МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

В.В. Бізюк,
Л.М. Александрова,
О.Ф. Грєвцова

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З МАТЕМАТИКИ

(для слухачів підготовчих курсів центру довузівської підготовки і абітурієнтів, які готуються до проходження зовнішнього незалежного оцінювання якості знань)

Харків ХНАМГ 2010

Методичні вказівки з математики (для слухачів підготовчих курсів центру довузівської підготовки і абітурієнтів, які готуються до проходження зовнішнього незалежного оцінювання якості знань). /Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Бізюк В.В., Александрова Л.М., Грєвцова О.Ф. Х: ХНАМГ, 2010. – 55 с.

Укладачі: В.В. Бізюк,
Л.М. Александрова,
О.Ф. Грєвцова

Рецензент: д. ф.-м. н., проф. А.І. Колосов

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 10 від 26.05.2010 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Одним обов'язкових сертифікатів, який повинні пред'явити абітурієнти для вступу до Харківської національної академії міського господарства, є сертифікат з математики. Абітурієнтам необхідно підготуватись до усіх розділів математики, які передбачені програмою.

Вступник повинен показати:

1) чітке знання визначень, математичних понять, термінів, формулювання правил, ознак теорем, передбачених програмою, вміння доводити їх;

2) уміння точно і стисло висловити математичну думку в усній і письмовій формі, використовувати їх при розв'язанні задач та вправ.

Мета цих методичних вказівок – допомогти абітурієнтам закріпити й удосконалити знання з усіх розділів математики.

Для перевірки знань наводиться приклад варіанта тестового завдання з математики і відповіді.

Методичні вказівки рекомендовані як для слухачів підготовчих курсів, так і для самостійної підготовки до зовнішнього незалежного тестування.

ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ

для слухачів підготовчих курсів

Програма складена відповідно до чинних нормативних документів: навчальної програми для середніх загальноосвітніх навчальних закладів та відповідно до програмових вимог зовнішнього оцінювання з математики згідно з Умовами прийому до вищих навчальних закладів України на 2010 р.

І. ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ І ФАКТИ

Арифметика, алгебра і початки аналізу

1. Натуральні числа. Арифметичні дії над натуральними числами. Числові вирази. Порядок арифметичних дій у числовому виразі. Ділення з остачею. Ознаки подільності натуральних чисел.
2. Розкладання натурального числа на прості множники. Найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне.
3. Звичайні дроби. Правильні й неправильні дроби. Основна властивість дробу. Скорочення дробу. Періодичні дроби.
4. Відношення. Пропорція. Властивості пропорції.
5. Відсотки.
6. Цілі, раціональні й дійсні числа.
7. Модуль (абсолютна величина) дійсного числа.
8. Основні поняття теорії множин.
9. Види алгебраїчних виразів.
10. Степінь.
11. Одночлен і многочлен (загальні поняття). Формули скороченого множення. Розкладання многочленна на множники.
12. Тотожні перетворення раціональних виразів.
13. Корінь $n-го$ степеня з дійсного числа (правила дій з радикалами).
14. Перетворення ірраціональних виразів. Середнє арифметичне і середнє геометричне.
15. Функції. Область визначення і область значень функції. Основні способи завдання функції. Парні й непарні функції. Періодичні функції. Обмеженість функції. Монотонність функції. Проміжки знакосталості і корені функції. Екстремум функції. Обернена функція.

16. Основні елементарні функції та їх графіки.
17. Геометричні перетворення графіків функцій.
18. Алгебраїчні рівняння та їх класифікація.
19. Лінійні рівняння і рівняння, що до них зводяться.
20. Квадратні рівняння. Теорема Вієта і теорема, обернена до неї.
21. Двочленні рівняння.
22. Тричленні рівняння.
23. Біквадратні рівняння.
24. Цілі раціональні рівняння вищих степенів. Теорема Безу.
25. Симетричні рівняння третього й четвертого степеня.
26. Розв’язання раціональних і дробово-раціональних рівнянь методом введення нової змінної.
27. Рівняння, що містять змінну під знаком модуля: розкриття модуля за означенням, піднесення обох частин рівняння до квадрата, метод інтервалів (проміжків).
28. Ірраціональні рівняння. Основні методи розв’язання ірраціональних рівнянь.
29. Штучні методи розв’язання ірраціональних рівнянь.
30. Алгебраїчні рівняння з параметром.
31. Системи рівнянь. Основні методи розв’язання систем рівнянь.
32. Однорідні системи рівнянь.
33. Симетричні системи рівнянь.
34. Алгебраїчні нерівності: нерівності з однією змінною (основні поняття), лінійні нерівності, які зводяться до лінійних.
35. Системи і сукупність нерівностей з однією змінною.
36. Геометрична інтерпретація нерівностей.
37. Нерівності другого степеня. Графічне розв’язування нерівностей другого степеня.
38. Розв’язання раціональних нерівностей методом інтервалів. Узагальнений метод інтервалів.
39. Метод заміни змінної при розв’язуванні раціональних нерівностей.
40. Нерівності з модулем.
41. Ірраціональні нерівності.
42. Метод піднесення обох частин ірраціональних нерівностей до того самого натурального степеня.
43. Метод відділення радикалу при розв’язанні ірраціональних нерівностей.
44. Метод введення нових змінних при розв’язанні ірраціональних нерівностей.

45. Прогресії (поняття числової послідовності). Арифметична прогресія. Геометрична прогресія. Нескінченно спадна геометрична прогресія.
46. Комбіновані задачі на арифметичну і геометричну прогресії.
47. Тригонометрія: кути та їхні міри, означення тригонометричних функцій, основні тригонометричні тотожності.
48. Властивості тригонометричних функцій. Формули зведення. Основні формули тригонометрії.
49. Тотожні перетворення тригонометричних виразів.
50. Властивості й графік функції $y = \sin x$.
51. Властивості й графік функції $y = \cos x$.
52. Властивості й графік функції $y = tgx$.
53. Властивості й графік функції $y = ctgx$.
54. Обернені тригонометричні функції.
55. Найпростіші тригонометричні рівняння.
56. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники.
57. Спосіб зведення тригонометричного рівняння до однієї з функцій.
58. Розв'язування тригонометричних рівнянь, однорідних відносно синуса і косинуса, а також що зводяться до однорідних.
59. Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою універсальної підстановки.
60. Метод введення допоміжного аргументу при розв'язанні тригонометричних рівнянь.
61. Розв'язання тригонометричних рівнянь перетворенням суми (різниці) тригонометричних функцій у добуток.
62. Розв'язування тригонометричних рівнянь перетворенням добутку тригонометричних функцій у суму.
63. Тригонометричні рівняння, що розв'язуються із застосуванням формул зниження степеня.
64. Тригонометричні нерівності.
65. Показникова функція, її властивості і графік.
66. Логарифмічна функція, її властивості і графік.
67. Означення логарифма. Основна логарифмічна тотожність. Властивості логарифмів. Логарифмування і потенціювання.
68. Показникові рівняння та методи їх розв'язання.
69. Степенево-показникові рівняння.

70. Логарифмічні рівняння та методи їх розв’язання.
71. Системи показникових і логарифмічних рівнянь.
72. Показникові нерівності.
73. Степеневo-показникові нерівності. Логарифмічні нерівності.
74. Похідна функції. Геометричний і механічний зміст похідної функції.
75. Таблиця похідних елементарних функцій.
76. Правила обчислення похідної суми, добутку й частки функцій.
77. Похідна складної функції.
78. Дослідження функції за допомогою похідної.
79. Побудова графіків функцій.
80. Розв’язання прикладних задач на знаходження найбільших і найменших значень. Первісна та визначений інтеграл.
81. Таблиця первісних елементарних функцій. Правила знаходження первісних. Формула Ньютона-Лейбніца.
82. Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ та об’ємів.

Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики

1. Перестановки (без перетворень), кількість перестановок.
2. Розміщення (без повторень), кількість розміщень.
3. Комбінації (без повторень), кількість комбінацій.
4. Біном Ньютона. Поняття ймовірності випадкової події.
5. Найпростіші випадки підрахунку ймовірностей.
6. Поняття про статистику.
7. Статистичні характеристики рядів даних.

Планіметрія

1. Геометричні фігури та їх властивості.
2. Аксіоми планіметрії.
3. Трикутник.
4. Подібність трикутників.
5. Основні співвідношення між елементами трикутника.
6. Обчислення площі трикутника.
7. Правильний трикутник. Розв’язання трикутників.
8. Чотирикутник та його елементи.
9. Паралелограм і його властивості. Прямокутник і його властивості.

10. Ромб і його властивості.
11. Квадрат і його властивості.
12. Площі чотирикутників.
13. Коло та круг.
14. Опуклі й неопуклі многокутники.
15. Вписані й описані многокутники.
16. Декартові координати на площині. Прямокутна система координат на площині.
17. Координати середини відрізка, відстань між двома точками із заданими координатами, рівняння кола й прямої.
18. Геометричні перетворення: переміщення та його властивості.
19. Симетрія відносно точки й прямої, поворот, паралельне перенесення, рівність фігур.
20. Перетворення подібності та його властивості.
21. Гомотетія. Подібність фігур. Площі подібних фігур.
22. Вектори на площині: модуль і напрям вектора, рівність векторів, координати вектора, додавання і віднімання векторів.
23. Множення вектора на число.
24. Колінеарні вектори.
25. Скалярний добуток векторів.

Стереометрія

1. Аксіоми стереометрії та наслідки з них.
2. Паралельні прямі у просторі.
3. Ознаки паралельності прямої і площини.
4. Ознаки паралельності площин.
5. Властивості паралельних площин.
6. Зображення просторових фігур на площині.
7. Перпендикуляр та похила.
8. Відстань від точки до площини.
9. Теорема про три перпендикуляри.
10. Перпендикулярність площин.
11. Відстань між мимобіжними прямими.
12. Декартові координати у просторі.
13. Перетворення симетрії у просторі.
14. Паралельне перенесення у просторі.
15. Кут між мимобіжними прямими.

16. Кут між прямою і площиною.
17. Кут між площинами.
18. Площа ортогональної проекції многокутника.
19. Вектори у просторі: рівність векторів, координати вектора, модуль вектора, додавання векторів, множення вектора на число.
20. Колінеарні вектори.
21. Скалярний добуток векторів.
22. Одиничні вектори.
23. Дії над векторами у просторі.
24. Многогранні кути.
25. Многогранники.
26. Паралелепіпед.
27. Призма. Перерізи призми.
28. Правильна піраміда.
29. Площа поверхні призми.
30. Правильні многогранники.
31. Циліндр. Перерізи циліндра.
32. Конус. Перерізи конуса.
33. Вписана та описана призми.
34. Вписана та описана піраміди.
35. Куля і сфера.
36. Вписані та описані многогранники.
37. Об’єм паралелепіпеда.
38. Об’єм призми.
39. Об’єм циліндра.
40. Об’єм піраміди.
41. Об’єм конуса.
42. Об’єм кулі та її частин.
43. Площа поверхні циліндра.
44. Площа поверхні конуса.
45. Площа сфери.
46. Тіла обертання.
47. Комбінації геометричних тіл.
48. Комбінації многогранників і тіл обертання.

II. ОСНОВНІ ВМІННЯ ТА НАВИЧКИ, ЯКИМИ МАЮТЬ ВОЛОДІТИ СЛУХАЧІ ПІДГОТОВЧИХ КУРСІВ

1. Виконувати арифметичні дії над натуральними числами, десятковими і звичайними дробами.
2. Виконувати тотожні перетворення многочленів, алгебричних дробів, виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції.
3. Будувати й читати графіки лінійної, квадратичної, степеневої, показникової, логарифмічної й тригонометричних функцій.
4. Розв'язувати рівняння і нерівності першого і другого степенів, а також рівняння і нерівності, що зводяться до них; розв'язувати системи рівнянь та нерівностей першого і другого степенів і ті, що зводяться до них; найпростіші рівняння і нерівності, що мають степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції.
5. Розв'язувати задачі за допомогою рівнянь і систем рівнянь.
6. Зображувати геометричні фігури на площині й виконувати найпростіші побудови на площині.
7. Використовувати відомості з геометрії для розв'язування алгебраїчних, а з алгебри і тригонометрії - геометричних задач.
8. Виконувати на площині операції над векторами (додавання і віднімання векторів, множення вектора на число) і використовувати їх під час розв'язування практичних задач і вправ.
9. Застосувати похідну для дослідження функцій на зростання (спадання), на екстремуми, а також для побудови графіків функцій.

1. ПОЗНАЧЕННЯ, ЯКІ ЗУСТРІЧАЮТЬСЯ В ПОСІБНИКУ

N — множина всіх натуральних чисел

Z — множина всіх цілих чисел

Z_0 — множина всіх невід'ємних цілих чисел

Q — множина всіх раціональних чисел

R — множина всіх дійсних чисел, числова пряма

R_+ — множина всіх додатних дійсних чисел

$[a; b]$ — відрізок (замкнений проміжок) з кінцями a і b, $a < b$

$(a; b)$ — інтервал (відкритий проміжок) з кінцями a і b, $a < b$

$(a; b]$, $[a; b)$ — напіввідкриті проміжки з кінцями a і b, $a < b$

$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, — нескінченні проміжки

$(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$ — нескінченні проміжки

$(-\infty; +\infty)$ — нескінченний проміжок, числова пряма

$|x|$ — модуль (абсолютна величина) числа x

$[x]$ — ціла частина числа x

$\{x\}$ — дробова частина числа x

$f(x)$ — значення функції f у точці x

$D(f)$ — область визначення функції f

$E(f)$ — область значень функції f

$\sin$ — функція синус

$\cos$ — функція косинус

tg — функція тангенс

ctg — функція котангенс

$\arcsin$ — функція арксинус

$\arccos$ — функція арккосинус

$arctg$ — функція арктангенс

$arcctg$ — функція арккотангенс

$\sqrt{a}$ — арифметичний корінь із числа a

$\sqrt[2k]{a}$ — арифметичний корінь $2k-го$ степеня з числа a $(k \in N)$

$\sqrt[2k+1]{a}$ — корінь $(2k+1)-го$ степеня з числа a $(k \in N)$

$\log_a$ — логарифм за основою a

$\lg$ — десятковий логарифм (логарифм за основою 10)

$\ln$ — натуральний логарифм (логарифм за основою e)

2. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ВИРАЗІВ

Модуль (абсолютна величина) дійсного числа

Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа a називається саме число, якщо $a \ge 0$, або протилежне йому число $-a$, якщо $a < 0$:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \ge 0 \\ -a, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}.$$

Геометрично $|a|$ означає відстань на координатній прямій від початку координат до точки, яка зображує число a:

$$|7| = 7, \text{ тому що } 7 > 0$$
$$|-7| = -(-7) = 7, \text{ тому що } -7 < 0$$

Ступінь

a^n – *ступінь, де* a – *основа степеня*; n – *показник степеня.*

Ступінь a^n є добуток n множників, кожний з яких дорівнює a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$.

Основні властивості ступеня

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.	2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.	3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$.
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.	5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.	6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$.
7. $1^n = 1$.	8. $a^1 = a$.	9. $a^0 = 1$.
10. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.	11. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.	12. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Приклад. Обчислити $\dfrac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} : \dfrac{10^{10}}{2^6 \cdot 5^7}$.

Розв'язання
$$\frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} : \frac{10^{10}}{2^6 \cdot 5^7} = \frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} \cdot \frac{2^6 \cdot 5^7}{10^{10}} = \frac{12^5 \cdot 2^6 \cdot 5^7}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 10^{10}} = \frac{(2 \cdot 2 \cdot 3)^5 \cdot 2^6 \cdot 5^7}{2^3 \cdot 3^4 \cdot (2 \cdot 5)^{10}} =$$
$$\frac{2^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 2^6 \cdot 5^7}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}} = \frac{2^{16} \cdot 3^5 \cdot 5^7}{2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5^{10}} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^{-3} = \frac{2^3 \cdot 3}{5^3} = \frac{24}{125}$$

Відповідь. $\dfrac{24}{125}$.

Арифметичний корінь

<u>Арифметичним коренем</u> $n-го$ степеня із числа a $(a \geq 0)$ називається невід'ємне число b, $n-ий$ степінь якого дорівнює a: $\sqrt[n]{a}=b,\ де\ n \in \mathrm{N},\ n \geq 2$; $a-$ підкорінний вираз; $n-$ показник степеня.

Корінь парного степеня $(2n)$ добувається тільки із невід'ємного числа, а корінь непарного степеня $(2n+1)$ - із будь-якого числа $\sqrt[2n]{a}$ існує при $a \geq 0;$ $\sqrt[2n+1]{a}$ існує для будь-якого $a \in R,$ $\sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$.

Властивості коренів

1. $\sqrt[n]{0}=0$.
2. $\sqrt[n]{1}=1$.
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$.
4. Добуток коренів $n-го$ степеня: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.
5. Частка коренів $n-го$ степеня: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.
6. Степінь кореня: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.
7. Корінь із кореня: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$.
8. Приведення кореня до нового показника: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$.
9. Внесення множника під корінь: $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$.
10. Добування кореня парного степеня: $\sqrt{a^2}=|a|$, тобто $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$.
11. Добування кореня непарного степеня : $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$.
12. Різниця квадратів (формула скороченого множення для коренів): $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$, де вирази $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ і $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ є *<u>взаємноспряженими</u>*.

Приклади.

1) Спростити вираз $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x}$.= $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x}=\sqrt[3\cdot 2]{x^{2\cdot 2}}\cdot\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{x^4\cdot x}=\sqrt[6]{x^5}$

2) Записати вираз $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ у вигляді степеня з раціональним показником.

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2 \cdot a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$$

3) Знайти значення виразу $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} ==$$

$$\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{6+2+6+2}{6-2} = \frac{16}{4} = 4$$

Способи розкладання многочленів на множники

1. Винесення спільного множника за дужки: $10x^2y - 5xy^3 = 5xy\left(2x - y^2\right)$.
2. Спосіб групування:
   а) у групи об’єднують члени, які мають спільні множники;
   б) виносять за дужки спільний множник кожної групи.

$$\underline{xy} + \underline{3yz} - \underline{\underline{x^2}} - \underline{\underline{3xz}} = (xy + 3yz) + \left(-x^2 - 3xz\right) = y(x+3z) - x(x+3z) = (x+3z)\cdot(y-x)$$

3. Використання формул скороченого множення:

$$a^2 + b^2 + 2ab - 4c^2 = (a+b)^2 - (2c)^2 = (a+b-2c)\cdot(a+b+2c).$$

Формули скороченого множення

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – *формула різниці квадратів*;
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – *формула квадрата суми*;
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – *формула квадрата різниці*;
4. $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$ – *формула різниці кубів*;
5. $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ – *формула суми кубів*;
6. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – *формула куба суми*;
7. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – *формула куба різниці*.

Застосування кількох способів для розкладання многочленів на множники

1. З’ясувати, чи можна винести за дужки спільний множник. Зробити це, якщо можна.
2. Подивитись, чи можна розкласти вираз, який залишився в дужках (або даний) на множники за формулами скороченого множення.
3. Спробувати застосувати спосіб групування.

Приклади.

1) $m^4+\underline{m^2}-20=m^4+\underline{5m^2-4m^2}-20=\left(m^4+5m^2\right)-\left(4m^2+20\right)=m^2\left(m^2+5\right)-4\left(m^2+5\right)=$
$=\left(m^2+5\right)\left(m^2-4\right)=\left(m^2+5\right)\left(m^2-2^2\right)=\left(m^2+5\right)(m-2)(m+2)$

2) $x^2+10x+21=\underline{x^2+2x\cdot 5+5^2}-5^2+21=(x+5)^2-25+21=(x+5)^2-4=(x+5)^2-2^2=$
$=(x+5-2)(x+5+2)=(x+3)(x+7)$.

3) $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 та x_2 – корені відповідного квадратного тричлена.

3. АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

1. Раціональні рівняння:
   а) лінійні рівняння: $3(x-2)-5=4-(5x-1)$;
   б) квадратні рівняння: $x^2-x=0$;
   в) рівняння вищих степенів: $x^3-2x+1=0$ - кубічне рівняння
   $x^4-13x^2+36=0$ - біквадратне рівняння.
2. Дробово-раціональні рівняння: $\dfrac{x^2+x}{x}=2$.
3. Ірраціональні рівняння: $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}=2$.
4. Рівняння, які містять змінну під знаком модуля: $|x-2|+|4-x|=3$.
5. Рівняння з параметрами: $\sqrt{x-a}=2x-1$.

Приклади.

1) Розв’язати лінійне рівняння $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{2x-1}{6}=\dfrac{x-3}{12}+1$.

Розв'язання. $\frac{x-2}{3}+\frac{2x-1}{6}=\frac{x-3}{12}+1 \quad \Rightarrow \quad 4(x-2)+2(2x-1)=x-3+12$

$4x-8+4x-2-x=-3+12, \quad 7x-10=9, \quad 7x=19, \quad x=\frac{19}{7}, \quad x=2\frac{5}{7}.$

Відповідь. $\left\{2\frac{5}{7}\right\}$.

2) Розв'язати квадратне рівняння $2x^2-5x+2=0$.

Розв'язання. $2x^2-5x+2=0$

$D=b-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=26-16=9$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2 \; x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

Відповідь. $\left\{\frac{1}{2};\, 2\right\}$.

3) Розв'язати квадратне рівняння $x^2-9x+8=0$.

Розв'язання. $x^2-9x+8=0$

За теоремою Вієта: $\begin{cases} x_1+x_2=9 \\ x_1x_2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=8 \end{cases}.$

Відповідь. $\{1;\, 8\}$.

4) Розв'язати кубічне рівняння $x^3-3x+2=0$.

Розв'язання.

$x^3\underline{-3x}+2=0$

$\underline{x^3-x}-\underline{\underline{2x+2}}=0$

$(x^3-x)+(-2x+2)=0$

$x(x^2-1)-2(x-1)=0$

$x(x-1)(x+1)-2(x-1)=0$

$(x-1)(x(x+1)-2)=0$

$(x-1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2+x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+x-2=0 \end{array}\right..$

$x^2+x-2=0$

За теоремою Вієта: $\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1x_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \end{cases}.$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{array}\right.$$.

Відповідь. $\{-2; 1\}$.

5) Розв’язати біквадратне рівняння $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Розв’язання.

Вводимо заміну: $x^2 = t$ *при* $t \geq 0$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 + t_2 = 13 \\ t_1 t_2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 9 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 2 \\ x_{3,4} = \pm 3 \end{array}\right.$

Відповідь. $\{\pm 2; \pm 3\}$.

6) Розв’язати дробово-раціональне рівняння $\dfrac{3x-2}{x-3} - \dfrac{x-4}{x+3} = \dfrac{15x-3}{x^2-9}$.

Розв’язання. $\dfrac{3x-2}{x-3} - \dfrac{x-4}{x+3} = \dfrac{15x-3}{x^2-9}$, ОДЗ: $x \neq \pm 3$

$$\frac{(3x-2)(x+3)-(x-4)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{15x-3}{(x-3)(x+3)}$$

$3x^2 + 9x - 2x - 6 - \left(x^2 - 3x - 4x + 12\right) - 15x - 3 = 0$

$3x^2 + 7x - 6 - x^2 + 3x + 4x - 12 - 15x - 3 = 0$, $2x^2 - x - 15 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 1 + 120 = 121$

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{1 + \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1 + 11}{4} = 3$ – *сторонній корінь, тому що не задовольняє вимогам ОДЗ.* $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{1 - \sqrt{121}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1 - 11}{4} = -\dfrac{10}{4} = -\dfrac{5}{2} = -2\dfrac{1}{2}$

Відповідь. $\left\{-2\dfrac{1}{2}\right\}$.

7) Розв’язати дробово-раціональне рівняння $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 - \dfrac{5x}{x+1} + 6 = 0$.

Розв’язання. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 - \dfrac{5x}{x+1} + 6 = 0$, ОДЗ: $x \neq -1$, $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 - 5 \cdot \dfrac{x}{x+1} + 6 = 0$. Введемо заміну: $\dfrac{x}{x+1} = t$, $t^2 - 5t + 6 = 0$. За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 + t_2 = -5 \\ t_1 t_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{x+1}=2\\ \dfrac{x}{x+1}=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{x+1}-2=0\\ \dfrac{x}{x+1}-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x-2(x+1)}{x+1}=0\\ \dfrac{x-3(x+1)}{x+1}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2(x+1)=0\\ x-3(x+1)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2x-2=0\\ x-3x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x-2=0\\ -2x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+2=0\\ 2x+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\ 2x=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=-2\\ x_2=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=-2\\ x_2=-1\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Відповідь. $\left\{-2; -1\frac{1}{2}\right\}$.

8) Розв’язати рівняння, яке містить змінну під знаком модуля $|2x-1|=5$.

Розв’язання. $|2x-1|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=5\\ -(2x-1)=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=6\\ 2x-1=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ 2x=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=3\\ x_2=-2\end{array}\right.$

Відповідь. $\{-2; 3\}$.

9) Розв’язати рівняння, яке містить змінну під знаком модуля $|x+1|=2x-1$.

Розв’язання.

$$|x+1|=2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-1\ge 0\\ x+1=2x-1\end{cases}\\ \begin{cases}2x-1\ge 0\\ -(x+1)=2x-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x\ge 1\\ x-2x=-1-1\end{cases}\\ \begin{cases}2x\ge 1\\ -x-1=2x-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ -x=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ -x-2x=1-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ x=2\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{2}\\ x=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$x=2$ –розв’язок рівняння.

Відповідь. $\{2\}$.

10) Розв’язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x+11}=1-x$. $\sqrt{x+11}=1-x$,

ОДЗ: $\begin{cases}x+11\ge 0\\ 1-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -11\\ -x\ge -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -11\\ x\le 1\end{cases} \Rightarrow x\in[-11; 1]$.

$\left(\sqrt{x+11}\right)^2=(1-x)^2$ $\quad x+11=1-2x+x^2$ $\quad 1-2x+x^2-x-11=0$ $\quad x^2-3x-10=0$

За теоремою Вієта $\begin{cases}x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-2\\ x_2=5\,.\end{cases}$, x_2 *- сторонній корінь, тому що не задовольняє вимогам ОДЗ.*

Відповідь. $\{-2\}$.

Системи алгебраїчних рівнянь

Розв'язати систему рівнянь – знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає. Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною, якщо розв'язків немає*.

Основні методи розв'язку систем рівнянь

1. Метод підстановки.
2. Метод алгебраїчного додавання (або метод перетворення системи).
3. Метод заміни змінної.
4. Метод порівняння.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 4x+3y=21 \\ 4x-3y=3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 4x+3y=21 \\ 4x-3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+4x-3y=21+3 \\ 4x+3y-(4x-3y)=21-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=24 \\ 4x+3y-4x+3y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 6y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

Відповідь. $\{(3;3)\}$.

Однорідні системи рівнянь

Система двох рівнянь з двома змінними називається *однорідною*, якщо ліві частини рівнянь є однорідні многочлени степеня n від двох змінних.

Однорідні системи рівнянь розв'язують за допомогою методів алгебраїчного додавання і введення нової змінної.

Приклади.

1) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$.

2) *Розв'язання.* $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$. Розділимо обидві частини 1-го рівняння системи на $x^2 \neq 0$: $\begin{cases} \frac{2x^2}{x^2}+\frac{xy}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}=0 \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}=0 \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$, $2+\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}=0$.

Введемо заміну: $\frac{y}{x}=t \Rightarrow t^2=\frac{y^2}{x^2}$, $\begin{matrix} 2+t-t^2=0 \\ t^2-t-2=0 \end{matrix}$. За теоремою Вієта

$$\begin{cases} t_1+t_2=1 \\ t_1t_2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=-1 \\ t_2=2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{y}{x}=-1\\ x^2-3xy+y^2=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{y}{x}=2\\ x^2-3xy+y^2=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=-x\\ x^2-3x\cdot(-x)+(-x)^2=-1\end{cases}\\ \begin{cases}y=2x\\ x^2-3x\cdot 2x+(2x)^2=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=-x\\ x^2+3x^2+x^2=-1\end{cases}\\ \begin{cases}y=2x\\ x^2-6x^2+4x^2=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=-x\\ 5x^2=-1\end{cases}\\ \begin{cases}y=2x\\ -x^2=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=-x\\ x^2=-\dfrac{1}{5}\end{cases} - \textit{система несумісна}\\ \begin{cases}y=2x\\ x^2=1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}y=2x\\ x^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x\\ x=\pm 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=2x\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=2x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=1\\ y_1=2\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=-1\\ y_2=-2\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь. $\{(1;\,2);\ (-1;\,-2)\}$.

4. АЛГЕБРАЇЧНІ НЕРІВНОСТІ Й СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ

1. Лінійні нерівності: $ax+b \lesseqgtr 0$.
2. Квадратні нерівності : $ax^2+bx+c \lesseqgtr 0$.
3. Дробово-лінійні нерівності: $\dfrac{ax+b}{cx+d} \lesseqgtr 0$, де $cx+d\neq 0$.
4. Раціональні нерівності: $f(x) \lesseqgtr 0$, де $f(x)$ – раціональна функція. Особливий випадок: $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \lesseqgtr 0$.
5. Дробово-раціональні нерівності: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \lesseqgtr 0$, де $f(x)$ та $g(x)$ – раціональні функції, причому $g(x)\neq 0$.
6. Ірраціональні нерівності – нерівності, які містять змінну під знаком радикала.
7. Нерівності з модулем.

Приклади.

1) Розв’язати нерівність $x^2-5x+6>0$.

Розв’язання. $x^2-5x+6>0$, $f(x)=x^2-5x+6$, $D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 6=25-24=1$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5+1}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5-1}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

$f(x)=x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ $\qquad$ $(x-3)(x-2)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$

Відповідь. $x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

3) Розв’язати нерівність $|x+2|\le 5$.

Розв’язання. $|x+2|\le 5 \Leftrightarrow -5\le x+2\le 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\ge -5 \\ x+2\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -7 \\ x\le 3 \end{cases} \Rightarrow x\in[-7;3]$.

Відповідь. $x\in[-7;3]$.

Універсальний метод розв’язання ірраціональних нерівностей $f_1(x)\lesseqgtr f_2(x)$

1. Скласти функцію $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$.
2. Знайти ОДЗ функції $F(x)$.
3. Знайти всі корені функції $F(x)$, тобто розв’язати рівняння $F(x)=0$ (сторонні корені відкинути).
4. За допомогою коренів розбити ОДЗ функції $F(x)$ на проміжки знакопостійності.
5. Визначити знаки функції $F(x)$ на кожному з проміжків, тобто знайти множину значень аргумента x, при яких функція $F(x)$ приймає додатні значення, для $F(x)>0$ або $F(x)\ge 0$. Аналогічно розв’язують нерівності $F(x)<0$ або $F(x)\le 0$.
6. Записати відповідь.

Приклад. Розв’язати нерівність $(1-x)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$.

Розв’язання. $(1-x)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$, $(1-x)\sqrt{x^2+1}-x^2+1>0$, $F(x)=(1-x)\sqrt{x^2+1}-x^2+1$

ОДЗ: $x\in R$. $F(x)=0 \Rightarrow (1-x)\sqrt{x^2+1}-x^2+1=0$, $\begin{array}{l}(1-x)\sqrt{x^2+1}+(1-x^2)=0\\ (1-x)\sqrt{x^2+1}+(1-x)(1+x)=0\end{array}$,

$$(1-x)\left(\sqrt{x^2+1}+1+x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x=0 \\ \sqrt{x^2+1}+1+x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{x^2+1}=-1-x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=(-1-x)^2 \\ -1-x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x^2+1=(-1-x)^2 \\ -x\geq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x^2+1=1+2x+x^2 \\ x\leq -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

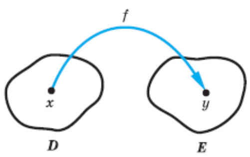
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x^2+1-1-2x-x^2=0 \\ x\leq -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} -2x=0 \\ x\leq -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x=0 \\ x\leq -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\in \phi \end{array}\right. \Rightarrow x=1$$

$x\in(-\infty;1)$ – розв'язок нерівності.

Відповідь. $x\in(-\infty;1)$.

5. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

1. Поняття числової функції.



Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D (область визначення) ставиться у відповідність єдине число y. Записують цю відповідність так: $y=f(x)$.

Позначення і терміни:

а. $D(f)$ – область визначення;

б. $E(f)$ – область значень;

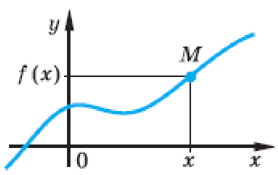
в. x – аргумент (незалежна змінна);

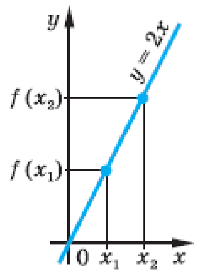
г. y – функція (залежна змінна);

д. f – функція;

е. $f(x_0)$ – значення функції f у точці x_0.

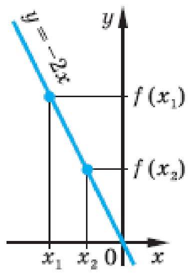
2. Графік функції. *Графіком функції* f називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x;\ f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата – це відповідне значення функції f у точці x.





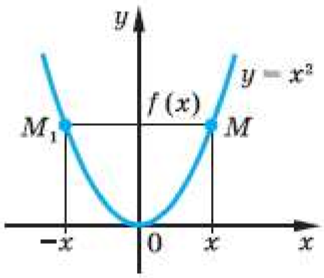
3. Зростаючі та спадні функції.

Функція $f(x)$ *зростаюча*: якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ – при збільшенні аргумента відповідні точки графіка піднімаються.



Функція $f(x)$ *спадна*: якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$ – при збільшенні аргумента відповідні точки графіка опускаються.

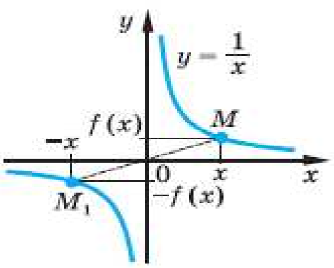
4. Парні й непарні функції.



Функція $f(x)$ *парна*: $f(-x) = f(x)$ для всіх x із області визначення. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy.

Приклад: функція $f(x) = x^2$ є парною тому, що

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$



Функція $f(x)$ *непарна*: $f(-x) = -f(x)$ для всіх x із області визначення. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (точки O).

Приклад: функція $f(x) = \frac{1}{x}$ є непарною тому, що

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

6. ЛОГАРИФМІЧНІ Й ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ, СИСТЕМИ Й НЕРІВНОСТІ

Логарифм числа

Логарифмом додатного числа b за основою a $(a > 0, a \neq 1)$ називається показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$.

Наприклад, $\log_2 64 = 6$, оскільки $2^6 = 64$, $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, оскільки $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Властивості логарифмів і формули логарифмування

1. $a^{\log_a b} = b$ – основна логарифмічна тотожність.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a 1 = 0$.
4. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.
5. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
6. $\log_a b^p = p \log_a b$; $\log_a \sqrt[p]{b} = \log_a b^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \log_a b$; $\log_a b^{2p} = 2p \log_a |b|$.
7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ – формула переходу до логарифмів з іншою основою; $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$.
8. $\log_a b = \log_{a^p} b^p$.
9. $\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b$.
10. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Приклад. Обчисліть $3^{\frac{1}{\log_5 3}} - 3^{\frac{4}{\log_7 9}} + 3^{\log_9 36}$.

Розв'язання. $3^{\frac{1}{\log_5 3}} - 3^{\frac{4}{\log_7 9}} + 3^{\log_9 36} = 3^{\log_3 5} - 3^{4\log_9 7} + 3^{\log_9 36} = 5 - 3^{4\log_{3^2} 7} + 3^{\log_{3^2} 36} =$

$= 5 - 3^{4 \cdot \frac{1}{2} \log_3 7} + 3^{\frac{1}{2} \log_3 36} = 5 - 3^{2\log_3 7} + 3^{\log_3 36^{\frac{1}{2}}} = 5 - 3^{\log_3 7^2} + 3^{\log_3 6} =$

$= 5 - 7^2 + 6 = 11 - 49 = -38$

Відповідь. -38.

Логарифмічні рівняння

1. *Розв'язання найпростіших логарифмічних рівнянь*: $\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c$ – за означенням логарифма.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\log_3 (x-1) = 2$.

Розв'язання. $\log_3 (x-1) = 2$, ОДЗ: $x - 1 > 0$; $x > 1 \Rightarrow x \in (1; +\infty)$. $x - 1 = 3^2$ $x = 10$

Відповідь. $\{10\}$.

2. *Використання рівнянь-наслідків*: якщо з припущення, що перша рівність правильна, випливає правильність кожної наступної рівності, то гарантовано одержуємо рівняння-наслідок. При використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складною частиною розв’язування.

Приклад. Розв’яжіть рівняння $\log_x(x+2)=2$.

Розв’язання. $\log_x(x+2)=2$, За означенням логарифма одержуємо: $x+2=x^2$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$; $x_2=2$.

Перевірка: $x_1=-1$ – сторонній корінь (в основі логарифма одержуємо від’ємне число); $x_2=2 \Rightarrow \log_2(2+2)=2$, $\log_2 4=2$, $2=2$, отже $x_2=2$ – корінь рівняння.

Відповідь. $\{2\}$.

3. *Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь*: якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).

Приклад. Розв’яжіть рівняння $\lg^2 x-2\lg x-3=0$.

Розв’язання. $\lg^2 x-2\lg x-3=0$, ОДЗ: $x>0$. Заміна: $\lg x=t$. $t^2-2t-3=0$; $t_1=-1$; $t_2=3$. Отже, $\left[\begin{array}{l}\lg x=-1\\ \lg x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=10^{-1}\\ x_2=10^3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=0{,}1\\ x_2=1000\end{array}\right.$.

Відповідь. $\{0{,}1;\,1000\}$.

4. *Рівняння виду* $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ *при* $a>0$ і $a\neq 1$: враховуємо ОДЗ і прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів:

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ \left.\begin{array}{l} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{array}\right] \text{ОДЗ} \end{cases}.$$

Приклад. Розв’яжіть рівняння $\log_3(x^2-2)=\log_3(4x-5)$.

Розв'язання. $\log_3\left(x^2-2\right)=\log_3(4x-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=4x-5 \\ \left.\begin{matrix} x^2-2>0 \\ 4x-5>0 \end{matrix}\right] \text{ОДЗ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)>0 \\ x>1\frac{1}{4} \end{cases}$

$x_1=1$ – сторонній корінь (не задовольняє умови ОДЗ);

$x_2=3$ – корінь (задовольняє умови ОДЗ).

Відповідь. $\{3\}$.

5. *Рівносильні перетворення рівнянь в інших випадках*: враховуємо ОДЗ заданого рівняння і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ. Стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і в зворотному напрямках із збереженням правильної рівності.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $\log_2(x+1)=3-\log_2(x+3)$.

Розв'язання. $\log_2(x+1)=3-\log_2(x+3)$, ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-3 \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;+\infty)$.

На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням: $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$, $\log_2((x+1)(x+3))=3$, $(x+1)(x+3)=2^3$, $x^2+4x-5=0$; $x_1=1$; $x_2=-5$.

$x_1=1$ – корінь (задовольняє умови ОДЗ);

$x_2=-5$ – сторонній корінь (не задовольняє умови ОДЗ).

Відповідь. $\{1\}$.

Показникові рівняння

$a^{f(x)}=a^c$	$a^{f(x)}=1$	$a^{f(x)}=b$
$f(x)=c$	$a^{f(x)}=a^0$	$a^{f(x)}=a^{\log_a b}$
	$f(x)=0$	$f(x)=\log_a b$

Зведення деяких показникових рівнянь до найпростіших

1. Якщо в лівій і правій частинах показникового рівняння стоять тільки добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допомогою основних формул спробувати записати обидві частини рівняння як степені з однією основою.

2. Якщо в одній частині показникового рівняння стоїть число, а в іншій усі члени містять вираз виду a^{kx} (показники степенів відрізняються тільки вільними членами), то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь a.

Приклади.

1) Розв'яжіть рівняння $2^{x-3}\cdot 4^x=\dfrac{\sqrt{2}}{16^x}$.

Розв'язання.

$2^{x-3}\cdot 4^x=\dfrac{\sqrt{2}}{16^x}$ $\qquad$ $2^{3x-3}=2^{\frac{1}{2}-4x}$

$2^{x-3}\cdot 2^{2x}=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}}$ $\qquad$ $3x-3=\dfrac{1}{2}-4x$ $\qquad$ $x=\dfrac{1}{2}$

Відповідь. $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

2) Розв'яжіть рівняння $5^x-2\cdot 5^{x-2}=23$.

Розв'язання.

$5^x-2\cdot 5^{x-2}=23$ $\qquad$ $5^{x-2}=1$

$5^{x-2}\left(5^2-2\right)=23$ $\qquad$ $5^{x-2}=5^0$

$5^{x-2}\cdot 23=23$ $\qquad$ $x-2=0$, $\quad x=2$

Відповідь. $\{2\}$.

Розв'язування більш складних показникових рівнянь та їх систем

1. Позбавляємося числових доданків у показниках степенів (використовуючи справа наліво основні формули дій над степенями).

Приклад. Розв'яжіть рівняння $4^{x+1}-3\cdot 2^x-10=0$.

Розв'язання. $4^{x+1}-3\cdot 2^x-10=0$, $4^x\cdot 4-3\cdot 2^x-10=0$. Враховуючи, що $4^x=2^{2x}$, зводимо степені до однієї основи 2, $4\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x-10=0$.

Заміна $2^x=t$ при $t>0$ дає рівняння: $4t^2-3t-10=0$; $t_1=2$; $t_2=-1\dfrac{1}{4}$ – сторонній корінь. Обернена заміна дає: $2^x=2 \Rightarrow x=1$.

Відповідь. $\{1\}$.

2. Якщо можливо, зводимо всі степені (із зміною в показнику) до однієї основи і виконуємо заміну змінної.

3. Якщо не можна звести степені до однієї основи, то пробуємо звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння, яке розв'язується діленням обох частин рівняння на найбільший степінь одного з видів змінних.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $4^x + 3\cdot 6^x - 4\cdot 9^x = 0$.

Розв'язання. $4^x + 3\cdot 6^x - 4\cdot 9^x = 0$. Зведемо всі степені до двох основ 2 і 3: $2^{2x} + 3\cdot 2^x \cdot 3^x - 4\cdot 3^{2x} = 0$. Маємо однорідне рівняння (у всіх ступенів однаковий сумарний ступінь – $2x$). Для його розв'язування поділимо обидві частини на $3^{2x} \neq 0$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$. Заміна $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ при $t > 0$ дає рівняння: $t^2 + 3t - 4 = 0$;

$t_1 = 1$; $t_2 = -4$ – сторонній корінь. Обернена заміна дає: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

Відповідь. $\{0\}$.

4. В інших випадках переносимо всі члени рівняння в одну частину і пробуємо розкласти одержаний вираз на множники або застосовуємо спеціальні прийоми розв'язування, в яких використовуються властивості відповідних функцій.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $6^x - 9\cdot 2^x - 2\cdot 3^x + 18 = 0$.

Розв'язання. $6^x - 9\cdot 2^x - 2\cdot 3^x + 18 = 0$

Якщо попарно групувати члени в лівій частині рівняння і в кожній парі винести за дужки спільний множник, то одержимо: $2^x \cdot (3^x - 9) - 2\cdot(3^x - 9) = 0$.
Виносимо за дужки спільний множник $3^x - 9$:

$$(3^x - 9)\cdot(2^x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 9 = 0 \\ 2^x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9 \\ 2^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{array}\right..$$

Відповідь. $\{1; 2\}$.

Логарифмічні нерівності

Функція $y=\log_a x$, $(a>0,\ a\neq 1)$	
$a>1$ – функція зростає	$0<a<1$ – функція спадає
Знак нерівності не змінюється і враховується ОДЗ: $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$	Знак нерівності змінюється і враховується ОДЗ: $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $\log_2(x-5)>3$.

Розв'язання. $\log_2(x-5)>3$, ОДЗ: $x-5>0 \quad x>5 \Rightarrow x\in(5;+\infty)$,

$\log_2(x-5)>\log_2 2^3$. Функція $y=\log_2 t$ є зростаючою, отже: $x-5>2^3$

$$x>13.$$

Враховуючи ОДЗ, маємо: $x\in(13;+\infty)$.

Відповідь. $x\in(13;+\infty)$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>3$.

Розв'язання. $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>3$, ОДЗ: $x-5>0 \quad x>5 \Rightarrow x\in(5;+\infty)$,

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Функція $y=\log_{\frac{1}{2}} t$ є спадною, отже: $x-5<\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$x<5\frac{1}{8}.$$

Враховуючи ОДЗ, маємо: $5<x<5\frac{1}{8} \Rightarrow x\in\left(5;5\frac{1}{8}\right)$.

Відповідь. $x\in\left(5;5\frac{1}{8}\right)$.

Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей

1. За допомогою рівносильних перетворень задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду і використовується така схема:

- враховуємо ОДЗ заданої нерівності й уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ;

- стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і в зворотному напрямках із збереженням правильної нерівності.

Приклад. Розв'яжіть нерівність $\lg^2(10x) - \lg x \ge 3$.

Розв'язання. $\lg^2(10x) - \lg x \ge 3$, ОДЗ: $x > 0$. На ОДЗ задана нерівність, рівносильна нерівностям: $(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \ge 3$, $(1 + \lg x)^2 - \lg x \ge 3$.

Заміна $\lg x = t$ дає нерівність $(1+t)^2 - t \ge 3$, $t^2 + t - 2 \ge 0 \Rightarrow t \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

Обернена заміна дає: $\left[\begin{array}{l} \lg x \le -2 \\ \lg x \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x \le \lg 10^{-2} \\ \lg x \ge \lg 10 \end{array}\right.$.

Враховуючи, що функція $y = \lg x$ є зростаючою, одержуємо: $\left[\begin{array}{l} x \le 10^{-2} \\ x \ge 10 \end{array}\right.$.

Після врахування ОДЗ маємо: $\left[\begin{array}{l} 0 < x \le 0{,}01 \\ x \ge 10 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (0; 0{,}01] \cup [10; +\infty)$.

Відповідь. $x \in (0; 0{,}01] \cup [10; +\infty)$.

Приклад розв'язання показникових нерівностей

Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{15}{14}\right)^{|x+7|} < \left(\frac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}$.

Розв'язання. $\left(\frac{15}{14}\right)^{|x+7|} < \left(\frac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}$, $|x+7| < |x^2-3x+2|$, $|x+7|^2 < |x^2-3x+2|^2$

$\boxed{|f(x)|^2 = (f(x))^2}$

$(x+7)^2 < (x^2-3x+2)^2$, $(x+7)^2 - (x^2-3x+2)^2 < 0$

$(x+7-(x^2-3x+2))(x+7+x^2-3x+2) < 0$, $(x+7-x^2+3x-2)(x^2-2x+9) < 0$

$(-x^2+4x+5)(x^2-2x+9) < 0$, $-(x^2-4x-5)(x^2-2x+9) < 0$

$(x^2-4x-5)(x^2-2x+9) > 0$

1. $f(x) = x^2 - 4x - 5$.

За теоремою Вієта: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$,

$$f(x) = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$$

2. $g(x) = x^2 - 2x + 9$

$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 9 = 4 - 36 = -32$

$D < 0$, це означає, що $x^2 - 2x + 9 > 0$ *для будь якого* $x \in R$.

Отримаємо $(x-5)(x+1)(x^2 - 2x + 9) > 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) > 0$.

$x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ *– розв'язок нерівності.*

Відповідь. $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

7. ПРОГРЕСІЇ

Арифметична прогресія

Числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, складеному з деяким числом, називається арифметичною прогресією. Таким чином, $a_{n+1} = a_n + d$, де a_n і a_{n+1} відповідно n і $n+1$-го члена необхідно знати всі попередні члени прогресії. Формула n-го члена у вигляді

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

позбавлена цього недоліку.

Сума членів арифметичної прогресії визначається по наступних формулах:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad \text{чи} \qquad S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n.$$

Ознака арифметичної прогресії формулюється так: кожен член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним сусідніх з ним членів:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрична прогресія

Числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на деяке відмінне від нуля постійне число, називається геометричною прогресією. Таким чином, $b_{n+1} = b_n \cdot q$, де b_n і b_{n+1} відповідно n і $n+1$-й члени прогресії; q – знаменник геометричної прогресії, $q \neq 0$.

Ця формула незручна тим, що для обчислення n-го члена необхідно знати всі попередні члени прогресії. Формула

$$b_n = b_1 \cdot q^{m-1}$$

позбавлена недоліку.

Суму n перших членів геометричної прогресії обчислюють за формулою:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot \left(1 - q^n\right)}{1 - q}.$$

Ознака геометричної прогресії має наступне формулювання: кожен член геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнє геометричне сусідніх з ним членів:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Геометрична прогресія, в якої $|q| < 1$, називається нескінченно спадною, а її сума визначається за формулою

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Приклад. Знайти суму всіх двозначних додатних чисел.

Розв'язання. Очевидно, що ці числа утворюють арифметичну прогресію, в якій

$$a_n = 10; d = 1; a_n = 99.$$

Для обчислення суми прогресії необхідно знайти n:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1), 99 = 10 + n - 1, n = 90.$$

Звідси

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{10 + 99}{2} \cdot 90 = 4905.$$

Відповідь. 4905.

Приклад. Визначити, при якому x три числа a_1, a_2, a_3, узяті в зазначеній послідовності, утворюють арифметичну прогресію, якщо

$$a_1 = \lg 2; a_2 = \lg \cdot \left(3^x - 3\right); a_3 = \lg \cdot \left(3^x + 9\right).$$

Розв'язання. Якщо числа a_1, a_2, a_3, утворюють арифметичну прогресію, то для них виконується ознака арифметичної прогресії:

$$\lg\cdot\left(3^x-3\right)=\frac{\lg 2+\lg\cdot\left(3^x+9\right)}{2},\quad \lg\cdot\left(3^x-3\right)^2=\lg 2\cdot\left(3^x+9\right),\quad \left(3^x-3\right)^2=2\cdot\left(3^x+9\right).$$

Нехай $3^x=y,$ тоді $(y-3)^2=2\cdot(y+9),$ чи $y^2-8y-9=0,$ звідси $y_1=9; y_2=-1$ (не підходить).

Переходячи до змінної x, маємо $3^x=9, \quad x=2.$

Відповідь. 2.

Приклад. Обчислити $32-\frac{96}{5}+\frac{288}{25}-\frac{864}{125}+\ldots$

Розв'язання. Для даної послідовності чисел виконується ознака геометричної прогресії:

$$\left(-\frac{96}{5}\right)^2=32\cdot\frac{288}{25},$$

тому дана послідовність є геометричною прогресією, в якої

$$b_1=32; q=-\frac{3}{5}.$$

$$S=\frac{b_1}{1-q}\quad .$$

Звідси S = 20.

Відповідь. 20.

8. ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ

Приклад. Метелик і муха рухаються по прямій. Метелик доганяє муху, їх швидкості дорівнюють 1,2 м/с і 30 см/с. Через скільки секунд відстань між комахами скоротиться з 6,5 м до 20 см?

Розв'язання. Відносна швидкість зближення дорівнює різниці їх швидкостей: v = 1,2 – 0,3 = 0,9 м/с. Відстань, яку треба скоротити комахам, дорівнює різниці відстаней у початковий і кінцевий моменти часу:

$$S=6.5-0.2=6.3\ м.$$

Отже час, що нас цікавить, дорівнює $\frac{S}{v}=\frac{6{,}3}{0{,}9}=7\ c.$

Відповідь. 7 с.

Приклад. Вісімнадцятивідсотковий розчин солі масою 2 кг розбавили склянкою води (0,25 кг). Якої концентрації розчин у відсотках у результаті був отриманий?

Розв'язання. Знайдемо, скільки солі знаходиться у 2 л розчину. Для цього складемо пропорцію:

$$2 \text{ кг} - 100\%,$$
$$x \text{ солі} - 18\%$$

Отже, $x = \frac{2 \cdot 18}{100} = 0{,}36.$

Після додавання склянки води одержали розчин масою $P = 2 + 0{,}25 = 2{,}25$ кг. Відсотковий зміст солі – це та частина, що складають 0,36 кг солі в загальній кількості розчину (2,25 кг), помножена на 100.

Отже, шукана величина дорівнює $\frac{0{,}36 \cdot 100}{2{,}25} = 16\%.$

Відповідь. 16%.

9. ТРИГОНОМЕТРІЯ

Радіанна і градусна міра вимірювання кутів і дуг

1 р а д і а н — це такий центральний кут, для якого довжина відповідної дуги дорівнює довжині радіуса.

Формули переходу:

від радіанної міри до градусної: $\alpha^0 = \frac{a \cdot 180^0}{\pi}$;

від градусної до радіанної: $a = \frac{\pi \cdot \alpha^0}{180^0}$, д е α^0 — градусна міра деякого кута, a — його радіанна міра.

Корисно пам'ятати:

2π — 360°, π — 180°, $\frac{\pi}{2}$ — 90°, $\frac{\pi}{3}$ — 60°, $\frac{\pi}{4}$ — 45°, $\frac{\pi}{6}$ — 30°.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

1) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$;

2) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$;

3) $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$;

4) $tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$ $(\sin\alpha \cdot \cos\alpha \neq 0)$;

5) $ctg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$;

6) 6) $tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$.

Формули зведення

Ф о р м у л и   з в е д е н н я допомагають виразити значення тригонометричних функцій кутів вигляду $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ через функції кута α. Відповідні формули легко запам'ятати, користуючись такими правилами:

1) якщо аргумент функції має вигляд $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, назва функції змінюється на кофункцію (синус на косинус, тангенс на котангенс і навпаки), а якщо аргумент має вигляд $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, назва функції не змінюється;
2) перед утвореною функцією ставиться той знак, який має початкова функція, якщо α — кут у I чверті.

Використовуючи ці формули, а також періодичність тригонометричних функцій можна значення тригонометричної функції довільного кута звести до значення функції гострого кута. Наприклад, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$; $tg(\pi + \alpha) = tg\,\alpha$.

Приклад 1. Записати в радіанах величини кутів: $30°$; $36°$; $100°$; $225°$.

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180}\ \textit{радіан}}$$

$$30° = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6} \qquad 100° = \frac{\pi}{180} \cdot 100 = \frac{10\pi}{18} = \frac{5\pi}{9}$$

$$36° = \frac{\pi}{180} \cdot 36 = \frac{\pi}{5} \qquad 225° = \frac{\pi}{180} \cdot 225 = \frac{45\pi}{36} = \frac{5\pi}{4}$$

Приклад 2. Записати в градусах величини кутів: $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{6}$.

$\boxed{\pi = 180°}$

$\frac{\pi}{10} = \frac{180°}{10} = 18°$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180°}{3} = 2 \cdot 60° = 120°$

$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180°}{4} = 3 \cdot 45° = 135°$

$\frac{7\pi}{6} = \frac{7 \cdot 180°}{6} = 7 \cdot 30° = 210°$

Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

1. $\cos x = a$

Якщо $|a| > 1$, розв'язків немає.

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$. $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Загальний випадок $(|a|<1, a \neq 0)$: $\cos x = a$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.

У випадках, коли $a = 0$, $a = \pm 1$, теж можна користуватися загальною формулою, але це не раціонально.

2. $\sin x = a$

Якщо $|a|>1$, розв'язків немає.

$\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$. $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$..

$\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Загальний випадок $(|a| < 1, a \neq 0)$: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$.

3. $tg\, x = a$.

$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$, $n \in Z$.

Якщо $a=0$, $x = \pi n$, $n \in Z$.

4. $\mathrm{ctg}\, x = a$.

$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$, $n \in Z$.

Якщо $a=0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Якщо $a \neq 0$, можна звести дане рівняння до

рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Способи розв'язування тригонометричних рівнянь

1. Рівняння, що зводяться до квадратних

$6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

$\cos^2 x$ легко виразити через $\sin^2 x$ за допомогою основної тригонометричної тотожності

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Отже, $6(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 7 = 0$;

$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

Нехай $\sin x = y$, $|y| \leq 1$.

$6y^2 - 5y + 1 = 0$; $y_1 = \frac{1}{2}; y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\sin x = \frac{1}{2}; x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

2) $\sin x = \frac{1}{3}; x = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$.

Відповідь: $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$.

2. Спосіб розкладання на множники

$1 - \cos 8x = \sin 4x$;

$2\sin^2 4x = \sin 4x$;

$\sin 4x(2\sin 4x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0; \\ \sin 4x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 4x = \pi n, n \in Z; \\ 4x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z; \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z; x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$.

Якщо під час розв'язування одержуємо сукупність кількох серій розв'язків, доцільно перевірити, чи не можна їх описати загальною формулою. Для цього рекомендується використовувати тригонометричне коло.

3. Однорідні рівняння

У загальному випадку однорідне тригонометричне рівняння має вигляд

$$a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cos x+a_2\sin^{n-2}x\cos^2 x+\ldots+a_n\cos^n x=0, \text{ де } a_0\neq 0.$$

Значення x, при яких cos x = 0, не є розв’язком рівняння. Із цього випливає, що при діленні обох частин рівняння на $\cos^n x$ не може відбутися втрата коренів.

Отримуємо: $a_0\mathrm{tg}^n x+a_1\mathrm{tg}^{n-1}x+\ldots+a_n\mathrm{tg}^n x=0$.

Введемо нову змінну tg $x=y$ і дістанемо алгебраїчне рівняння:

$$a_0y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Якщо $\cos^k x$ у лівій частині рівняння можна винести за дужки, то ділення на $\cos^k x$ веде до втрати коренів.

Приклади.

1) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3;$

$5\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$

$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0;$

$2\mathrm{tg}^2 x + 3\mathrm{tg}\, x + 1 = 0.$

Нехай tg $x = y$. $2y^2+3y+1 = 0;$ $y_1=-1; y_2=-\frac{1}{2}$.

а) tg $x = -1$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$;

б) tg $x=-\frac{1}{2}$; $x=-arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z.$

Відповідь. $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $-arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z.$

2) $\sin^2 x-\sin 2x = 0;$

$\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0;$

$\sin x(\sin x-2\cos x) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0;\\ \sin x-2\cos x=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\pi n, n\in Z;\\ tgx=2.\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\pi n, n\in Z;\\ x=arctg\,2+\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь. $\pi n, n\in Z; arctg\,2+\pi n, n\in Z.$

4. Спосіб введення допоміжного аргументу

Цей спосіб застосовується для розв'язання рівнянь виду a sin x + b cos x = c.

Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$. Дістанемо:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Очевидно, що $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1, \left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1, \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1.$

Із цього випливає, що можна ввести до розгляду кут $\varphi = arctg\frac{b}{a}$.

Тоді $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi;\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, і рівняння набуває вигляду

$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ або $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Можна прийняти: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi;\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$. Тоді дістанемо

$\cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Рівняння виду a sin x + b cos x = c можна розв’язувати і в інший спосіб: $2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)=c.$ Використавши тотожність $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, дістанемо однорідне рівняння.

5. Рівняння, що містять тригонометричні функції у знаменнику. Відбір коренів

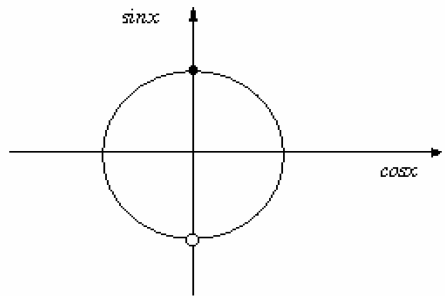
Ці рівняння зводять до вигляду $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, а потім розв’язують систему

$$\begin{cases} f(x)=0\\ \varphi(x)\neq 0.\end{cases}$$

Приклад. $\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=-1,\\ \sin x\neq -1.\end{cases}\quad \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\\ x\neq -\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.\end{cases}$

Відбір коренів зручно виконувати, скориставшись тригонометричним колом.

Позначимо на колі точки, що відповідають кутам виду $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.



Потім відкинемо (виколемо) ті з них, які мають вигляд $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

Відповідь. $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

6. Випадок, коли треба знайти тільки певні розв'язки

Приклад. Скільки розв'язків рівняння $\sin^2 3x+\sin^2 5x=1$ належать проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$?

$\sin^2 3x+\sin^2 5x=1$;

$\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 10x}{2}=1$;

$1-\cos 6x+1-\cos 10x=2$; $\cos 6x+\cos 10x=0$; $2\cos 8x\cos 2x=0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos 8x=0;\\ \cos 2x=0.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}8x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}, n\in Z;\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z.\end{array}\right.$$

Треба відповісти на запитання, скільки розв'язків належить проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1 спосіб. Розглянемо нерівності:

1) $0\le\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}\le\frac{\pi}{2}$; 2) $0\le\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\le\frac{\pi}{2}$;

$0\le 1+2n\le 8$; $\quad$ $0\le 1+2n\le 2$;

$-0{,}5\le n\le 3{,}5$. $\quad$ $-0{,}5\le n\le 0{,}5$.

n=0;1;2;3, $\quad$ n=0,

оскільки $n\in Z$. $\quad$ оскільки $n\in Z$.

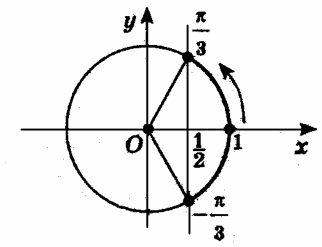
Таким чином, проміжку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ належать п’ять розв’язків рівняння.

*2 спосіб.*_ Можна скористатися тригонометричним колом, якщо позначити на ньому відповідні розв’язкам рівняння точки й відібрати ті, що містяться в першій чверті.

Розв’язування найпростіших тригонометричних нерівностей

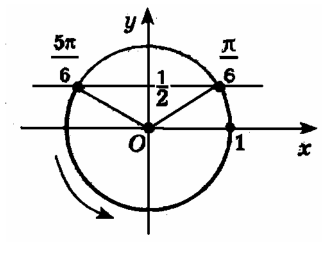
Найзручнішим є спосіб розв’язування тригонометричних нерівностей за допомогою тригонометричного кола.

Приклади.



1) $\cos x \geq \frac{1}{2}$. Побудуємо одиничне коло. Проведемо пряму $x = \frac{1}{2}$. Вона перетинає коло у двох точках. Одна з них відповідає куту $\arccos\frac{1}{2}$ або $\frac{\pi}{3}$, друга – куту $-\arccos\frac{1}{2}$ або $-\frac{\pi}{3}$. Ці дві точки розбивають коло на дві дуги. Точки однієї дуги мають абсцису, більшу за $\frac{1}{2}$, другої дуги – меншу. Щоб описати всі точки потрібної дуги, «пройдемо» по ній у додатному напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Ураховуючи періодичність функції $y = \cos x$, дістанемо відповідь:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z.$$



2) $\sin x \angle \frac{1}{2}$. Діючи аналогічно, отримаємо рисунок, на якому зображена пряма $y = \frac{1}{2}$;

Умову задачі задовольняють точки, що розташовані на колі нижче прямої $y = \frac{1}{2}$.

Але щоб записати проміжок, треба точку $\frac{\pi}{6}$ записати в другому вигляді. Для цього додамо 2π до $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$. Ураховуючи період, дістанемо відповідь: $\sin x \angle \frac{1}{2}$ при $x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z$.

3) $tgx \geq 2$. Ураховуючи, що функція $y = tgx$ є зростаючою на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$, отримуємо

$arctg\, 2 + \pi n \leq x \angle \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

$tgx < \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leq arctg\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$.

10. ГЕОМЕТРІЯ

Розв'язування задач з геометрії

*Приклад 1***.** У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола поділяє гіпотенузу на відрізки 5 см і 12 см. Знайти катети трикутника.

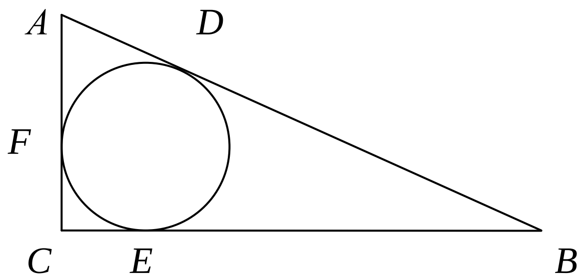


Рис. 1

Розв'язання. В Δ ABC (рис. 1) кут C – прямий, AD=5 см, DB=12 см, E і P – точки дотику вписаного кола і відповідних катетів.

AD= AF, BD=BE, FC=EC по властивості дотичних до кола, проведених з однієї точки. Нехай EC=x, тоді за теоремою Піфагора для ABC можна записати

$$(5+x)^2 + (12+x)^2 = (5+12)^2, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -20$$ (не підходить).

Отже, AC=5+3=8 см, BP=12+3=15 см.

*Відповідь***.** 8 см, 15 см.

Приклад 2. Середня лінія рівнобічної трапеції, описаної біля кола, дорівнює 68 см. Визначити радіус цього кола, якщо нижня основа трапеції більше верхньої на 64 см.

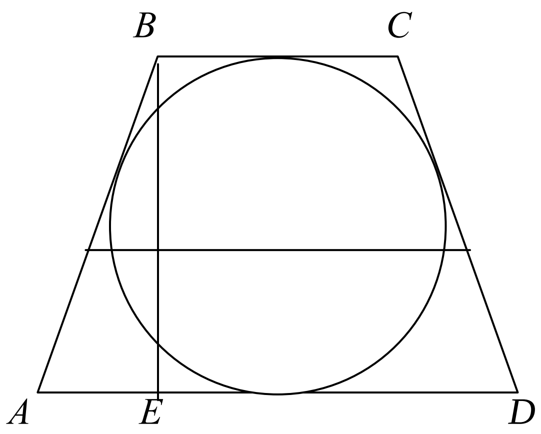


Рис. 2

Розв'язання. Якщо креслення виконане неакуратно, то може здаватися, що середня лінія трапеції являється діаметром кола. З рис. 2 видно, що це не так.

$\frac{BC + AD}{2} = 68$ по властивості середньої лінії трапеції. $AD – BC$ = 64 за умовою.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, одержуємо AD=100, – BC=36. За властивістю описаного чотирикутника AB+CD=BC+AD. Завдяки тому, що AB=CD, одержимо $AB = \frac{BC + AD}{2}$, чи AB=68.

Розглянемо прямокутний трикутник ABE $(BE \perp AD)$. Завдяки тому, що трапеція рівнобічна, одержимо $AE = \frac{AD - BC}{2} = 32.$

За теоремою Піфагора для Δ ABE маємо $AB^2 = AE^2 + BE^2$. Звідси $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60.$ Знаючи, що BE=2R, маємо R=30.

Відповідь. 30 см.

Приклад 3. Висота конуса складає $\frac{2}{3}$ від діаметра його основи. Знайти відношення площі основи конуса до площі його бічної поверхні.

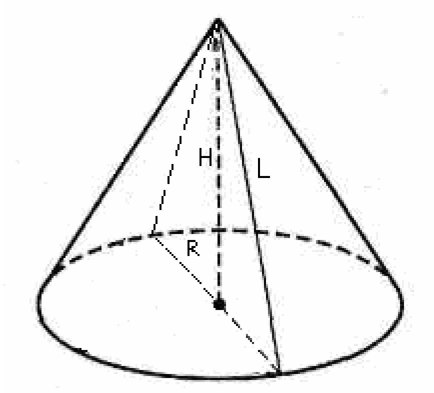


Рис. 3

*Розв'язання***.** Площа основи конуса $S_{осн} = \pi \cdot R^2$. Площа бічної поверхні конуса $S_{бічн.пов.} = \pi \cdot R \cdot L$, де L – довжина твірної (рис. 3). За теоремою Піфагора

$L^2 = H^2 + R^2; H = \frac{2}{3} \cdot 2R = \frac{3}{4}R.$

Звідси $L = \sqrt{\frac{16}{9}R^2 + R^2} = \frac{5}{3}R.$ Отже конус має $S_{бічн.пов.} = \pi R \cdot \frac{5}{3}R = \frac{5}{3}R^2$. Відношення, що необхідно знайти:

$$\frac{\pi R^2}{\frac{5}{3}\pi R^2} = \frac{2}{5} = 0{,}6.$$

*Відповідь***.** 0,6.

11. ПРИКЛАДИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Тест зовнішнього незалежного оцінювання з математики перевіряє:

- відповідність знань, умінь і навичок учнів програмовим вимогам;
- рівень навчальних досягнень учнів;
- ступінь підготовленості випускників загальноосвітніх навчальних закладів до подальшого навчання у вищих навчальних закладах.

При укладанні тесту були використані підручники та посібники, рекомендовані Міністерством освіти і науки України для класів універсального, природничого, фізико-математичного профілів.

ЗАВДАННЯ З ВИБОРОМ ОДНІЄЇ ПРАВИЛЬНОЇ ВІДПОВІДІ

Завдання **1-25** мають по п’ять варіантів відповіді, серед яких лише *один правильний*. Правильно виконане завдання оцінюється **1 балом**.

1. Розташуйте у порядку спадання числа $\sqrt{5};\ 2^{\log_2 5};\ \frac{5}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$2^{\log_2 5};\ \frac{5}{2};\ \sqrt{5}$	$\frac{5}{2};\ \sqrt{5};\ 2^{\log_2 5}$	$\frac{5}{2};\ 2^{\log_2 5};\ \sqrt{5}$	$\sqrt{5};\ \frac{5}{2};\ 2^{\log_2 5}$	$2^{\log_2 5};\ \sqrt{5};\ \frac{5}{2}$

2. Банк сплачує своїм вкладникам 8% річних. Визначте, скільки грошей треба покласти на рахунок, щоб через рік отримати 60 *грн.* прибутку.

А	Б	В	Г	Д
1150 *грн.*	1050 *грн.*	950 *грн.*	750 *грн.*	850 *грн.*

3. З натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне. Яка імовірність того, що це число є дільником числа 30?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{15}$

4. Розв’яжіть нерівність $x+\frac{1}{x-3}>\frac{1}{x-3}-2$.

А	Б	В	Г	Д
$x\in(-2;3)$	$x\in(-2;+\infty)$	$x\in R$	$x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$	$x\in(-2;3)\cup(3;+\infty)$

5. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{x+9}$.

А	Б	В	Г	Д
$D(y)=[3;+\infty)$	$D(y)=[9;+\infty)$	$D(y)=[-3;+\infty)$	$D(y)=[-9;+\infty)$	$D(y)=[-9;9]$

6. Будівельна компанія закупила для нового будинку металопластикові вікна та двері у відношенні $4:1$. Укажіть число, яким може виражатися загальна кількість вікон та дверей в цьому будинку.

А	Б	В	Г	Д
41	45	54	68	81

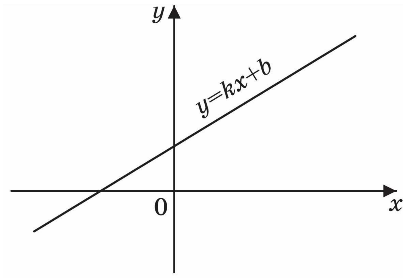
7. Обчисліть $\sin 210°$.

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Розв’яжіть рівняння $tg\frac{x}{2}=\sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left\{(-1)^k\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3},\ де\ k\in Z\right\}$	$\left\{\frac{\pi k}{3},\ де\ k\in Z\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{3}(3k+2),\ де\ k\in Z\right\}$	$\left\{\frac{2\pi}{3}(3k+1),\ де\ k\in Z\right\}$	$x\in\phi$

9. За видом графіка функції $y = kx + b$ визначте знаки коефіцієнтів k і b. Оберіть правильне твердження.



А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} k > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0 \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k < 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k > 0 \\ b > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} k = 0 \\ b > 0 \end{cases}$

10. Укажіть парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = x$	$y = 2^x$	$y = tgx$	$y = \log_2 x$	$y = x^2$

11. Обчисліть $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

12. Розв’яжіть нерівність $\log_{0,1} 10 < \log_{0,1} x$.

А	Б	В	Г	Д
$x \in (10; +\infty)$	$x \in (0; 10)$	$x \in (0{,}1; 10)$	$x \in (-10; 0)$	$x \in (-\infty; 10)$

13. Розв’яжіть рівняння $\sqrt[3]{8^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left\{\frac{2}{3}\right\}$	$\left\{\frac{1}{6}\right\}$	$\left\{1\frac{1}{2}\right\}$	$\left\{\frac{5}{6}\right\}$	$\left\{\frac{2}{5}\right\}$

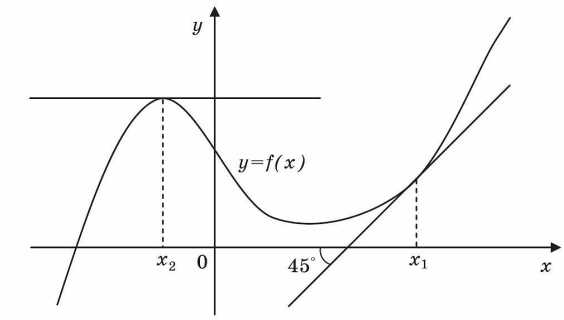
14. Укажіть, скільки дійсних коренів має рівняння $x^3 - 4|x| = 0$.

А	Б	В	Г	Д
жодного	*один*	*два*	*три*	*більше трьох*

15. Знайдіть первісну функції $f(x) = 2x + 2$, графік якої проходить через точку з координатами $(1; 4)$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = x^2 + 2x$	$F(x) = x^2 + 2x + 1$	$F(x) = x^2 + 2x + 2$	$F(x) = x^2 + 2x - 4$	$F(x) = x^2 + 2x - 23$

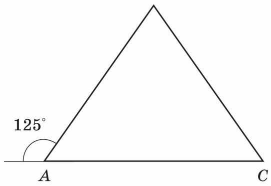
16. На рисунку зображений графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 та x_2. Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть



$f'(x_1) + f'(x_2)$.

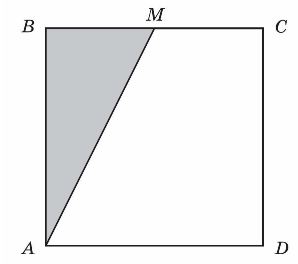
А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. Градусна міра зовнішнього кута A рівнобедреного трикутника ABC $(AB = BC)$ становить $125°$. Знайдіть градусну міру внутрішнього кута B.



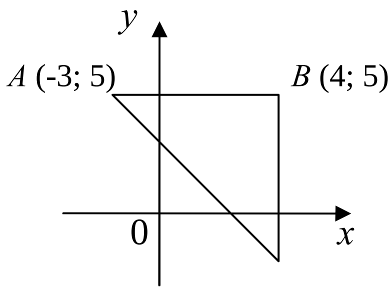
А	Б	В	Г	Д
30°	40°	50°	60°	70°

18. Точка M – середина сторони квадрата $ABCD$. Площа зафарбованої частини дорівнює $7\ см^2$. Знайдіть площу всього квадрата.



А	Б	В	Г	Д
$S_{ABCD} = 14\ см^2$	$S_{ABCD} = 21\ см^2$	$S_{ABCD} = 28\ см^2$	$S_{ABCD} = 35\ см^2$	$S_{ABCD} = 42\ см^2$

19. У прямокутній системі координат зображено прямокутний рівнобедрений трикутник *ABC*, в якому *A*(-3; 5) і *B*(4; 5) (див. рисунок). Знайдіть координати точки *C*.



А	Б	В	Г	Д
C (-4; 2)	*C (-4; -4)*	*C (2; 2)*	*C (4; -2)*	*C (2; -4)*

20. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює a.

А	Б	В	Г	Д
$V = \frac{\pi a^3}{3}$	$V = \frac{2\pi a^3}{3}$	$V = \frac{4\pi a^3}{3}$	$V = \frac{\pi a^3}{6}$	$V = \frac{\pi a^3}{12}$

21. Молоко містить 3% білків. Скільки всього білків міститься в $600\ г$ молока?

А	Б	В	Г	Д
$1{,}8\ г$	$18\ г$	$20\ г$	$180\ г$	$200\ г$

22. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, якщо $A(-2; 3)$ і $B(-8; -5)$.

А	Б	В	Г	Д
$\overline{AB}(6; 8)$	$\overline{AB}(-10; -8)$	$\overline{AB}(-10; -2)$	$\overline{AB}(-6; -2)$	$\overline{AB}(-6; -8)$

23. У Оксани є певна кількість горіхів. Коли вона розклала їх у купки по 5 горіхів, то два горіхи залишилися, а коли розклала їх по три, то зайвих горіхів не виявилося. Яка кількість горіхів із запропонованих варіантів могла бути в Оксани?

А	Б	В	Г	Д
32	45	57	63	81

24. Задано геометричну прогресію, для якої другий член $b_2 = 12$ і знаменник $q = -2$. Знайдіть b_1.

А	Б	В	Г	Д
$b_1 = 24$	$b_1 = 14$	$b_1 = 10$	$b_1 = -6$	$b_1 = -24$

25. Із поданих нижче чисел укажіть найбільше.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{31}{29}$	$\frac{29}{27}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{25}{23}$	$\frac{23}{21}$

ЗАВДАННЯ НА ВСТАНОВЛЕННЯ ВІДПОВІДНОСТІ

Завдання **26-28** передбачає установлення відповідності. За кожну правильно позначену логічну пару можна отримати **1 бал**. Максимальна кількість балів за повністю правильно виконане завдання становить **4 бали**.

26. Встановити відповідність між заданими виразами (**1-4**) та виразами, що їм тотожно дорівнюють (**А-Д**):

1	$(2a+b)^2$	**А**	$4a^2-b^2$
2	$(2a-b)(2a+b)$	**Б**	$4b^2-2ab+a^2$
3	$(a-2b)^2$	**В**	$2a^2+3ab-2b^2$
4	$(a+2b)(2a-b)$	**Г**	$4a^2+4ab+b^2$
		Д	$4b^2-4ab+a^2$.

27. Установіть відповідальність між функціями, заданими формулами (1-4), та їх властивостями (А-Д).

Функція	*Властивість функції*
1 $y=\cos x$	**А** – областю визначення функції є інтервал $(0;+\infty)$
2 $y=ctg\ x$	**Б** – областю значень функції є відрізок [-1; 1]
3 $y=4$	**В** – функція спадає на інтервалі $(-\infty;+\infty)$
4 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	**Г** – непарна функція
	Д – періодична функція, що не має найменшого додатного періоду.

28. Установіть відповідальність між перерізами геометричних тіл (1-4) і їх назвами (А-Д).

Переріз	*Назва перерізу*
1 – діагональний переріз правильної шестикутної призми	**А** круг
2 – переріз циліндра площини, що перетинає його твірну і перпендикулярна до неї	**Б** коло
3 – переріз конуса площиною, що проходить через його вершину та хорду основи	**В** шестикутник
4 – переріз сфери площиною, що проходить через дві різні точки сфери	**Г** прямокутник
	Д трикутник

ЗАВДАННЯ З КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

За правильно виконане завдання з короткою відповіддю Ви отримуєте **2 бали**; за неправильно виконане або взагалі не виконане завдання Ви отримуєте **0 балів**.

29 Ресторан швидкого харчування в рекламних цілях спочатку знизив ціну комплексного обіду на 20%, але згодом нову ціну підвищив на 30%. На скільки відсотків кінцева ціна обіду є більшою від початкової?

30 Знайдіть значення виразу $\dfrac{53}{8-\sqrt{11}}+\dfrac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}-\dfrac{9}{\sqrt{13}+2}$.

31 Укажіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності $\dfrac{(x-3)(x+10)(x^2+8x-9)}{x^2+8x-9}<0$.

32 На перегоні, довжина якого дорівнює $240\ км$, поїзд рухався зі швидкістю на $10\ км/год$ менше, ніж мала бути за розкладом, і запізнився на $48\ хв$. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

33 Обчисліть $2\sin 15°\cdot\cos 15°\cdot tg 30°\cdot ctg 30°$.

34 Розв'яжіть рівняння $(x^2-9)\sqrt{-15+8x-x^2}=0$. Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповідь їх суму.

35 Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см, гострий кут - 30°. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини її основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди (у см^3).

36 Два кола, довжини яких дорівнюють 9π см і 36π см, мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між центрами цих кіл (у см).

12. ВІДПОВІДІ ДО ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Номер завдання	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Номер відповіді	А	Г	В	Д	Г

Номер завдання	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Номер відповіді	Б	Д	Г	Г	Д

Номер завдання	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Номер відповіді	А	Б	Г	Г	Б

Номер завдання	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Номер відповіді	А	Д	В	Г	Г

Номер завдання	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
Номер відповіді	Б	Д	В	Г	Д

Завдання №26

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1				Х	
2	Х				Х
3					Х
4			Х		

Завдання №27

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1		Х			
2				Х	
3					Х
4			Х		

Завдання №28

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1				Х	
2	Х				
3					Х
4		Х			

Номер завдання	**Відповідь**
29	4%
30	10
31	-8
32	60 км/ч
33	0,5
34	8
35	12 $см^3$
36	13,5 см

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа. – М.: Просвещение, 1990. – 416 с.
2. Карагодова О.О., Черняк О.І. Збірник задач з математики з аналізом розв’язків: Посібн. для старшокласників та абітурієнтів. – К.: «Знання», КОО, 2000. – 332 с.
3. Роганін О.М. Збірник тренувальних вправ із математики. – Х: Весна, 2008.
4. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: Справочник. – М.: Изд. «Факториал», 1997. – 216 с.
5. Математика. Самовчитель майбутнього студента / О.М.Титаренко, О.М. Роганін. – Х: Форсинг плюс, 2007.
6. Забєлишинська М.Я. Зовнішнє оцінювання (підготовка). Математика. 5-11 класи: Довідник. – Х.: Веста: Видавництво «Ранок», 2007.
7. Збірник тренувальних завдань із математики для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / О.Ю.Максименко, О.О.Тарасенко та ін. – Х: Торсінг плюс, 2007.
8. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Под редакцией М.И. Сканави. – М.: Высш. шк, 1995. – 432 с.
9. Куланин Е.Д. и др. 3000 конкурсных задач по математике. – М.: Рольф, 1997. – 608 с.

Навчальне видання

Бізюк Валерій Васильович
Александрова Людмила Михайлівна
Грєвцова Олена Федорівна

Методичні вказівки з математики (для слухачів підготовчих курсів центру довузівської підготовки і абітурієнтів, які готуються до проходження зовнішнього незалежного оцінювання якості знань).

Редактор: М.З. Аляб'єв

Комп'ютерна верстка: Ю.П. Степась

План 2010, поз. 556М

Підп. до друку 22.06.2010	Формат 60 х 84/16
Друк на різографі	Ум. друк. арк. 2,5
Тираж 50 пр.	Зам №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 731 від 19.12.2001