

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ
УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З АЛГЕБРИ

(для слухачів підготовчих курсів центру довузівської підготовки і
абітурієнтів, які готуються до проходження зовнішнього незалежного
оцінювання якості знань)

Харків – ХНАМГ – 2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ
УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З АЛГЕБРИ

(для слухачів підготовчих курсів центру довузівської підготовки і абітурієнтів, які готуються до проходження зовнішнього незалежного оцінювання якості знань)

Збірник задач з алгебри (для слухачів підготовчих курсів центру довузівської підготовки і абітурієнтів, які готуються до проходження зовнішнього незалежного оцінювання якості знань)./Харк. нац. акад.міськ. госп-ва.; уклад.: В.В. Бізюк, Л.М. Александрова, О.Ф. Грєвцова, Х: ХНАМГ, 2012.–54 с.

Укладачі: В.В. Бізюк,
Л.М. Александрова,
О.Ф. Грєвцова

Рецензент: д. ф.-м. н., проф. А.І. Колосов

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 7 від 22.02.2012 р.

ЗМІСТ

Позначення, які зустрічаються в посібнику.....	4
Програма зовнішнього незалежного оцінювання з математики.....	5
§ 1 Звичайні дроби. Дії зі звичайними дробами.....	17
§ 2 Відсотки. Основні задачі на відсотки. Складні відсотки.....	19
§ 3 Степінь дійсного числа з цілим показником.....	22
§ 4 Перетворення дробових виразів.....	24
§ 5 Перетворення ірраціональних виразів.....	26
§ 6 Арифметична прогресія.....	28
§ 7 Геометрична прогресія.....	30
§ 8 Лінійні рівняння і рівняння, що приводяться до них.....	31
§ 9 Квадратні рівняння і рівняння, що приводяться до них. Теорема Вієта	32
§ 10 Раціональні рівняння вищих степенів.....	33
§ 11 Дробові раціональні рівняння.....	35
§ 12 Алгебраїчні рівняння з модулем.....	36
§ 13 Ірраціональні рівняння.....	37
§ 14 Алгебраїчні системи рівнянь.....	39
§ 15 Алгебраїчні системи нерівностей.....	40
§ 16 Нерівності другого степеня.....	41
§ 17 Раціональні нерівності.....	43
Тренувальний тест зовнішнього незалежного оцінювання з математики за специфікацією 2012 р.....	44
Список джерел.....	53

Позначення, які зустрічаються в посібнику

N	—	множина всіх натуральних чисел
Z	—	множина всіх цілих чисел
Z_0	—	множина всіх невід'ємних цілих чисел
Q	—	множина всіх раціональних чисел
R	—	множина всіх дійсних чисел, числова пряма
R_+	—	множина всіх додатних дійсних чисел
$[a; b]$	—	відрізок (замкнений проміжок) з кінцями a і b , $a < b$
$(a; b)$	—	інтервал (відкритий проміжок) з кінцями a і b , $a < b$
$(a; b], [a; b)$	—	напіввідкриті проміжки з кінцями a і b , $a < b$
$(a; +\infty), [a; +\infty)$	—	нескінченні проміжки
$(-\infty; b], (-\infty; b)$	—	нескінченні проміжки
$(-\infty; +\infty)$	—	нескінченний проміжок, числова пряма
$ x $	—	модуль (абсолютна величина) числа x
$[x]$	—	ціла частина числа x
$\{x\}$	—	дробова частина числа x
$f(x)$	—	значення функції f у точці x
$D(f)$	—	область визначення функції f
$E(f)$	—	область значень функції f
\sin	—	функція синус
\cos	—	функція косинус
tg	—	функція тангенс
ctg	—	функція котангенс
\arcsin	—	функція арксинус
\arccos	—	функція арккосинус
$arctg$	—	функція арктангенс
$arcctg$	—	функція арккотангенс
\sqrt{a}	—	арифметичний корінь із числа a
$\sqrt[2k]{a}$	—	арифметичний корінь $2k$ -го степеня з числа a ($k \in N$)
$\sqrt[2k+1]{a}$	—	корінь $(2k+1)$ -го степеня з числа a ($k \in N$)
\log_a	—	логарифм за основою a
\lg	—	десятковий логарифм (логарифм за основою 10)
\ln	—	натуральний логарифм (логарифм за основою e)

ПРОГРАМА
зовнішнього незалежного оцінюванні
з математики

Додаток №4
до наказу Міністерства
освіти і науки, молоді та
спорту України
від 14.07.2011р. №791

Мета
зовнішнього незалежного оцінювання
з математики

Оцінити степінь підготовленості учасників тестування з математики з метою конкурсного відбору для навчання у вищих навчальних закладах.

Завдання
зовнішнього незалежного оцінювання з математики
полягає утому, щоб оцінити знання та вміння учасників:

- будувати математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ та досліджувати ці моделі засобами математики;
- виконувати математичні розрахунки (виконувати дії з числами, поданими в різних формах, дії з відсотками, складати та розв'язувати задачі на пропорції, наближенні обчислення тощо);
- виконувати перетворення виразів (розуміти змістове значення кожного елементу виразу, знаходити допустимі значення змінних, знаходити числові значення виразів при заданих значеннях змінних тощо);
- будувати й аналізувати графіки найпростіших функціональних залежностей, досліджувати їхні властивості;
- розв'язувати рівняння, нерівності та їхні системи, розв'язувати текстові задачі за допомогою рівнянь, нерівностей та їхніх систем;
- знаходити на рисунках геометричні фігури та встановлювати їхні властивості;
- знаходити кількісні характеристики геометричних фігур (довжини, величини кутів, площі, об'єми);
- розв'язувати найпростіші комбінаторні задачі та обчислювати ймовірності випадкових подій;
- аналізувати інформацію, що подана в графічній, табличній, текстовій та інших формах.

Назва розділу, теми	Учень повинен знати	Предметні вміння та способи навчальної діяльності
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ		
Розділ: ЧИСЛА І ВИРАЗИ		
<p>Дійсні числа (натуральні, цілі, раціональні та ірраціональні), їх порівняння та дії над ними. Числові множини та співвідношення між ними.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - властивості дій з дійсними числами; - правила порівняння дійсних чисел; - ознаки подільності натуральних чисел на 2, 3, 5, 9, 10; - правила округлення цілих чисел і десяткових дробів; - означення кореня n-го степеня та арифметичного кореня n-го степеня; - властивості коренів; - означення степеня з натуральним, цілим та раціональним показниками, їхні властивості; - числові проміжки; - модуль дійсного числа та його властивості. 	<ul style="list-style-type: none"> - розрізняти види чисел та числових проміжків; - порівнювати дійсні числа; - виконувати дії з дійсними числами; - використовувати ознаки подільності; - знаходити неповну частку та остачу від ділення одного натурального числа на інше; - перетворювати звичайний дріб у десятковий та нескінченний періодичний десятковий дріб – у звичайний; - округлювати цілі числа і десяткові дроби; - використовувати властивості модуля до розв'язування задач.
<p>Відношення та пропорції. Відсотки. Основні задачі на відсотки.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - відношення, пропорції; - основна властивість пропорції; - означення відсотка; - правила виконання відсоткових розрахунків. 	<ul style="list-style-type: none"> - знаходити відношення чисел у вигляді відсотка, відсоток від числа, число за значенням його відсотка; - розв'язувати задачі на відсоткові розрахунки та пропорції.

<p>Раціональні, ірраціональні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні вирази та їх перетворення.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - означення області допустимих значень змінних виразу зі змінними; - означення тотожно рівних виразів, тотожного перетворення виразу, тотожності; - означення одночлена та многочлена; - правила додавання, віднімання і множення одночленів та многочленів; - формули скороченого множення; - розклад многочлена на множники; - означення алгебраїчного дробу; - правила виконання дій з алгебраїчними дробами; - означення та властивості логарифма, десятковий та натуральний логарифми; - основна логарифмічна тотожність; - означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса числового аргументу; - основна тригонометрична тотожність та наслідки з неї; - формули зведення; - формули додавання та наслідки з них. 	<ul style="list-style-type: none"> - виконувати тотожні перетворення раціональних, ірраціональних, степеневих, показникових, логарифмічних, тригонометричних виразів та знаходити їх числове значення при заданих значеннях змінних.
<p>Розділ: РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ</p>		
<p>Лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння та їх системи. Застосування рівнянь,</p>	<ul style="list-style-type: none"> - рівняння з однією змінною, означення кореня (розв'язку) рівняння з однією змінною; - нерівності з однією змінною, означення розв'язку нерівності з однією змінною; 	<ul style="list-style-type: none"> - розв'язувати рівняння і нерівності першого та другого степенів, а також рівняння і нерівності, що зводяться до них; - розв'язувати системи рівнянь і

нерівностей та їх систем до розв'язування текстових задач.	<ul style="list-style-type: none">- означення розв'язку системи рівнянь з двома змінними та методи їх розв'язань;- рівносильні рівняння, нерівності та їх системи;- методи розв'язування раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь.	<p>нерівностей першого і другого степенів, а також ті, що зводяться до них;</p> <ul style="list-style-type: none">- розв'язувати рівняння і нерівності, що містять степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні вирази;- розв'язувати рівняння, що містять тригонометричні вирази;- розв'язувати ірраціональні рівняння;- застосовувати загальні методи та прийоми (розкладання на множники, заміна змінної, застосування властивостей функцій) у процесі розв'язування рівнянь, нерівностей та систем;- користуватися графічним методом розв'язування і дослідження рівнянь, нерівностей та систем;- застосовувати рівняння, нерівності та системи до розв'язування текстових задач;- розв'язувати рівняння і нерівності, що містять змінну під знаком модуля;- розв'язувати рівняння, нерівності та системи з параметрами.
--	---	--

Розділ: ФУНКЦІЇ

Лінійні, квадратні, степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції, їх основні властивості. Числові послідовності.

- означення функції, область визначення, область значень функції, графік функції;
- способи задання функцій, основні властивості та графіки функцій, указаних у назві теми;
- означення функції, оберненої до заданої;
- означення арифметичної та геометричної прогресій;
- формули n -го члена арифметичної та геометричної прогресій;
- формули суми n перших членів арифметичної і геометричної прогресій;
- формула суми нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$.

- знаходити область визначення, область значень функції;
- досліджувати на парність (непарність), періодичність функцію;
- будувати графіки елементарних функцій, вказаних у назві теми;
- встановлювати властивості числових функцій, заданих формулою або графіком;
- використовувати перетворення графіків функцій;
- розв'язувати задачі на арифметичну та геометричну прогресії.

Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст. Похідні елементарних функцій. Правила диференціювання.

- рівняння дотичної до графіка функції в точці;
- означення похідної функції в точці;
- фізичний та геометричний зміст похідної;
- таблиця похідних елементарних функцій;
- правила знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій;
- правило знаходження похідної складеної функції.

- знаходити кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в точці;
- знаходити похідні елементарних функцій;
- знаходити числове значення похідної функції в точці для заданого значення аргументу;
- знаходити похідну суми, добутку і частки двох функцій;
- знаходити похідну складеної функції;

		<ul style="list-style-type: none"> - розв'язувати задачі з використанням геометричного та фізичного змісту похідної.
Дослідження функції за допомогою похідної. Побудова графіків функцій.	<ul style="list-style-type: none"> - достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку; - екстремуми функції; - означення найбільшого і найменшого значень функції. 	<ul style="list-style-type: none"> - знаходити проміжки монотонності функції; - знаходити екстремуми функції за допомогою похідної, найбільше та найменше значення функції; - досліджувати функції за допомогою похідної та будувати графіки; - розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень.
Первісна та визначений інтеграл. Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ криволінійних трапецій.	<ul style="list-style-type: none"> - означення первісної функції, визначеного інтеграла, криволінійної трапеції; - таблиця первісних функцій; - правила знаходження первісних; - формула Ньютона-Лейбніца. 	<ul style="list-style-type: none"> - знаходити первісну, використовуючи її основні властивості; - застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла; - обчислювати площу криволінійної трапеції за допомогою інтеграла; - розв'язувати найпростіші прикладні задачі, що зводяться до знаходження інтеграла.
Розділ: ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ		
Перестановки (без повторень). Комбінаторні правила суми та	<ul style="list-style-type: none"> - означення перестановки (без повторень); - комбінаторні правила суми та добутку; 	<ul style="list-style-type: none"> - розв'язувати найпростіші комбінаторні задачі;

добутку. Ймовірність випадкової події. Вибіркові характеристики	<ul style="list-style-type: none"> - класичне означення ймовірності події, найпростіші випадки підрахунку ймовірностей подій; - означення вибірових характеристик рядів даних (розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення); - графічна, таблична, текстова та інші форми подання статистичної інформації. 	<ul style="list-style-type: none"> - обчислювати в найпростіших випадках ймовірності випадкових подій; - обчислювати та аналізувати вибіркові характеристики рядів даних (розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення).
---	---	---

ГЕОМЕТРІЯ

Розділ: ПЛАНІМЕТРІЯ

II

Найпростіші геометричні фігури на площині та їх властивості.	<ul style="list-style-type: none"> - поняття точки і прямої, променя, відрізка, ламаної, кута; - аксіоми планіметрії; - суміжні та вертикальні кути, бісектриса кута; - властивості суміжних та вертикальних кутів; - властивість бісектриси кута; - паралельні та перпендикулярні прямі; - перпендикуляр і похила, серединний перпендикуляр, відстань від точки до прямої; - ознаки паралельності прямих; - теорема Фалеса, узагальнена теорема Фалеса. 	<ul style="list-style-type: none"> - застосувати означення, ознаки та властивості найпростіших геометричних фігур до розв'язування планіметричних задач практичного змісту.
--	---	--

Коло та круг.	<ul style="list-style-type: none"> - коло, круг та їх елементи; - центральні, вписані кути та їх властивості; - властивості двох хорд, що перетинаються; - дотична до кола та її властивості. 	<ul style="list-style-type: none"> - застосовувати набуті знання до розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту.
Трикутники.	<ul style="list-style-type: none"> - види трикутників та їх основні властивості; - ознаки рівності трикутників; - медіана, бісектриса, висота трикутника та їх властивості; - теорема про суму кутів трикутника; - нерівність трикутника; - середня лінія трикутника та її властивості; - коло, описане навколо трикутника, і коло, вписане в трикутник; - теорема Піфагора, пропорційні відрізки прямокутного трикутника; - співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника; - теорема синусів; - теорема косинусів. 	<ul style="list-style-type: none"> - класифікувати трикутники за сторонами та кутами; - розв'язувати трикутники; - застосовувати означення та властивості різних видів трикутників до розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту; - знаходити радіуси кола, описаного навколо трикутника, і кола, вписаного в трикутник.
Чотирикутник.	<ul style="list-style-type: none"> - чотирикутник та його елементи; - паралелограм та його властивості; - ознаки паралелограма; - прямокутник, ромб, квадрат, трапеція та їх властивості; - середня лінія трапеції та її властивість; - вписані в коло та описані навколо кола чотирикутники. 	<ul style="list-style-type: none"> - застосовувати означення, ознаки та властивості різних видів чотирикутників до розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту.
Многокутники.	<ul style="list-style-type: none"> - многокутник та його елементи, опуклий многокутник; 	<ul style="list-style-type: none"> - застосовувати означення та властивості многокутників до

	<ul style="list-style-type: none"> - периметр многокутника; - сума кутів опуклого многокутника; - правильний многокутник та його властивості; - вписані в коло та описані навколо кола многокутники. 	розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту.
Геометричні величини та їх вимірювання.	<ul style="list-style-type: none"> - довжина відрізка, кола та його дуги; - величина кута, вимірювання кутів; - периметр многокутника; - формули для обчислення площі трикутника, паралелограма, ромба, квадрата, трапеції, правильного многокутника, круга, кругового сектора. 	<ul style="list-style-type: none"> - знаходити довжини відрізків, градусні та радіанні міри кутів, площі геометричних фігур; - обчислювати довжину кола та його дуг, площу круга, кругового сектора; - використовувати формули площ геометричних фігур до розв'язування планіметричних задач практичного змісту.
Координати та вектори на площині.	<ul style="list-style-type: none"> - прямокутна система координат на площині, координати точки; - формула для обчислення відстані між двома точками та формула для обчислення координат середини відрізка; - рівняння прямої та кола; - поняття вектора, довжина вектора, колінеарні вектори, рівні вектори, координати вектора; - додавання і віднімання векторів, множення вектора на число; - розклад вектора за двома не колінеарними векторами; 	<ul style="list-style-type: none"> - знаходити координати середини відрізка та відстань між двома точками; - складати рівняння прямої та рівняння кола; - виконувати дії з векторами; - знаходити скалярний добуток векторів; - застосовувати координати і вектори до розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту.

	<ul style="list-style-type: none"> - скалярний добуток векторів та його властивість; - формула для знаходження кута між векторами, що задані координатами; - умови колінеарності та перпендикулярності векторів, що задані координатами. 	
Геометричні перетворення.	<ul style="list-style-type: none"> - основні види та зміст геометричних перетворень на площині (рух, симетрія відносно точки і відносно прямої, поворот, паралельне перенесення, перетворення подібності, гомотетія); - ознаки подібності трикутників; - відношення площ подібних фігур. 	<ul style="list-style-type: none"> - використовувати властивості основних видів геометричних перетворень, ознаки подібності трикутників до розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту.
Розділ: СТЕРЕОМЕТРІЯ		
Прямі та площини у просторі.	<ul style="list-style-type: none"> - аксіоми і теореми стереометрії; - взаємне розміщення прямих у просторі, прямої та площини у просторі; - ознаки паралельності прямих, прямої і площини, площин; - паралельне проектування; - ознаки перпендикулярності прямої і площини, двох площин; - проекція похилої на площину, ортогональна проекція; - пряма та обернена теореми про три перпендикуляри; 	<ul style="list-style-type: none"> - застосовувати означення, ознаки та властивості паралельних і перпендикулярних прямих і площин до розв'язування стереометричних задач та задач практичного змісту; - знаходити зазначені відстані та величини кутів у просторі.

	<ul style="list-style-type: none"> - відстань від точки до площини, від точки до прямої, від прямої до паралельної їй площини, між паралельними прямими, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими; - ознаки мимобіжності прямих; - кут між прямими, прямою і площиною, площинами. 	
Многогранники, тіла і поверхні обертання.	<ul style="list-style-type: none"> - двогранний кут, лінійний кут двогранного кута; - многогранники та їх елементи, основні види многогранників: призма, паралелепіпед, піраміда, зрізана піраміда; - тіла і поверхні обертання та їх елементи, основні види тіл і поверхонь обертання: циліндр, конус, зрізаний конус, куля, сфера; - пер різи многогранників та тіл обертання площиною; - комбінації геометричних тіл; - формули для обчислення площ поверхонь, об'ємів многогранників і тіл обертання. 	<ul style="list-style-type: none"> - розв'язувати задачі на обчислення площ поверхонь та об'ємів геометричних тіл; - встановлювати за розгорткою поверхні вид геометричного тіла; - застосовувати означення та властивості основних видів многогранників, тіл і поверхонь обертання до розв'язування стереометричних задач та задач практичного змісту.
Координати та вектори у просторі.	<ul style="list-style-type: none"> - прямокутна система координат у просторі, координати точки; - формула для обчислення відстані між двома точками та формула для обчислення координат середини відрізка; - поняття вектора, довжина вектора, колінеарні вектори, координати вектора; 	<ul style="list-style-type: none"> - знаходити координати середини відрізка та відстань між двома точками; - виконувати дії з векторами; - знаходити скалярний добуток векторів; - застосовувати координати і вектори

	<ul style="list-style-type: none">- додавання, віднімання векторів, множення вектора на число;- скалярний добуток векторів та його властивості;- формула для знаходження кута між векторами, що задані координатами;- умови колінеарності та перпендикулярності векторів, що задані координатами.	до розв'язування стереометричних задач та задач практичного змісту.
--	--	---

§1. Звичайні дроби.
Дії зі звичайними дробами

Порівняння дробів

Правило 1. З двох дробів з *однаковими знаменниками* більший той, у якого чисельник більший:

$$\frac{11}{17} > \frac{2}{17}, \text{ тому що } 11 > 2$$

Правило 2. Якщо *знаменники дробів різні*, то спочатку дроби зводять до спільного знаменника, а потім порівнюють одержані дроби з рівними знаменниками:

$$\frac{2}{7} \quad \text{і} \quad \frac{3}{8}$$
$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{7} = \frac{16}{56} \\ \frac{3}{8} = \frac{21}{56} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{16}{56} < \frac{21}{56} \Rightarrow \frac{2}{7} < \frac{3}{8}$$

Правило 3. З двох дробів з *рівними чисельниками* більший той, у якого знаменник менший:

$$\frac{13}{17} < \frac{13}{15}, \text{ тому що } 17 > 15$$

Ознаки подільності натуральних чисел

<i>Число ділиться на</i>	2 , якщо його остання цифра ділиться на 2
	3 , якщо сума його цифр ділиться на 3
	4 , якщо число, складене з двох останніх цифр, ділиться на 4
	5 , якщо його остання цифра є 5 або 0
	9 , якщо сума його цифр ділиться на 9
	10 , якщо його остання цифра є 0
	25 , якщо число, складене з двох останніх цифр, ділиться на 25

1.1. Знайдіть значення виразу $3 \cdot 2 \frac{7}{15} - 5 \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} + 1 \frac{7}{48} \cdot 2 \frac{2}{11} - \frac{2}{5} \cdot 6 \frac{5}{9}$.

Розв'язання:

$$3 \cdot 2 \frac{7}{15} - 5 \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} + 1 \frac{7}{48} \cdot 2 \frac{2}{11} - \frac{2}{5} \cdot 6 \frac{5}{9} = 3 \cdot \frac{37}{15} - \frac{11}{2} \cdot \frac{7}{9} + \frac{55}{48} \cdot \frac{24}{11} - \frac{2}{5} \cdot \frac{59}{9} = \frac{37}{5} - \frac{77}{18} + \frac{24 \cdot 5}{48} - \frac{118}{45} =$$

$$= \frac{333 - 118}{45} - \frac{77}{18} + \frac{5}{2} = \frac{215}{45} + \frac{-77 + 45}{18} = \frac{43}{9} - \frac{16}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Відповідь: 3.

1.2. Визначте кількість усіх дробів із знаменником 28, які більші за $\frac{4}{7}$, але менші за $\frac{3}{4}$.

Розв'язання:

$$\frac{4}{7} = \frac{16}{28}, \quad \frac{3}{4} = \frac{21}{28}.$$

$$\frac{16}{28}, \frac{17}{28}, \frac{18}{28}, \frac{19}{28}, \frac{20}{28}, \frac{21}{28}.$$

4 дроби

Відповідь: чотири дроби.

1.3. Скоротіть дріб $\frac{128 \cdot 44 \cdot 49 \cdot 60}{66 \cdot 84 \cdot 32 \cdot 112}$.

Розв'язання:

$$\frac{128 \cdot 44 \cdot 49 \cdot 60}{66 \cdot 84 \cdot 32 \cdot 112} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 32 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15}{6 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 21 \cdot 32 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 28} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 14} = \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5}{6}$$

Відповідь: $\frac{5}{6}$.

1.4. Визначте кількість усіх дробів із знаменником 24, які більші за $\frac{5}{6}$, але менші за 1.

1.5. Скоротіть дріб $\frac{69 \cdot 171 \cdot 130 \cdot 108}{162 \cdot 78 \cdot 92 \cdot 114}$.

Знайдіть значення виразу:

1.6. $3 \frac{1}{3} + 1 \frac{2}{3} \cdot 3 - 4 \frac{5}{6}$.

1.12. $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{11} : \frac{3}{5} - \frac{1}{22} : \frac{2}{31} \right) \cdot 22$.

1.7. $2 \cdot 3 \frac{1}{5} - 1 \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 \frac{1}{15}$.

1.13. $7 \frac{5}{7} : 3 \frac{3}{5} - \left(\frac{53}{56} - \frac{29}{35} \right) : \frac{33}{40}$.

1.8. $16 \frac{1}{3} - 11 \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{15} \right)$.

1.14. $\left(\frac{1}{4} : 4 + \frac{3}{16} \right) \cdot \left(20 \frac{5}{8} : 5 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)$.

$$1.9. \left(5\frac{3}{8} + 18\frac{1}{2} - 7\frac{5}{24}\right) : 16\frac{2}{3}.$$

$$1.15. \left(9\frac{8}{9} - 8\frac{11}{12}\right) \cdot \frac{18}{115} + 6\frac{5}{6} : 13\frac{2}{3} + \frac{8}{23}.$$

$$1.10. \left(\frac{5}{48} \cdot 3\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{2}{45}\right) - 2.$$

$$1.16. 2\frac{3}{5} : 6\frac{1}{15} + 1\frac{1}{14} - 1\frac{39}{73} \cdot \left(5\frac{5}{7} - 5\frac{1}{16}\right).$$

$$1.11. \left(3\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6} + 4\frac{3}{5}\right) \cdot 1\frac{2}{13}.$$

$$1.17. 66\frac{3}{5} : \left(5 + 3\frac{1}{5} : \left(\left(1 - \frac{3}{5}\right) : \frac{1}{2}\right)\right) - 7\frac{3}{20}.$$

Відповіді: 1.4. 3. 1.5. $1\frac{1}{4}$. 1.6. $3\frac{1}{2}$. 1.7. $-3\frac{2}{3}$. 1.8. $13\frac{2}{3}$. 1.9. 1. 1.10. $1\frac{3}{4}$. 1.11. 13. 1.12. 2.
1.13. 2. 1.14. 1. 1.15. 1. 1.16. $\frac{1}{2}$. 1.17. $\frac{1}{4}$.

§2. Відсотки. Основні задачі на відсотки. Складні відсотки

2.1. Визначте відсоток солі в розчині, якщо в 300 г розчину містяться 30 г солі.

Розв'язання:

$$\begin{array}{l} 300\text{г} - 100\% \\ 30\text{г} - x\% \end{array} \Rightarrow \frac{300}{30} = \frac{100}{x} \qquad 300x = 30 \cdot 100$$

$$x = \frac{30 \cdot 100}{300} = \frac{30}{3} = 10\%$$

Відповідь: 10%.

2.2. Журнал коштував 25 грн.. Через два місяці цей самий журнал став коштувати 21 грн. На скільки відсотків знизилася ціна журналу?

Розв'язання:

$$\frac{25 - 21}{25} \cdot 100\% = \frac{4}{25} \cdot 100\% = 16\%$$

Відповідь: 16%.

2.3. На скільки відсотків збільшиться продуктивність праці робітників, якщо час на виконання певної операції скоротити на 20%?

Розв'язання:

x – час виконання операції;

$\frac{1}{x}$ – продуктивність праці.

1. Час на виконання операції після його скорочення на 20%:

$$100\% - 20\% = 80\%;$$

$$80\% = \frac{80}{100} = 0,8;$$

$$0,8x.$$

2. Нова продуктивність праці: $\frac{1}{0,8x} = \frac{10}{8x} = \frac{5}{4x}$.

Отже, продуктивність праці робітників збільшиться на

$$\frac{\frac{5}{4x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot 100\% = \left(\frac{5}{4x} - \frac{1}{x} \right) : \frac{1}{x} \cdot 100\% = \frac{5-4}{4x} \cdot x \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%.$$

Відповідь: 25%.

2.4. На заводі 40% усіх верстатів переведено на підвищені швидкості, внаслідок чого продуктивність праці зросла на 30%. На скільки відсотків збільшилося виробництво заводської продукції?

Розв'язання:

x – загальний обсяг продукції, що випускав завод раніше.

1. Збільшення загального обсягу продукції:

$$40\% = \frac{40}{100} = 0,4;$$

$$30\% = \frac{30}{100} = 0,3;$$

$$x \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 0,12x;$$

$$x + 0,12x = 1,12x$$

2. Збільшення виробництва заводської продукції у відсотках:

$$\frac{1,12x - x}{x} \cdot 100\% = \frac{0,12x}{x} \cdot 100\% = 0,12 \cdot 100\% = 12\%.$$

Відповідь: 12%.

2.5. Розчин містить 4% солі. Скільки грамів солі міститься в 350 г розчину?

2.6. Скільки відсотків години становлять 24 хв.?

2.7. На скільки відсотків збільшиться периметр квадрата, якщо його сторону збільшити на 20%?

- 2.8. Руда містить 8% олова. Скільки кілограмів руди треба взяти, щоб отримати 96 кг олова?
- 2.9. Ціну деякого товару спочатку було підвищено на 10%, а потім знижено на 10%. Як змінилася ціна товару порівняно з початковою?
- 2.10. Швидкість автомобіля зменшилася з 80 км/г до 64 км/г. На скільки відсотків зменшилася його швидкість?
- 2.11. Вартість деякого товару спочатку підвищили на 20%, а потім знизили на 25%. Як змінилася вартість товару порівняно з початковою?
- 2.12. Додатні числа a і b такі, що число a становить 25% від числа b . Скільки відсотків число b становить від числа a ?
- 2.13. Швидкість поїзда на деякій ділянці шляху була збільшена з 84 км/г до 105 км/г. На скільки відсотків зросла швидкість поїзда?
- 2.14. На скільки відсотків збільшиться площа квадрата, якщо його сторону збільшити на 10%?
- 2.15. Ціну на деякий товар підвищили послідовно на 10%, на 20% і на 25%. На скільки відсотків збільшилася ціна порівняно з початковою?
- 2.16. Кавові зерна в процесі підсмажування втрачають 12% своєї маси. Скільки треба взяти свіжих зерен, щоб отримати 13,2 кг смажених?
- 2.17. Вартість товару була підвищена на 25%. На скільки відсотків необхідно зменшити нову вартість товару, щоб одержати початкову вартість товару?
- 2.18. Сплавили 2 кг залізної руди, що містить 40% заліза, і 3 кг залізної руди, що містить 20% заліза. Знайдіть відсотковий вміст заліза в отриманому сплаві.
- 2.19. Вкладник поклав до банку 10000 грн. на депозитний рахунок під певний відсоток річних щорічно. Унаслідок кризових явищ через рік відсоток річних було зменшено на 5%. Наприкінці другого року на рахунку цього вкладника було 12650 грн. Знайдіть початкову відсоткову ставку.
- 2.20. До розчину, який містить 40 г солі, додали 100 г води. Після цього концентрація солі в розчині стала 10%. Скільки грамів води містив початковий розчин?
- 2.21. Є два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 20% цинку, а другий – 10% цинку. Їх сплавили разом і отримали новий сплав масою 400 г, який містить 13% цинку. Скільки грамів першого сплаву було взято?
- 2.22. Є два сплави олова та свинцю. Перший сплав містить 5% олова, а другий – 40% олова. Їх сплавили разом і отримали новий сплав масою 210 г, який містить 30% олова. Скільки грамів першого сплаву було взято?

Відповіді: 2.5. 14 г. 2.6. 40%. 2.7. 20%. 2.8. 1200 кг. 2.9. зменшилася на 1%.
 2.10. 20%.
 2.11. зменшилася на 20%. 2.12. 400%. 2.13. 25%. 2.14. 21%. 2.15. 65%. 2.16. 15 кг.
 2.17. 20%. 2.18. 28%. 2.19. 15%. 2.20. 260 г. 2.21. 120 г.
 2.22. 60 г.

§3. Степінь дійсного числа з цілим показником

Властивості степенів

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.	6. $0^n = 0$.
2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.	7. $1^n = 1$.
3. $(a^n)^m = (a^m)^n = a^{m \cdot n}$.	8. $a^0 = 1$.
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.	9. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.	10. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

3.1. Обчисліть $\left(-3\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

Розв'язання:

$$\left(-3\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$$

Відповідь: $\frac{4}{49}$.

3.2. Обчисліть $\frac{27^{-3} \cdot 3^{-10}}{81^{-5}}$.

Розв'язання:

$$\frac{27^{-3} \cdot 3^{-10}}{81^{-5}} = \frac{81^5}{27^3 \cdot 3^{10}} = \frac{(3^4)^5}{(3^3)^3 \cdot 3^{10}} = \frac{3^{20}}{3^9 \cdot 3^{10}} = \frac{3^{20}}{3^{19}} = 3$$

Відповідь: 3.

3.3. Розташуйте в порядку зростання числа $2^{30}; 3^{20}; 7^{10}$.

Розв'язання:

$$\left. \begin{array}{l} 2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10} \\ 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10} \\ 7^{10} \end{array} \right\} \Rightarrow 7^{10}; 8^{10}; 9^{10} \Rightarrow 7^{10}; 2^{30}; 3^{20}$$

Відповідь: $7^{10}; 2^{30}; 3^{20}$.

3.4. Знайдіть значення виразу $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{4}{3}}}$, якщо $a = 5$.

Розв'язання:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{4}{3}}} = a^{\frac{2}{3} - (-\frac{4}{3})} = a^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2. \quad \text{Якщо } a = 5, \text{ то } a^2 = 5^2 = 25.$$

Відповідь: 25.

3.5. Спростіть вираз $\left(\frac{x^3 \cdot x^4}{x^5}\right)^{-6}$.

Розв'язання:

$$\left(\frac{x^3 \cdot x^4}{x^5}\right)^{-6} = \left(\frac{x^7}{x^5}\right)^{-6} = (x^2)^{-6} = x^{-12}$$

Відповідь: x^{-12} .

3.6. Спростіть вираз $\left(\frac{x^2 \cdot y^{-3}}{6z^2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot y^{-2}}{9z^3}\right)^2$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 \cdot y^{-3}}{6z^2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot y^{-2}}{9z^3}\right)^2 &= \left(\frac{6z^2}{x^2 \cdot y^{-3}}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2}{9y^2 \cdot z^3}\right)^2 = \left(\frac{6z^2 \cdot y^3}{x^2}\right)^3 \cdot \frac{(x^2)^2}{9^2 \cdot (y^2)^2 \cdot (z^3)^2} = \\ &= \frac{6^3 \cdot (y^3)^3 \cdot (z^2)^3}{(x^2)^3} \cdot \frac{x^4}{81y^4 \cdot z^6} = \frac{216y^9 \cdot z^6 \cdot x^4}{x^6 \cdot 81y^4 \cdot z^6} = \frac{8y^5}{3x^2} \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{8y^5}{3x^2}$.

Обчисліть:

3.7. $\frac{3^5 \cdot 5^7}{15^7 \cdot 2^8} \cdot \frac{22^9 \cdot 3^{12}}{11^8 \cdot 9^4}$.

3.13. $\frac{4^7 \cdot 2^{10}}{3 \cdot 2^{15} \cdot 16^2 - 5 \cdot 2^2 \cdot 2^{20}}$.

3.8. $\frac{34^{10}}{2^{11} \cdot 17^9} \cdot \frac{7^6 \cdot 2^7}{14^8}$.

3.14. $\frac{2^{21} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$.

3.9. $\frac{16^3 \cdot 3^{21}}{2^8 \cdot 5^6} \cdot \frac{18^{10}}{2^7 \cdot 5^8}$.

3.15. $\frac{22 \cdot (21 \cdot 7^{30} - 7^{31})}{7^{32} + 4 \cdot 7^{31}}$.

3.10. $\frac{2 \cdot 7^{22} - 13 \cdot 7^{21}}{49^{10}}$.

3.16. $\frac{5 \cdot (2 \cdot 5^{65} + 6 \cdot 5^{64})}{5^{66} + 3 \cdot 5^{65}}$.

$$3.11. \frac{24^4}{2^6 \cdot 3^3} : \frac{20^4}{2^7 \cdot 5^8}.$$

$$3.17. \frac{15 \cdot 3^{13} + 4 \cdot 27^5}{17 \cdot 9^7}.$$

$$3.12. \frac{4 \cdot 3^{32} + 9 \cdot 3^{30}}{9^{16}}.$$

$$3.18. \frac{7 \cdot 2^{78} - 9 \cdot 2^{77}}{16^{19}}.$$

Відповіді: 3.7. 198. 3.8. 833. 3.9. 150. 3.10. 7. 3.11. 60000. 3.12. 5. 3.13. 4.
3.14. 2. 3.15. 4. 3.16. 2. 3.17. 1. 3.18. 10.

§4. Перетворення дробових виразів

Формули скороченого множення

1.	<i>Квадрат суми:</i> $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$	<i>Квадрат суми</i> двох чисел дорівнює квадрату першого числа плюс подвоєний добуток першого числа на друге плюс квадрат другого числа.
2.	<i>Квадрат різниці:</i> $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$	<i>Квадрат різниці</i> двох чисел дорівнює квадрату першого числа мінус подвоєний добуток першого числа на друге плюс квадрат другого числа.
3.	<i>Різниця квадратів:</i> $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$	<i>Різниця квадратів</i> двох чисел дорівнює добутку суми цих чисел на їх різницю.
4.	<i>Сума кубів:</i> $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$	<i>Сума кубів</i> двох чисел дорівнює добутку суми цих чисел на неповний квадрат різниці цих чисел.
5.	<i>Різниця кубів:</i> $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$	<i>Різниця кубів</i> двох чисел дорівнює добутку різниці цих чисел на неповний квадрат суми цих чисел.
6.	<i>Куб суми:</i> $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$	<i>Куб суми</i> двох чисел дорівнює кубу першого числа плюс потроєний добуток квадрата першого числа на друге плюс потроєний добуток першого числа на квадрат другого плюс куб другого числа.
7.	<i>Куб різниці:</i> $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$	<i>Куб різниці</i> двох чисел дорівнює кубу першого числа мінус потроєний добуток квадрата першого числа на друге плюс потроєний добуток першого числа на квадрат другого мінус куб другого числа.

4.1. Спростіть вираз $\left(2 + 3x + \frac{1}{2 - 3x}\right) : \left(1 + \frac{1}{4 - 9x^2}\right).$

Розв'язання:

$$\left(2+3x+\frac{1}{2-3x}\right) : \left(1+\frac{1}{4-9x^2}\right) = \frac{(2+3x)(2-3x)+1}{2-3x} : \frac{4-9x^2+1}{2^2-(3x)^2} =$$
$$= \frac{2^2-(3x)^2+1}{2-3x} \cdot \frac{(2-3x)(2+3x)}{5-9x^2} = \frac{4-9x^2+1}{5-9x^2} \cdot (2+3x) = \frac{5-9x^2}{5-9x^2} \cdot (2+3x) = 2+3x$$

Відповідь: $2+3x$.

4.2. Спростіть вираз $\left(\frac{a^2-ab}{b^2+ab}-ab+a^2\right) \cdot \frac{b}{b-a} + \frac{a}{a+b}$.

Розв'язання:

$$\left(\frac{a^2-ab}{b^2+ab}-ab+a^2\right) \cdot \frac{b}{b-a} + \frac{a}{a+b} = \left(\frac{a(a-b)}{b(b+a)}-a(b-a)\right) \cdot \frac{b}{b-a} + \frac{a}{a+b} =$$
$$= \frac{a(a-b)}{b(a+b)} \cdot \frac{b}{b-a} - \frac{ab(b-a)}{b-a} + \frac{a}{a+b} = -\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} - ab + \frac{a}{a+b} =$$
$$= -\frac{a}{a+b} - ab + \frac{a}{a+b} = -ab$$

Відповідь: $-ab$.

4.3. Знайдіть значення виразу $\frac{m+4}{m^2-6m+9} \cdot \frac{2m-6}{m^2-16} - \frac{2}{m-4}$, якщо $m=3,32$.

Розв'язання:

$$\frac{m+4}{m^2-6m+9} \cdot \frac{2m-6}{m^2-16} - \frac{2}{m-4} = \frac{m+4}{(m-3)^2} \cdot \frac{2(m-3)}{(m-4)(m+4)} - \frac{2}{m-4} = \frac{2}{(m-3)(m-4)} - \frac{2}{m-4} =$$
$$= \frac{2-2(m-3)}{(m-3)(m-4)} = \frac{2-2m+6}{(m-3)(m-4)} = \frac{8-2m}{(m-3)(m-4)} = \frac{-2(m-4)}{(m-3)(m-4)} = -\frac{2}{m-3}$$

Якщо $m=3,32$, то $-\frac{2}{m-3} = -\frac{2}{3,32-3} = -\frac{2}{0,32} = -\frac{200}{32} = -\frac{25}{4} = -6,25$.

Відповідь: $-6,25$.

4.4. Знайдіть значення виразу $\frac{x^2-3}{3x^2} : \frac{x^2-\sqrt{3}x}{6x^3}$, якщо $x=5-\sqrt{3}$.

Розв'язання:

$$\frac{x^2-3}{3x^2} : \frac{x^2-\sqrt{3}x}{6x^3} = \frac{x^2-(\sqrt{3})^2}{3x^2} \cdot \frac{6x^3}{x^2-\sqrt{3}x} = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \cdot 2x}{x(x-\sqrt{3})} = 2(x+\sqrt{3})$$

Якщо $x=5-\sqrt{3}$, то $2(x+\sqrt{3}) = 2(5-\sqrt{3}+\sqrt{3}) = 2 \cdot 5 = 10$.

Відповідь: 10.

Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll}
4.5. \left(9x^2 + 1 + \frac{1}{9x^2 - 1}\right) : \left(9x^2 + \frac{81x^4}{1 - 9x^2}\right). & 4.11. \left(\frac{8a - 8b}{a^3 + b^3} - \frac{a - b}{a^2 - ab + b^2}\right) : \frac{8 - a - b}{a^3 + b^3}. \\
4.6. \left(\frac{x}{8x + 1} + 1\right) \cdot \frac{1 - 64x^2}{81x^2 - 1} - \frac{8x}{1 - 9x}. & 4.12. \left(\frac{9a + c}{a^2 - 9ac} + \frac{9a - c}{a^2 + 9ac}\right) \cdot \frac{a^2 - 81c^2}{a^2 + c^2}. \\
4.7. \left(x - \frac{x^2 - y^2}{x - y}\right) \cdot \left(y + \frac{x^2 - y^2}{x + y}\right). & 4.13. \left(\frac{2xy}{y^2 - 16x^2} - \frac{x}{y - 4x}\right) : \frac{x^2}{y^2 + 4xy}. \\
4.8. \frac{x - 5}{x^2 + 5x} + \frac{x + 5}{x^2 - 5x} - \frac{4x}{x^2 - 25}. & 4.14. \left(4x + 1 - \frac{1}{1 - 4x}\right) : \left(4x - \frac{16x^2}{4x - 1}\right). \\
4.9. \frac{x}{y(x^2 - y^2)} + \frac{y}{x(y^2 - x^2)}. & 4.15. \frac{2x}{x^2 - 1} : \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{1 - x^2}\right). \\
4.10. \frac{x^2 + 2xy}{x^3 - 8y^3} - \frac{4y^2}{8y^3 - x^3}. & 4.16. xy + \frac{xy}{x + y} \cdot \left(\frac{x + y}{x - y} - x - y\right).
\end{array}$$

Відповіді: 4.5. $-9x^2$. 4.6. $\frac{1}{9x - 1}$. 4.7. $-xy$. 4.8. $-\frac{2}{x}$. 4.9. $\frac{1}{xy}$. 4.10. $\frac{1}{x - 2y}$.
4.11. $a - b$. 4.12. $\frac{18}{a}$. 4.13. $\frac{y}{x}$. 4.14. $-4x$. 4.15. $x + 1$. 4.16. $\frac{xy}{x - y}$.

§5. Перетворення ірраціональних виразів Властивості арифметичних коренів

1. $\sqrt[n]{0} = 0$.	7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.
2. $\sqrt[n]{1} = 1$.	8. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$.
3. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.	9. $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.
4. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.	10. $\sqrt{a^2} = a $.
5. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.	11. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = a $.
6. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.	12. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$.

5.1. Знайдіть значення виразу $(\sqrt{2} + 2)^2 - 4\sqrt{2}$.

Розв'язання:

$$(\sqrt{2} + 2)^2 - 4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot 2 + 4 - 4\sqrt{2} = 2 + 4\sqrt{2} + 4 - 4\sqrt{2} = 6$$

Відповідь: 6.

5.2. Знайдіть значення виразу $(\sqrt{11-4\sqrt{6}} + \sqrt{11+4\sqrt{6}})^2$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} (\sqrt{11-4\sqrt{6}} + \sqrt{11+4\sqrt{6}})^2 &= (\sqrt{11-4\sqrt{6}})^2 + 2\sqrt{11-4\sqrt{6}} \cdot \sqrt{11+4\sqrt{6}} + (\sqrt{11+4\sqrt{6}})^2 = \\ &= 11 - 4\sqrt{6} + 2\sqrt{(11-4\sqrt{6})(11+4\sqrt{6})} + 11 + 4\sqrt{6} = 22 + 2\sqrt{11^2 - (4\sqrt{6})^2} = \\ &= 22 + 2\sqrt{121 - 16 \cdot 6} = 22 + 2\sqrt{121 - 96} = 22 + 2\sqrt{25} = 22 + 2 \cdot 5 = 32 \end{aligned}$$

Відповідь: 32.

5.3. Знайдіть значення виразу $\sqrt{125} \cdot \sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}}$.

Розв'язання:

$$\sqrt{125} \cdot \sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5^3} \cdot \sqrt[5]{2^5} - \sqrt{5} = 5\sqrt{5} \cdot 2 - \sqrt{5} = 10\sqrt{5} - \sqrt{5} = 9\sqrt{5}$$

Відповідь: $9\sqrt{5}$.

5.4. Запишіть вираз $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ у вигляді степені з раціональним показником.

Розв'язання:

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2} \cdot a} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$$

Відповідь: $a^{\frac{1}{2}}$.

5.5. Обчисліть $\frac{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{64}}{\sqrt{8}}$.

Розв'язання:

$$\frac{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{64}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2^6}}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{(2^2)^3}}{2\sqrt{2}} = \frac{2^2}{2} = 2$$

Відповідь: 2.

5.6. Обчисліть $\sqrt[3]{\sqrt{17}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17}+5}$.

Розв'язання:

$$\sqrt[3]{\sqrt{17}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17}+5} = \sqrt[3]{(\sqrt{17}-5)(\sqrt{17}+5)} = \sqrt[3]{(\sqrt{17})^2 - 5^2} = \sqrt[3]{17-25} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

Відповідь: -2.

5.7. Знайдіть значення виразу $\frac{2\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1} + \frac{3\sqrt{6}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-1} + \frac{3\sqrt{6}-\sqrt{300}}{\sqrt{3}} &= \frac{(2\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + 3 \cdot \sqrt{\frac{6}{3}} - \sqrt{\frac{300}{3}} = \\ &= \frac{2 \cdot 2 + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 5}{2-1} + 3\sqrt{2} - \sqrt{100} = -1 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 10 = -11 \end{aligned}$$

Відповідь: -11.

Знайдіть значення виразу:

5.8. $(\sqrt{5} - \sqrt{45})^2$.

5.14. $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{2}$.

5.9. $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125}$.

5.15. $5\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{81}$.

5.10. $8\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{64}) + 16$.

5.16. $(\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}})^2$.

5.11. $\sqrt{5}(8\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) - \sqrt{60} - 40$.

5.17. $\sqrt[4]{19-\sqrt{105}} \cdot \sqrt[4]{19+\sqrt{105}}$.

5.12. $3\sqrt{6}(2+\sqrt{6})(1-3\sqrt{6}) + 48\sqrt{6}$.

5.18. $\sqrt[3]{10\sqrt{2}-5\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10\sqrt{2}+5\sqrt{3}}$.

5.13. $\sqrt{3}(\sqrt{48}-\sqrt{27}+2\sqrt{75}+3\sqrt{108})$.

5.19. $(1-\sqrt{6})^2(1+\sqrt{6})^2 - (1-\sqrt{5})^2(1+\sqrt{5})^2$.

Відповіді: 5.8. 20. 5.9. 0. 5.10. 13. 5.11. 0. 5.12. -90. 5.13. 87. 5.14. 3. 5.15. 19. 5.16. 2. 5.17. 4. 5.18. 5. 5.19. 9.

§6. Арифметична прогресія

6.1. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $d=4$ і $S_{30}=2100$.

Розв'язання:

$d=4$; $S_{30}=2100$ – за умовою;

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \Rightarrow S_{30} = \frac{2a_1 + d(30-1)}{2} \cdot 30$$

$$2100 = (2a_1 + 29d) \cdot 15$$

$$2a_1 + 29d = 140$$

$$2a_1 = 140 - 29d$$

$$a_1 = \frac{140 - 29d}{2} = \frac{140 - 29 \cdot 4}{2} = 70 - 29 \cdot 2 = 70 - 58 = 12.$$

Відповідь: $a_1 = 12$.

6.2. Знайдіть суму перших двадцяти непарних натуральних чисел.

Розв'язання:

1; 3; 5; 7; ... – послідовні непарні натуральні числа.

Оскільки послідовні непарні натуральні числа утворюють арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ і $d = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$, то

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \Rightarrow S_{20} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot 20 = (2a_1 + 19d) \cdot 10 = 10 \cdot (2 \cdot 1 + 2 \cdot 19) = \\ = 10 \cdot 40 = 400.$$

Відповідь: 400.

6.3. Перший член арифметичної прогресії (a_n) дорівнює -3 , а різниця дорівнює 4 . Скільки треба взяти перших членів прогресії, що їх сума дорівнювала 150 ?

6.4. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_{10} = 32$ і $d = 4$.

6.5. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = -8$ і $S_{10} = 190$.

6.6. Знайдіть суму перших двадцяти членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_5 = -\frac{4}{5}$ і $a_{11} = -5$.

6.7. a_n – арифметична прогресія: $a_1 = -3$; $d = 1$. Знайдіть a_6 .

6.8. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 6 і менші від 250 .

6.9. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $d = 15$ і $S_{13} = 1326$.

6.10. Знайдіть суму перших п'ятнадцяти членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_8 = 8$.

6.11. Чотири числа розташовані в порядку зростання. Різниця між кожними двома сусідніми числами дорівнює 3 , а сума всіх чотирьох чисел дорівнює 118 . Знайдіть найбільше число.

6.12. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_5 + a_8 = 32$ і $a_4 + a_{12} = 44$.

6.13. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_1 = 6$ і $d = 4$.

6.14. Обчисліть $2007 + 2000 + 1993 + \dots - 1962 - 1969$.

Відповіді: **6.3.** 10. **6.4.** 140. **6.5.** 6. **6.6.** -93 . **6.7.** 2. **6.8.** 5166. **6.9.** 12. **6.10.** 120. **6.11.** 34. **6.12.** -6 . **6.13.** 240. **6.14.** 10811.

§7. Геометрична прогресія

7.1. Визначте знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_6 = -\frac{1}{9}$ і $b_9 = 24$.

Розв'язання:

$$b_6 = -\frac{1}{9}; b_9 = 24 \text{ — за умовою.}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b_6 = b_1 \cdot q^5 \\ b_9 = b_1 \cdot q^8 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b_9}{b_6} = \frac{b_1 \cdot q^8}{b_1 \cdot q^5} \quad q^3 = \frac{b_9}{b_6} \quad q^3 = 24 : \left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$q^3 = -24 \cdot 9 \quad q^3 = -216 \quad q = -6.$$

Відповідь: $q = -6$.

7.2. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -120$ і $b_2 = 24$.

Розв'язання:

$$b_1 = -120; b_2 = 24 \text{ — за умовою.}$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{24}{-120} = -\frac{1}{5}.$$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{-120}{1+\frac{1}{5}} = -120 : \frac{6}{5} = -120 \cdot \frac{5}{6} = -20 \cdot 5 = -100.$$

Відповідь: $S = -100$.

7.3. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 6$ і $b_4 = 162$.

7.4. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n) , яка складається з шести членів, якщо сума трьох перших її членів дорівнює 168, а сума трьох останніх дорівнює 21.

7.5. Знайдіть суму перших трьох членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = \frac{1}{13}$ і $q = \frac{1}{3}$.

7.6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 16$ і $q = \frac{3}{4}$.

7.7. Знайдіть знаменник нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 15$ і $S = 75$.

7.8. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_2 = -90$ і $b_5 = \frac{80}{3}$.

7.9. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_3 = 12$ і $b_4 = -24$.

7.10. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_5 = 112$ і $b_8 = 896$.

7.11. b_n – нескінченна геометрична прогресія: $q = \frac{1}{3}$; $S = 72$. Знайдіть b_2 .

7.12. b_n – геометрична прогресія: $q = 2$; $b_5 = 3$. Знайдіть b_8 .

Відповіді: 7.3. 726. 7.4. 96. 7.5. $\frac{1}{9}$. 7.6. 64. 7.7. $\frac{4}{5}$. 7.8. 81. 7.9. -63. 7.10. 217. 7.11. 16. 7.12. 24.

§8. Лінійні рівняння і рівняння, що приводяться до них

8.1. Розв'яжіть рівняння $2\frac{1}{3}x = -\frac{7}{15}$.

Розв'язання:

$$2\frac{1}{3}x = -\frac{7}{15}, \quad x = -\frac{7}{15} : 2\frac{1}{3}, \quad x = -\frac{7}{15} : \frac{7}{3}, \quad x = -\frac{7}{15} \cdot \frac{3}{7}, \quad x = -\frac{1}{5},$$

Відповідь: $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$.

8.2. Розв'яжіть рівняння $\frac{x-2}{3} + \frac{2x-1}{6} = \frac{x-3}{12} + 1$.

Розв'язання:

$$\frac{x-2}{3} + \frac{2x-1}{6} = \frac{x-3}{12} + 1 \quad | \cdot 12$$

$$4(x-2) + 2(2x-1) = x-3 + 12$$

$$4x - 8 + 4x - 2 - x = -3 + 12$$

$$7x - 10 = 9,$$

$$7x = 19$$

$$x = \frac{19}{7}$$

$$x = 2\frac{5}{7}$$

Відповідь: $\left\{2\frac{5}{7}\right\}$.

Розв'яжіть рівняння:

8.3. $\frac{x-3}{9} - \frac{x+4}{4} = \frac{x-8}{6}$.

8.9. $\frac{x-1}{3} + 2 = \frac{x-1}{6} + \frac{1}{2}$.

8.4. $48 : \left(3\frac{4}{5}x - 25\right) = 1\frac{1}{2}$.

8.10. $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{8} - x = 2$.

$$8.5. \quad 5\frac{1}{3} - 4\frac{2}{9}x = \frac{1}{9} \cdot (x-3).$$

$$8.11. \quad \frac{x-2}{6} + \frac{x+1}{15} = 3 - \frac{3-x}{12}.$$

$$8.6. \quad \frac{7x-2}{20} = \frac{4x+1}{5} - \frac{3x-6}{4}.$$

$$8.12. \quad \frac{x+1}{6} + \frac{2-x}{8} = \frac{1}{4} + \frac{x-3}{12}.$$

$$8.7. \quad \left(x + 4\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{7} = \frac{9}{14}x - \frac{1}{16}.$$

$$8.13. \quad \frac{2x-1}{18} - \frac{2-3x}{24} + \frac{4-5x}{36} + \frac{1}{6} = 0.$$

$$8.8. \quad \frac{2x-1}{8} + \frac{3x-2}{4} - \frac{2x-3}{2} = \frac{7}{8}.$$

$$8.14. \quad \frac{4(x-2)}{3} + \frac{3x+1}{8} = \frac{3(6x-5)}{5} - 9.$$

Відповіді: 8.3. 0. 8.4. 15. 8.5. $1\frac{4}{13}$. 8.6. 6. 8.7. $1\frac{11}{24}$. 8.8. $x \in R$. 8.9. -8.
8.10. $-3\frac{1}{2}$. 8.11. $20\frac{1}{9}$. 8.12. 10. 8.13. $-1\frac{3}{7}$. 8.14. 5.

§9. Квадратні рівняння і рівняння, що приводяться до них. Теорема Вієта

9.1. Розв'яжіть рівняння $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Розв'язання:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Відповідь: $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$.

9.2. Знайдіть значення виразу $\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2}$, якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $x^2 - (\sqrt{5} + 1)x + 3 + \sqrt{5} = 0$.

Розв'язання:

$$x^2 - (\sqrt{5} + 1)x + 3 + \sqrt{5} = 0$$

За теоремою Вієта маємо:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{5} + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Отже,
$$\frac{x_1 x_2}{(x_1 + x_2)^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{(\sqrt{5} + 1)^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5} + 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2(3 + \sqrt{5})} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Розв'яжіть рівняння:

9.3. $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$.

9.9. $(2x-5)(x+3) = x(x-5) + 1$.

9.4. $(2x+1)(x-7) = (3x-1)^2 - 50$.

9.10. $(2x+3)^2 = (x+1)(x-10) + 43$.

9.5. $2x(x+8) - (2x-7)(2x+7) = 73$.

9.11. $(2x-9)(x-4) - (x+6)(x-11) = 37$.

9.6. $(x+4)(2x-3) - (5x-6)(x-3) = 10$.

9.12. $(2x-8)(3x+1) = (4x-12)(x-2) + 8$.

9.7. $\frac{x^2-x}{6} + x + 1 = \frac{2x+9}{3}$.

9.13. $\frac{x^2+3x}{8} = \frac{x-1}{4} + \frac{3-2x}{2}$.

9.8. $\frac{3x^2-2}{12} - \frac{5x-3}{18} - \frac{2-x}{3} = -\frac{13}{36}$.

9.14. $\frac{2x^2-1}{8} + \frac{4x-3}{12} - \frac{5-8x}{16} = \frac{19}{48}$.

Відповіді: 9.3. $\sqrt{2}; 2\sqrt{2}$. 9.4. $-3; 2$. 9.5. $2; 6$. 9.6. $2; 6\frac{2}{3}$. 9.7. $-4; 3$. 9.8. $-1\frac{2}{9}; 1$. 9.9. $-8; 2$. 9.10. $-8; 1$. 9.11. $x \in \emptyset$. 9.12. $-4; 5$. 8.13. $-10; 1$. 8.14. $-4\frac{1}{3}; 1$.

§10. Раціональні рівняння вищих степенів

10.1. Розв'яжіть рівняння $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Розв'язання:

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\underline{x^3 - x} - \underline{2x + 2} = 0$$

$$(x^3 - x) + (-2x + 2) = 0$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x(x+1) - 2) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$.

Отже, $\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$.

Відповідь: $\{-2; 1\}$.

10.2. Розв'яжіть рівняння $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$.

Розв'язання:

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$

$$x^2 + x = t \Rightarrow t^2 = (x^2 + x)^2$$

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 8 \\ t_1 t_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 6 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x^2 + x = 2 \\ x^2 + x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

1) $x^2 + x - 2 = 0$

За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$.

2) $x^2 + x - 6 = 0$

За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$.

Отже, $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$.

Відповідь: $\{-3; -2; 1; 2\}$.

Розв'яжіть рівняння:

10.3. $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

10.9. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

10.4. $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

10.10. $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

10.5. $18x^3 - 9x^2 - 2x + 1 = 0$.

10.11. $x^7 - x^6 - 12x^5 = 0$.

10.6. $(x-1)^6 - 28 \cdot (x-1)^3 + 27 = 0$.

10.12. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

$$10.7. (1-x)^3 - (3x+2)^3 + 64x^3 + 1 = 0.$$

$$10.13. x^6 - 12x^5 + 32x^4 = 0.$$

$$10.8. (5x+1)^3 - (x+6)^3 - 64x^3 + 125 = 0.$$

$$10.14. (x+2)^8 - 82 \cdot (x+2)^4 + 81 = 0.$$

Відповіді: 10.3. $\pm\sqrt{2}$; ± 2 . 10.4. ± 1 ; ± 2 . 10.5. $\pm \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$. 10.6. 2; 4. 10.7. $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{4}$; 2.
 10.8. $-1\frac{1}{5}$; -1 ; $1\frac{1}{4}$. 10.9. 1; 2. 10.10. $\pm\sqrt{5}$. 10.11. -3 ; 0 ; 4 . 10.12. ± 1 ; ± 5 .
 10.13. 0 ; 4 ; 8 . 10.14. -5 ; -3 ; -1 ; 1 .

§11. Дробові раціональні рівняння

11.1. Розв'яжіть рівняння $\frac{3x-2}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{15x-3}{x^2-9}$.

Розв'язання:

$$\frac{3x-2}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{15x-3}{x^2-9}$$

ОДЗ: $x \neq \pm 3$.

$$\frac{(3x-2)(x+3) - (x-4)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{15x-3}{(x-3)(x+3)}$$

$$(3x-2)(x+3) - (x-4)(x-3) = 15x-3$$

$$3x^2 + 9x - 2x - 6 - (x^2 - 3x - 4x + 12) - 15x - 3 = 0$$

$$3x^2 + 7x - 6 - x^2 + 3x + 4x - 12 - 15x - 3 = 0$$

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 1 + 120 = 121$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{1 + 11}{4} = 3 - \text{сторонній корінь};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \frac{1 - 11}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\left\{-2\frac{1}{2}\right\}$.

11.2. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{5x}{x+1} + 6 = 0$.

Розв'язання:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{5x}{x+1} + 6 = 0$$

ОДЗ: $x \neq -1$.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x}{x+1} + 6 = 0$$

Робимо заміну: $\frac{x}{x+1} = t$. $t^2 - 5t + 6 = 0$

За теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} t_1 + t_2 = -5 \\ t_1 \cdot t_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{x}{x+1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(x+1) \\ x = 3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x+2 \\ x = 3x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2x=2 \\ x-3x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=2 \\ -2x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1\frac{1}{2} \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{-2; -1\frac{1}{2}\right\}$.

Розв'яжіть рівняння:

11.3. $\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5$.

11.9. $\frac{2x-5}{3x+1} + \frac{21x+7}{2x-5} = 8$.

11.4. $\frac{10}{x^2+5x} - \frac{40}{x^2-5x} = \frac{1}{x}$.

11.10. $x^2 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{52}{9}$.

11.5. $\frac{22-4x}{(x-1)(x-3)} + 3 = \frac{5}{x-3}$.

11.11. $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+5}{x^2-1}$.

11.6. $\frac{5}{x+1} + \frac{4x-6}{(x+1)(x+3)} = 3$.

11.12. $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{2x+8}{x^2-4}$.

11.7. $9\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 14$.

11.13. $\frac{1-x}{(2-x)(x+3)} + 1 = \frac{1}{2-x}$.

11.8. $\frac{4}{x^2-10x+25} - \frac{10}{x^2-25} = \frac{1}{x+5}$.

11.14. $\frac{1}{x+3} + \frac{x+4}{(x+3)(x+2)} + 1 = 0$.

Відповіді: **11.3.** $-1; \frac{1}{2}$. **11.4.** -15 . **11.5.** 4 . **11.6.** 0 . **11.7.** $\frac{1}{2}; 1; 2$. **11.8.** 9 . **11.9.** $-6; -\frac{12}{19}$. **11.10.** $\frac{1}{3}; 3; \frac{-7 \pm \sqrt{13}}{6}$. **11.11.** -3 . **11.12.** -1 . **11.13.** $-4; 1$. **11.14.** -4 .

§12. Алгебраїчні рівняння з модулем

12.1. Розв'яжіть рівняння $|2x-1|=5$.

Розв'язання:

$$|2x-1|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=5 \\ -(2x-1)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ 2x-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

Відповідь: $\{-2; 3\}$.

12.2. Розв'яжіть рівняння $|x+1| = 2x-1$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned}
 |x+1| = 2x-1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+1 = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ x-2x = -1-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ -(x+1) = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ -x-1 = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -x-2x = 1-1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases} \\
 &\text{Відповідь: } \{2\}.
 \end{aligned}$$

Розв'яжіть рівняння:

12.3. $|2x+3| = 1$.

12.9. $||x|-1| = 5$.

12.4. $|12-x^2| = 4$.

12.10 $||x|-4| = 2$.

12.5. $|1-x| = 2x-5$.

12.11. $|x+17| = |x+5|$.

12.6. $|2x-3| = 5x-4$.

12.12. $|3x-5| = |5-2x|$.

12.7. $2x^2 + |x|-1 = 0$.

12.13. $|2x+5|-3|1-x| = 2$.

12.8. $x^2 - 4|x| + 3 = 0$.

12.14. $|x+3| + |x+5| = 3x-4$.

Відповіді: **12.3.** $-2; -1$. **12.4.** $\pm 2\sqrt{2}; \pm 4$. **12.5.** 4 . **12.6.** 1 . **12.7.** $\pm \frac{1}{2}$. **12.8.** $\pm 1; \pm 3$.
12.9. ± 6 . **12.10.** $\pm 2; \pm 6$. **12.11.** -11 . **12.12.** $0; 2$. **12.13.** $0; 6$. **12.14.** 12 .

§13. Ірраціональні рівняння

13.1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+11} = 1-x$.

Розв'язання:

$$\sqrt{x+11} = 1-x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+11 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11 \\ -x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-11; 1].$$

$$(\sqrt{x+11})^2 = (1-x)^2$$

$$x+11 = 1-2x+x^2$$

$$1-2x+x^2-x-11=0$$

$$x^2-3x-10=0$$

$$\text{За теоремою Вієта маємо: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases} - \text{ не належить ОДЗ}$$

Відповідь: $\{-2\}$.

13.2. Розв'яжіть рівняння $(x^2-1)\sqrt{2x+1}=0$.

Розв'язання:

$$(x^2-1)\sqrt{2x+1}=0$$

$$\text{ОДЗ: } 2x+1 \geq 0$$

$$2x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$(x^2-1)\sqrt{2x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ \sqrt{2x+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ 2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 1 \\ 2x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \\ x_3=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$x_2 = -1$ – сторонній корінь.

$$\text{Відповідь: } \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}.$$

Розв'яжіть рівняння:

13.3. $\sqrt{35-5x}=9-2x$.

13.9. $\sqrt{13-2x}=5-x$.

13.4. $\sqrt{x+4}+x-2=0$.

13.10. $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$.

13.5. $(x^2-9)\sqrt{x+2}=0$.

13.11. $\sqrt[3]{5x-3}-\sqrt[3]{5x-22}=1$.

13.6. $\sqrt{6x+3}-\sqrt{5-x}=1$.

13.12. $(x^2-3x-4)\sqrt{x-3}=0$.

13.7. $(x^2+x-2)\sqrt{x+1}=0$.

13.13. $\sqrt{15+5x}-\sqrt{19-5x}=2$.

13.8. $\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{27-4x}=2$.

13.14. $x^2+12x+\sqrt{x^2+12x+4}=52$.

Відповіді: **13.3.** 2. **13.4.** 0. **13.5.** -2; 3. **13.6.** 1. **13.7.** ± 1 . **13.8.** 0; 7. **13.9.** 2. **13.10.** 3. **13.11.** -1; 6. **13.12.** 3; 4. **13.13.** 2. **13.14.** -15; 3.

§14. Алгебраїчні системи рівнянь

14.1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y-x=3 \\ x-2y=2 \end{cases}$.

Розв'язання:

$$\begin{cases} y-x=3 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x+x-2y=3+2 \\ y-x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y=5 \\ y-x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5 \\ -5-x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=8 \\ y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-5 \end{cases}$$

Відповідь: $\{(-8; -5)\}$.

14.2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45 \\ x+y=5 \end{cases}$.

Розв'язання:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-y)(x+y)=45 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 \cdot 5=45 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=9 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\pm 3 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x=8 \\ -2y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x=2 \\ -2y=-8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1=4 \\ y_1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=4 \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь: $\{(4; 1); (1; 4)\}$.

Розв'яжіть систему рівнянь:

14.3. $\begin{cases} \frac{3x-2y}{3} - \frac{4x+5}{4} = \frac{1-6x}{12} \\ \frac{6x-5y}{2} + \frac{2x+y}{5} = x + \frac{5}{2}y \end{cases}$.

14.9. $\begin{cases} \frac{7x-1}{4} - \frac{2x+3}{3} = \frac{3x-5y}{2} \\ \frac{5x-3y}{3} + \frac{x+5y}{2} = 3x-y \end{cases}$.

14.4. $\begin{cases} x^2+12xy+36y^2=64 \\ x-6y=6 \end{cases}$.

14.10. $\begin{cases} 2x^2-4xy+y^2=1 \\ 3x^2-6xy-y^2=-1 \end{cases}$.

14.5. $\begin{cases} x^2+2xy=60 \\ x-y=4 \end{cases}$.

14.11. $\begin{cases} x^2+y^2=50 \\ x+y=6 \end{cases}$.

14.6. $\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x+y=8 \end{cases}$.

14.12. $\begin{cases} x^2-3y^2=24 \\ x+y=8 \end{cases}$.

14.7. $\begin{cases} 4x-y=3 \\ 2x^2+y^2=3 \end{cases}$.

14.13. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x^2-y^2=11 \end{cases}$.

$$14.8. \begin{cases} y^2 - xy = 12 \\ 3y - x = 10 \end{cases}$$

$$14.14. \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2y^2 + xy = 14 \end{cases}$$

Відповіді: 14.3. (8; 4). 14.4. $(7; \frac{1}{6}); (-1; -1\frac{1}{6})$. 14.5. (6; 2); $(-3\frac{1}{3}; -7\frac{1}{3})$. 14.6. (5; 3).
 14.7. (1; 1); $(\frac{1}{3}; -1\frac{2}{3})$. 14.8. (-4; 2); (-1; 3). 14.9. (3; 1).
 14.10. (0; 1); (0; -1); (2; 1); (-2; -1). 14.11. (-1; 7); (7; -1).
 14.12. (18; -10); (6; 2). 14.13. (2; 1); (18; -31). 14.14. (3; 2).

§15. Алгебраїчні системи нерівностей

15.1. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2x - 1 < 3 \\ 3x + 2 \geq -7 \end{cases}$

Розв'язання:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3 \\ 3x + 2 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 4 \\ 3x \geq -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 2)$$

Відповідь: $x \in [-3; 2)$.

15.2. Розв'яжіть подвійне рівняння $-6 \leq \frac{6-4x}{3} \leq 2$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} -6 \leq \frac{6-4x}{3} \leq 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6-4x}{3} \geq -6 \\ \frac{6-4x}{3} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-4x \geq -18 \\ 6-4x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x \geq -18-6 \\ -4x \leq 6-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x \geq -24 \\ -4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 6] \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in [0; 6]$.

Розв'яжіть системи нерівностей:

$$15.3. \begin{cases} \frac{x-4}{8} + \frac{x+3}{6} < 7 \\ (x-3)^2 < (x+3)(x-2) + 1 \end{cases}$$

$$15.6. \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \geq \frac{x-3}{4} \\ 4x+3 \geq 6x-7 \end{cases}$$

$$15.4. \begin{cases} (x+1)(x^2-x+1)-x(x^2+4) \geq 9 \\ \frac{x-3}{5} < \frac{x+5}{3} \end{cases} .$$

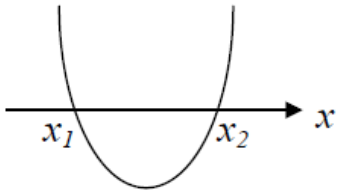
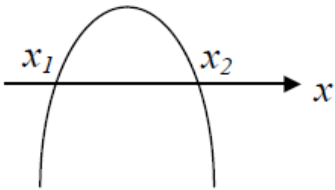
$$15.7. \begin{cases} \frac{2x-3}{2} - \frac{3x-5}{4} \leq \frac{2x+1}{6} \\ 5x+4 \leq 2x+10 \end{cases} .$$

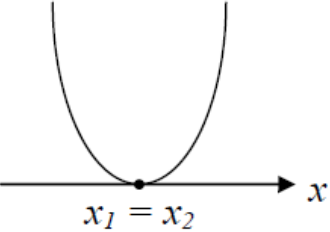
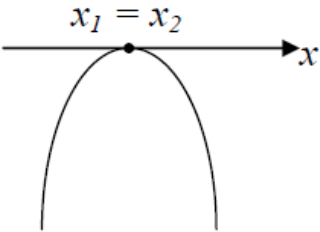
$$15.5. \begin{cases} (x+1)(x-3)-(x-4)(x+4) > 3 \\ \frac{2x-5}{3} \geq -3 \end{cases} .$$

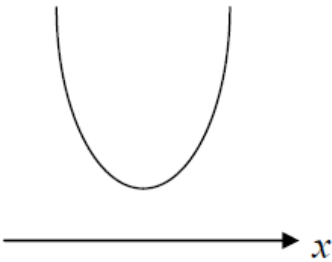
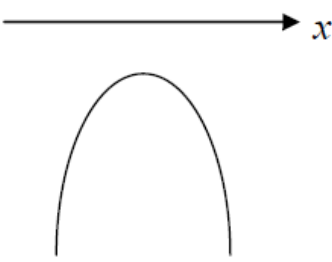
$$15.8. \begin{cases} (x+2)(x-4)-(x-5)(x+5) > 11 \\ \frac{3x-4}{5} \geq -2 \end{cases} .$$

Відповіді: 15.3. $x \in (2; 24)$. 15.4. $x \in (-17; -2]$. 15.5. $x \in [-2; 5)$. 15.6. $x \in [-1; 5]$.
15.7. $x \in [-5; 2]$. 15.8. $x \in [-2; 3)$.

§16. Нерівності другого степеня

$ax^2 + bx + c \leq 0$ при $D > 0$	
$a > 0$	$a < 0$
	
$ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$ $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x \in [x_1; x_2]$ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in (x_1; x_2)$	$ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x \in [x_1; x_2]$ $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in (x_1; x_2)$ $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

$ax^2 + bx + c \leq 0$ при $D=0$	
$a > 0$	$a < 0$
 <p> $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x \in R$ $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$ $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x = x_0$ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$ </p>	 <p> $ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow x = x_0$ $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in \emptyset$ $ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow x \in R$ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$ </p>

$ax^2 + bx + c \leq 0$ при $D < 0$	
$a > 0$	$a < 0$
 <p> $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in R$ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$ </p>	 <p> $ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in \emptyset$ $ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in R$ </p>

Розв'яжіть нерівність:

16.1. $(x-1)^2 < 16$.

16.7. $x^2 - x + 6 < 0$.

16.2. $(2x+1)^2 \geq 25$.

16.8. $x^2 + x + 12 > 0$.

16.3. $3x^2 + x - 2 \geq 0$.

16.9. $(x+3)(5-x) < 0$.

16.4. $2x^2 + 7x + 3 \leq 0$.

16.10. $(x-2)(4-x) > 0$.

16.5. $-x^2 - x + 20 \geq 0$.

16.11. $(2x-3)(x+1) \geq x^2 + 9$.

16.6. $(3x-4)(x-6) - (x+5)^2 \leq -79$.

16.12. $(3x-2)(x+3) \geq 2x^2 + 12$.

Відповіді: **16.1.** $x \in (-3; 5)$. **16.2.** $x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$. **16.3.** $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.
16.4. $x \in \left[-3; -\frac{1}{2}\right]$. **16.5.** $x \in [-5; 4]$. **16.6.** $x \in [3; 13]$. **16.7.** $x \in \emptyset$. **16.8.** $x \in \mathbb{R}$.
16.9. $x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$. **16.10.** $x \in (2; 4)$. **16.11.** $x \in (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$.
16.12. $x \in (-\infty; -9] \cup [2; +\infty)$.

§17. Раціональні нерівності

Розв'яжіть нерівність:

17.1. $x(x^2 - 4) \geq 0$.

17.7. $x^2(x+1)^3 > 0$.

17.2. $x(x+1)^7(x+3)^3 \leq 0$.

17.8. $x^4(x+6)^5(x-9)^3 \geq 0$.

17.3. $(x-1)(x+3)(x-4) < 0$.

17.9. $(x-5)(x+1)(6-x) > 0$.

17.4. $(x-3)(x+5)(4-x) \leq 0$.

17.10. $(x-1)^2(x+3)^6(x-5)^9 \geq 0$.

17.5. $(x+4)^5(x-1)^4(x-2)^7 < 0$.

17.11. $(x+5)^7(x-1)^4(x+3)^2(7-x)^3 \leq 0$.

17.6. $(x+4)(x+1)(x-1)(x-2) > 0$.

17.12. $(6-x)^5(7+x)^2(3-x)^4(x+8)^6 \leq 0$.

Відповіді: **17.1.** $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty)$. **17.2.** $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; 0]$. **17.3.** $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 4)$.
17.4. $x \in [-5; 3] \cup [4; +\infty)$. **17.5.** $x \in (-4; 1) \cup (1; 2)$.
17.6. $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$. **17.7.** $x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.
17.8. $x \in (-\infty; -6] \cup \{0\} \cup [9; +\infty)$. **17.9.** $x \in (-\infty; -1) \cup (5; 6)$.
17.10. $x \in \{-3\} \cup \{1\} \cup [5; +\infty)$. **17.11.** $x \in (-\infty; -5] \cup \{-3\} \cup \{1\} \cup [7; +\infty)$.
17.12. $x \in \{-8\} \cup \{-7\} \cup \{3\} \cup [6; +\infty)$.

17.13. $(x-2)^4 - 13(x-2)^2 + 36 \leq 0$.

17.19. $(x^2 - 7x + 12)^2 - 6(x^2 - 7x + 13) + 6 \leq 0$.

17.14. $\frac{4}{(x-1)^2} \geq 1$.

17.20. $\frac{3x}{x-1} > 2$.

17.15. $\frac{(x-1)(3-x)}{x(x-4)} \geq 0$.

17.21. $\frac{3x}{x^2+2} \geq 1$.

$$17.16. \frac{x^2(x+3)^5}{(x-1)(x-2)^4} \geq 0.$$

$$17.22. \frac{x^2 - 5x + 6}{1-x} < 0.$$

$$17.17. \frac{x(x+2)^5}{(x-1)^3(x-3)^6} \leq 0.$$

$$17.23. \frac{x(x-3)^4(x-2)^3}{(x+1)^2(x+5)^7} > 0.$$

$$17.18. \frac{(x+1)(x+3)(x-4)}{(x+5)(x-2)(x-6)} > 0.$$

$$17.24. \frac{5x^2(x-2)^8(x-4)^5}{(x+2)^3} < 0.$$

Відповіді: 17.13. $x \in [-1; 0] \cup [4; 5]$. 17.14. $x \in [-1; 1) \cup (1; 3]$. 17.15. $x \in (0; 1] \cup [3; 4)$.
 17.16. $x \in (-\infty; -3] \cup \{0\} \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$. 17.17. $x \in (-\infty; -2] \cup [0; 1)$.
 17.18. $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; -1) \cup (2; 4) \cup (6; +\infty)$. 17.19. $x \in [1; 3] \cup [4; 6]$.
 17.20. $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. 17.21. $x \in [1; 2]$. 17.22. $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$.
 17.23. $x \in (-5; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$ 17.24 $x \in (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 4)$.

**ТРЕНУВАЛЬНИЙ ТЕСТ
 ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ
 З МАТЕМАТИКИ
 ЗА СПЕЦИФІКАЦІЄЮ 2012р.**

ЗАВДАННЯ З ВИБОРОМ ОДНІЄЇ ПРАВИЛЬНОЇ ВІДПОВІДІ

Завдання 1-25 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише *один правильний*. Правильно виконане завдання оцінюється **1 балом**.

1. Обчисліть $\lg \sqrt[5]{2,5} \cdot \log_{2,5} 10$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

Правильна відповідь: **Б**.

Розв'язання:

$$\lg \sqrt[5]{2,5} \cdot \log_{2,5} 10 = \lg (2,5)^{\frac{1}{5}} \cdot \log_{2,5} 10 = \frac{1}{5} \lg 2,5 \cdot \log_{2,5} 10 = \boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\log_{2,5} 10} \cdot \log_{2,5} 10 = \frac{1}{5}$$

Відповідь: $\frac{1}{5}$.

2. Розв'яжіть рівняння $2\frac{1}{3}x = -\frac{7}{15}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 5$	$x = \frac{2}{5}$	$x = \frac{1}{5}$	$x = -\frac{1}{5}$	$x = -5$

Правильна відповідь: Г.

Розв'язання:

$$2\frac{1}{3}x = -\frac{7}{15}, \quad x = -\frac{7}{15} : 2\frac{1}{3}, \quad x = -\frac{7}{15} : \frac{7}{3}, \quad x = -\frac{7}{15} \cdot \frac{3}{7}, \quad x = -\frac{1}{5}$$

Відповідь: $x = -\frac{1}{5}$.

3. Діагональ куба дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть ребро цього куба.

А	Б	В	Г	Д
3 см	$\sqrt{3}$ см	$\sqrt{2}$ см	2 см	1 см

Правильна відповідь: А.

4. Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, діагональ якого дорівнює 10 см. Знайдіть радіус основи циліндра, якщо його висота дорівнює 8 см.

А	Б	В	Г	Д
2 см	6 см	12 см	3 см	1 см

Правильна відповідь: Г.

5. Укажіть лінійну функцію, графік якої паралельний вісі абсцис і проходить через точку $A(-2; 3)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{3}{2}x$	$y = -2$	$x = -2$	$x = 3$	$y = 3$

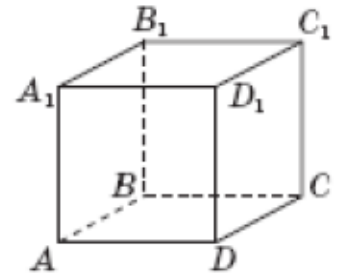
Правильна відповідь: Д.

6. Абонент забув дві останні цифри телефону, який мав набрати, але пам'ятав, що вони різні й парні. Знайдіть імовірність того, що номер буде набраний правильно з першої спроби.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

Правильна відповідь: В.

7. На рисунку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажіть серед поданих нижче пряму, що утворює з CD_1 пару мимобіжних прямих.



А	Б	В	Г	Д
A_1B	C_1D	CB_1	AB	CD

Правильна відповідь: Г.

8. Обчисліть $\frac{5 \cdot 81^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{27}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	45	15	3	5

Правильна відповідь: Д.

Розв'язання:

$$\frac{5 \cdot 81^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5 \sqrt[4]{81}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{5 \sqrt[4]{3^4}}{3} = \frac{5 \cdot 3}{3} = 5$$

Відповідь: 5.

9. Градусна міра кута ANB , вписаного в коло, дорівнює 38° . Знайдіть центральний кут, що спирається на дугу AB .

А	Б	В	Г	Д
19°	38°	76°	90°	60°

Правильна відповідь: В.

10. Функція $y = f(x)$ є спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$f(1) > f(-1)$	$f(1) < f(8)$	$f(1) > f(0)$	$f(-1) < f(0)$	$f(1) > f(10)$

Правильна відповідь: Д.

11. Доберіть таке закінчення речення, щоб утворилося правильне твердження: «Сума квадратів катетів прямокутного трикутника дорівнює ...».

А	Б	В	Г	Д
<i>гіпотенузі</i>	<i>квадрату суми катів</i>	<i>квадрату гіпотенузи</i>	<i>добутку катетів</i>	<i>подвійному добутку катетів</i>

Правильна відповідь: В.

12. На скільки відсотків збільшиться реальна зарплатня, якщо ціни на усі продовольчі та промислові товари зменшити на 20%?

А	Б	В	Г	Д
10%	20%	25%	30%	40%

Правильна відповідь: **В**.

Розв'язання:

x – початкова ціна товарів; $\frac{1}{x}$ – реальна заробітна плата.

1. Нова ціна товарів: $100\% - 20\% = 80\%$;

$$80\% = \frac{80}{100} = 0,8 ; \quad 0,8x .$$

2. Реальна заробітна плата: $\frac{1}{0,8x} = \frac{10}{8x} = \frac{5}{4x}$.

Отже, реальна заробітна плата збільшиться на

$$\frac{\frac{5}{4x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot 100\% = \left(\frac{5}{4x} - \frac{1}{x} \right) : \frac{1}{x} \cdot 100\% = \frac{5-4}{4x} \cdot x \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\% .$$

Відповідь: 25%.

13. Відрізок, довжина якого a , розділений на три рівні частини. Визначте, яку частину даного відрізка становить відстань між серединами першої і другої утворених частин.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$

Правильна відповідь: **А**.

14. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута правильного десятикутника.

А	Б	В	Г	Д
18°	36°	72°	144°	162°

Правильна відповідь: **Г**.

Розв'язання:

$\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ – градусна міра внутрішнього кута правильного n -кутника.

Якщо $n=10$ (правильний десятикутник), то $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = \frac{10-2}{10} \cdot 180^\circ = 8 \cdot 18^\circ = 144^\circ$.

Відповідь: 144° .

15. Об'єм кулі дорівнює $36\pi \text{ см}^3$. Знайдіть її діаметр.

А	Б	В	Г	Д
3 см	24 см	6 см	18 см	12 см

Правильна відповідь: **В**.

Розв'язання:

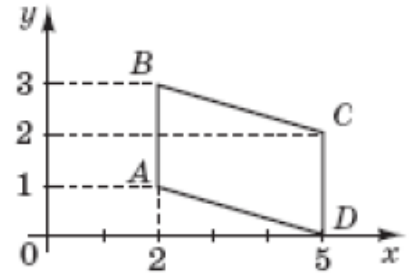
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ или } V = 36\pi \text{ см}^3 \text{ – за умовою.}$$

$$\text{Значить, } \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \quad 4R^3 = 108 \quad R^3 = 27 \quad R = 3 \text{ см.}$$

$$d = 2R = 2 \cdot 3 = 6 \text{ (см).}$$

Відповідь: $d = 6 \text{ см}$.

16. Обчисліть площу чотирикутника $ABCD$ (див. рисунок), сторони AB і CD якого паралельні вісі Oy .



А	Б	В	Г	Д
10	5	3	6	7

Правильна відповідь: **Г**.

17. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}(2x-6) > \log_{0,5} 2$.

А	Б	В	Г	Д
$x \in (3; 4)$	$x \in (0; 4)$	$x \in (-\infty; 4)$	$x \in (4; +\infty)$	$x \in (3; +\infty)$

Правильна відповідь: **А**.

Розв'язання:

$$\log_{0,5}(2x-6) > \log_{0,5} 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6 > 0 \\ 2x-6 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 6 \\ 2x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow x \in (3; 4)$$

Відповідь: $x \in (3; 4)$.

18. Визначте знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_6 = -\frac{1}{9}$ і $b_9 = 24$.

А	Б	В	Г	Д
12	-12	3	6	-6

Правильна відповідь: **Д**.

Розв'язання:

$$b_6 = -\frac{1}{9}; b_9 = 24 \text{ – за умовою.}$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b_6 = b_1 \cdot q^5 \\ b_9 = b_1 \cdot q^8 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{b_9}{b_6} = \frac{b_1 \cdot q^8}{b_1 \cdot q^5}, \quad q^3 = \frac{b_9}{b_6}, \quad q^3 = 24 : \left(-\frac{1}{9}\right),$$

$$q^3 = -24 \cdot 9, \quad q^3 = -216, \quad q = -6.$$

Відповідь: $q = -6$.

19. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $5^{x+3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; -2]$	$(-2; -1]$	$(-1; 0]$	$(0; 1]$	$(1; 3]$

Правильна відповідь: В.

Розв'язання:

$$5^{x+3} = \left(\frac{1}{125}\right)^x \Rightarrow 5^{x+3} = (5^{-3})^x, \quad 5^{x+3} = 5^{-3x}, \quad x+3 = -3x, \quad 4x = -3,$$

$$x = -\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} \in (-1; 0]$$

Відповідь: $(-1; 0]$.

20. Визначте відсоток солі в розчині, якщо в 300 г розчину містяться 30 г солі.

А	Б	В	Г	Д
20%	2%	5%	10%	15%

Правильна відповідь: Г.

Розв'язання:

$$\frac{300 \text{ г} - 100\%}{30 \text{ г} - x\%} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 100}{300} = \frac{30}{3} = 10\%$$

Відповідь: 10%.

ЗАВДАННЯ НА ВСТАНОВЛЕННЯ ВІДПОВІДНОСТІ

Завдання 26-28 передбачають установлення відповідності. За кожною правильно позначеною логічною парою можна отримати 1 бал. Максимальна кількість балів за повністю правильно виконане завдання становить 4 бали.

21. Установіть відповідність між функціями (1-4) і властивостями, які мають ці функції (А-Д).

- | | |
|-------------------|--|
| 1 $y = \sin x$ | А Функція є зростаючою на всій своїй області визначення. |
| 2 $y = \cos x$ | Б Функція є парною. |
| 3 $y = \arcsin x$ | В Функція є ні парною, ні непарною. |
| 4 $y = \arccos x$ | Г Графік функції проходить через точку $(0; \pi)$. |

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2		×			
3	×				
4			×		

Д Графік функції проходить через точку $(\pi; 0)$.

22. Установіть відповідність між заданими фігурами (1-4) та кількістю їх граней (А-Д).

- | | |
|-------------------------|-----|
| 1 Куб. | А 3 |
| 2 П'ятикутна призма . | Б 4 |
| 3 Трикутна піраміда. | В 5 |
| 4 Чотирикутна піраміда. | Г 6 |
| | Д 7 |

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2					×
3		×			
4			×		

23. Установіть відповідність між задачами (1-4) та їх розв'язками (А-Д).

- | Задача | Розв'язок |
|--|-----------|
| 1 Скільки відсотків становить 2 від 8? | А 20% |
| 2 На скільки відсотків 20 більше від 10? | Б 25% |
| 3 На скільки відсотків 15 менше за 30? | В 10% |
| 4 Скільки відсотків становить 40, якщо 8 становить 4%? | Г 50% |
| | Д 100% |

	А	Б	В	Г	Д
1		×			
2					×
3				×	
4	×				

24. Установіть відповідність між нерівностями (1-4) і множинами їх розв'язків (А-Д).

- | | |
|----------------|------------------------|
| 1 $\sin x < 2$ | А $x \in (2; +\infty)$ |
| 2 $\cos x > 2$ | Б $x \in (-2; 2)$ |
| 3 $2x - 4 > 0$ | В $x \in \emptyset$ |
| 4 $x^2 < 4$ | Г $x \in R$ |
| | Д $x \in (-\infty; 2)$ |

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2			×		
3	×				
4		×			

ЗАВДАННЯ З КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

За правильно виконане завдання з короткою відповіддю Ви отримуєте **2 бали**; за неправильно виконане або взагалі не виконане завдання Ви отримуєте **0 балів**.

25. Знайдіть значення виразу $\frac{5-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{300}-\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$.

Правильна відповідь: 9.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \frac{5-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{300}-\sqrt{24}}{\sqrt{3}} &= \frac{(5-3\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{\sqrt{300}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2}+5-3\cdot 2-3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1} + \sqrt{\frac{300}{3}} - \sqrt{\frac{24}{3}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}+5-6}{2-1} + \sqrt{100} - \sqrt{8} = 2\sqrt{2}-1+10-2\sqrt{2} = 9 \end{aligned}$$

Відповідь: 9.

26. Знайдіть найбільше значення функції $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$ на проміжку $[-1; 3]$.

Правильна відповідь: 0.

Розв'язання:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2; \quad x \in [-1; 3].$$

Знайдемо похідну: $y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x = x^2 - 4x$.

Визначимо критичні точки: $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$

$$x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Отже, $0 \in [-1; 3]$ – критична точка, $4 \notin [-1; 3]$.

Обчислимо значення функції в критичній точці та в граничних точках:

$$y(0) = 0;$$

$$y(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 = -\frac{1}{3} - 2 = -2\frac{1}{3};$$

$$y(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 = 9 - 18 = -9.$$

Виберемо найбільше з них: $y_{\max} = y(0) = 0$.

Відповідь: $y_{\max} = y(0) = 0$.

27. Знайдіть усі значення параметра a , при яких система $\begin{cases} x - y + a = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x \leq 1 \end{cases}$ має

єдиний розв'язок. Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповідь.

Якщо таких значень кілька, то у відповідь запишіть їх суму.

Правильна відповідь: 2.

28. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із кутом 15° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° . Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює 6 см. Обчисліть об'єм піраміди.

Правильна відповідь: 40,5.

29. Укажіть кут, який утворює з додатним напрямком осі Ox дотична до параболи $y = x^2 - 4x - 7$, проведена в точці з абсцисою $x_0 = 2,5$.

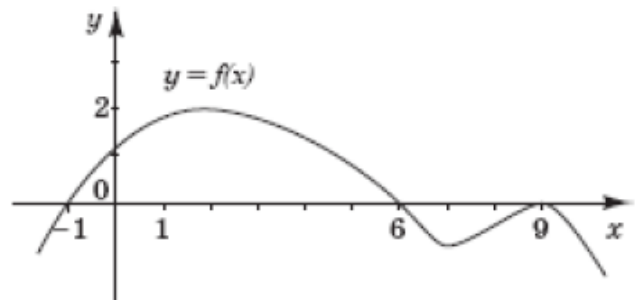
Правильна відповідь: 45.

30. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, що визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і має лише три нулі. Розв'яжіть систему

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x^2 + x - 6 > 0 \end{cases} \quad \text{У}$$

відповідь запишіть суму всіх цілих розв'язків системи.

Правильна відповідь: 27.



31. Знайдіть значення виразу $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$, якщо $tg\alpha - ctg\alpha = 4$.

Правильна відповідь: 18.

Розв'язання:

$$tg\alpha - ctg\alpha = 4, \quad (tg\alpha - ctg\alpha)^2 = 4^2, \quad tg^2\alpha - 2tg\alpha \cdot ctg\alpha + ctg^2\alpha = 16$$

$$tg^2\alpha - 2 + ctg^2\alpha = 16, \quad tg^2\alpha + ctg^2\alpha = 18$$

Відповідь: 18.

32. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_2 \sqrt{x+2} \geq \log_2 x$.

Правильна відповідь: 2.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Математика. Комплексний довідник: 4-те вид., зі змінами./Укладачі Каплун О.І., Роганін О.М. – Х.: ФОП Співак В.Л., 2012. – 384 с.
2. О.М. Роганін. Повний курс підготовки до ДПА і ЗНО-2011: навч. посіб. / передм. Л.П. Дворецької. – Х.: Факт, 2011.
3. Математика. Типові тестові завдання: Збірник / А.Р. Гальперіна, О.Я. Міхеєва. – Х.: Веста, 2010.
4. Математика. Комплект для підготовки до ЗНО у трьох зошитах: Зошит 1. Розв'язування типових завдань з алгебри і початків аналізу / А.Р. Гальперіна. – К.: «Літера» ЛТД, 2010.
5. Математика. Комплект для підготовки до ЗНО у трьох зошитах: Зошит 2. Розв'язування типових завдань з геометрії / А.Р. Гальперіна. – К.: «Літера» ЛТД, 2010.
6. Математика. Комплект для підготовки до ЗНО у трьох зошитах: Зошит 3. Домашні завдання / А.Р. Гальперіна. – К.: «Літера» ЛТД, 2010.
7. Е.Д. Куланин и др. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 1997.
8. С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: Справочник. – М.: Изд. «Факториал», 1997.
9. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Под редакцией М.И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1995.

Навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З АЛГЕБРИ

(для слухачів підготовчих курсів центру довузівської підготовки і абітурієнтів, які готуються до проходження зовнішнього незалежного оцінювання якості знань).

Укладачі **БІЗЮК** Валерій Васильович,
АЛЕКСАНДРОВА Людмила Михайлівна,
ГРЕВЦОВА Олена Федорівна

В авторській редакції
Комп'ютерне верстання В.Є.Танянська

План 2012, поз. 660М

Підп. до друку 13.03.2012	Формат 60 x 84/16
Друк на різнографі	Ум. друк. арк. 2,5
Тираж 100 пр.	Зам №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011