ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ ДО РОЗРАХУНКУ ЗОВНІШНІХ ТЕЧІЙ В’ЯЗКОЇ РІДИНИ В НАБЛИЖЕННІ ОЗЕЄНА

С. М. Ламтюгова

Розглядається задача повільного обтікання нескінченного циліндра в'язкою нестисливою рідиною. У циліндричних координатах течія описується рівнянням (наближення Озеєна)

$$\left(D^2 - \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) D^2 \psi = 0 \quad \text{зовні} \quad \overline{\Omega},$$

де $D^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $\psi = \psi(r,\theta)$ – функція течії, пов’язана з компонентами вектора швидкості співвідношеннями $v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}$, $v_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial r}$, $v_z = 0$; (r, θ, z) – змінні циліндричної системи координат.

Якщо межа тіла непроникна та нерухома, то

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0 \ \text{ і } \ \partial_{\mathbf{n}}\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль; поведінка функції течії на нескінченності така:

$$\psi \sim U_\infty r \sin\theta, \text{ коли } r \to \infty, \tag{2}$$

де U_∞ – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

Нами доведено таку теорему.

Теорема. При будь-якому виборі досить гладких функцій Φ_1 і Φ_2 ($\Phi_1 \cdot r^{-1} \to 0$, коли $r \to +\infty$) крайовим умовам (1) і умові на нескінченності (2) точно задовольняє функція вигляду $\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2$, де $\psi_0 = U_\infty(r - R^2 \cdot r^{-1})\sin\theta$ – розв’язок задачі про обтікання ідеальною рідиною кругового циліндра радіусу R, $\omega_M = f_M(\omega)$,

$$f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp(M\omega(\omega - M)^{-1}), & 0 \le \omega < M, \\ 1, & \omega \ge M, \end{cases}$$

а ω – така функція, що: 1) $\omega > 0$ зовні $\overline{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\dfrac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 1$ на $\partial\Omega$.

Вважаємо, що циліндр радіусу R належить тілу, що обтікається. Функція ω з вказаними властивостями будується за допомогою методу R-функцій, для апроксимації невизначених компонент Φ_1 і Φ_2 використовується проекційний метод Гальоркіна-Петрова, причому функція Φ_1 апроксимується виразом вигляду $\sum_{k=1}^{m_1} a_k \varphi_k$, де $\{\varphi_k\}$ – повна система частинних розв’язків рівняння $D^4\psi = 0$ відносно циліндра скінченного радіусу.