ им. А.Н. Бекетова. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.