Шістнадцята всеукраїнська (Одинадцята міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ТА R-ФУНКЦІЙ ДО ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ОБТІКАННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ЦИЛІНДРА В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Ламтюгова Світлана Миколаївна, Україна
Харківський національний університет радіоелектроніки
Факультет прикладної математики та менеджменту
maliatko@gmail.com

Розглянемо стаціонарне обтікання циліндричного тіла в'язкою нестисливою рідиною. В циліндричній системі координат (ρ, φ, z) течія описується нелінійним рівнянням [1]:

$$\nu\Delta^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\varphi} \text{ зовні } \overline{\Omega}, \qquad (1)$$

де $\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, $\Delta^2\psi = \Delta(\Delta\psi)$. Тут $\psi = \psi(\rho,\varphi)$ – функція течії, $v_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, $v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$. Якщо межа тіла непроникна та нерухома, то для функції течії можна поставити такі крайові умови:

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (2)$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль; поведінка функції течії на нескінченності задається таким граничним співвідношенням:

$$\psi \sim U_\infty\rho\sin\varphi, \text{ коли } \rho\to\infty, \qquad (3)$$

де U_∞ – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

Задачу (1) – (3) пропонується розв'язувати методом послідовних наближень. Нехай початкове наближення $\psi^{(0)}$ відоме. За початкове наближення $\psi^{(0)}$ можна взяти розв'язок відповідної задачі Озеєна [2]. Якщо наближення $\psi^{(i)}$ відоме, то наступне наближення $\psi^{(i+1)}$ знаходимо як розв'язок лінійної задачі

$$\nu\Delta^2\psi^{(i+1)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\psi^{(i)}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\rho}\frac{\partial\Delta\psi^{(i)}}{\partial\varphi} \text{ зовні } \overline{\Omega}, \qquad (4)$$

$$\psi^{(i+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi^{(i+1)}}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (5)$$

$$\psi^{(i+1)} \sim U_\infty\rho\sin\varphi, \text{ коли } \rho\to\infty, \ i = 0,1,2,\ldots \qquad (6)$$

Для розв'язання задачі (4) – (6) пропонується використовувати метод R-функцій акад. НАН України В. Л. Рвачова [3].

Нехай зовні $\overline{\Omega}$ відома досить гладка функція $\omega(\rho,\varphi)$, що має такі властивості: 1) $\omega(\rho,\varphi)>0$ зовні $\overline{\Omega}$; 2) $\omega(\rho,\varphi)\big|_{\partial\Omega}=0$; 3) $\dfrac{\partial\omega(\rho,\varphi)}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega}=-1$.

В роботі [4] введено до розгляду досить гладку функцію $y=f_M(x)$, яка задовольняє умовам:

$$\text{а) } f_M(0)=0\,;\quad \text{б) } f_M'(0)=1\,;\quad \text{в) } f_M'(0)\ge 0\ \ \forall x\ge 0\,; \tag{7}$$
$$\text{г) } f_M(x)\equiv 1\ \ \forall x\ge M\ \ (M=\mathrm{const}>0)\,.$$

Легко перевірити, що умовам (7) задовольняє, наприклад, функція

$$f_M(\omega)=\begin{cases}1-\exp\left(\dfrac{M\omega}{\omega-M}\right), & 0\le\omega<M,\\ 1, & \omega\ge M.\end{cases}$$

Помітимо, що $f_M(x)\in C^{\infty}[0,\infty)$. Позначимо $\omega_M(\rho,\varphi)=f_M[\omega(\rho,\varphi)]$.

Нами пропонується на кожному кроці ітераційного процесу наближений розв'язок задачі (4) – (6) шукати у вигляді:

$$\psi^{(i+1)}=\omega_M^2(\psi_0+\Phi_1^{(i+1)})+\omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2^{(i+1)},$$

де $\psi_0=U_\infty\left(\rho-R^2\cdot\rho^{-1}\right)\sin\varphi$ – розв'язок задачі обтікання ідеальною рідиною циліндра радіусу R (вважаємо, що циліндр радіусу R цілком лежить в $\overline{\Omega}$). Для апроксимації невизначених компонент $\Phi_1^{(i+1)}$ і $\Phi_2^{(i+1)}$ використовується проекційний метод Гальоркіна-Петрова, причому функція $\Phi_1^{(i+1)}$ апроксимується виразом вигляду $\sum\limits_{k=1}^{m_1}\alpha_k^{(i+1)}\varphi_k$, де $\{\varphi_k\}$ – повна система частинних розв'язків рівняння $\Delta^2\psi=0$ відносно циліндра скінченного радіусу.

Обчислювальний експеримент було проведено для задачі обтікання еліптичного циліндра $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ при $a=2$, $b=1$, $U_\infty=1$, $M=0{,}8$ і різних числах Рейнольдса $\mathrm{Re}=\dfrac{1}{\nu}$.

1. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 432 с.

2. *Ламтюгова С.М.* Чисельний аналіз зовнішніх течій в'язкої рідини (наближення Озеєна) методом R-функцій // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука: Матеріали конференції. – Т. 1. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – С. 268.

3. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

4. *Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л.* Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. – № 9. – 1972. – С. 837 – 839.