П’ятнадцята Всеукраїнська (Десята Міжнародна) студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ТА R-ФУНКЦІЙ ДО РОЗРАХУНКУ ЗОВНІШНІХ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ В’ЯЗКИХ ТЕЧІЙ

Ламтюгова Світлана Миколаївна, Україна
Харківський національний університет радіоелектроніки
Факультет прикладної математики та менеджменту
maliatko@gmail.com

При розгляді вісесиметричних течій в'язкої нестисливої рідини у сферичній системі координат r, θ, φ вважається, що всі величини не залежать від φ і $v_\varphi = 0$. Течія описується нелінійним рівнянням:

$$\nu E^4 \psi = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial E^2\psi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial E^2\psi}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)E^2\psi \quad \text{зовні } \overline{\Omega}, \qquad (1)$$

де $E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$. Тут $\psi = \psi(r,\theta)$ – функція течії, $v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$. Якщо межа тіла непрониклива та нерухома, то для функції течії мають місце такі крайові умови:

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (2)$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль; поведінка функції течії на нескінченності задається таким граничним співвідношенням:

$$\psi \sim \frac{1}{2}U_\infty r^2 \sin^2\theta, \text{ коли } r \to \infty, \qquad (3)$$

де U_∞ – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

Задачу (1) – (3) пропонується розв’язувати методом послідовних наближень. Нехай початкове наближення $\psi^{(0)}$ відоме. За початкове наближення $\psi^{(0)}$ можна взяти розв’язок відповідної задачі Стокса [1]. Якщо наближення $\psi^{(i)}$ відоме, то наступне наближення $\psi^{(i+1)}$ знаходимо як розв’язок лінійної задачі

$$\nu E^4 \psi^{(i+1)} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\theta}\frac{\partial E^2\psi^{(i)}}{\partial r} - \frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial r}\frac{\partial E^2\psi^{(i)}}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\theta}\right)E^2\psi^{(i)}, \qquad (4)$$

$$\psi^{(i+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ \ \frac{\partial\psi^{(i+1)}}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0\,, \tag{5}$$

$$\psi^{(i+1)} \sim \frac{1}{2}U_{\infty}r^2\sin^2\theta\,, \text{ коли } r \to \infty\,,\ i = 0,1,2,... \tag{6}$$

Для розв'язання задачі (4) – (6) пропонується використовувати метод R-функцій акад. НАН України В. Л. Рвачова [2].

Нехай зовні $\overline{\Omega}$ відома досить гладка функція $\omega(r,\theta)$, що має такі властивості: 1) $\omega(r,\theta) > 0$ зовні $\overline{\Omega}$; 2) $\omega(r,\theta)\big|_{\partial\Omega} = 0$; 3) $\left.\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = -1$.

Використаємо [3] досить гладку функцію $y = f_M(x)$, яка задовольняє умови:

$$\text{а) } f_M(0) = 0\,;\quad \text{б) } f'_M(0) = 1\,;\quad \text{в) } f'_M(0) \ge 0\ \ \forall x \ge 0\,; \tag{7}$$
$$\text{г) } f_M(x) \equiv 1\ \ \forall x \ge M\ \ (M = \text{const} > 0)\,.$$

Легко перевірити, що умовам (7) задовольняє, наприклад, функція

$$f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp(M\omega(\omega - M)^{-1}), & 0 \le \omega < M, \\ 1, & \omega \ge M. \end{cases}$$

Зазначимо, що $f_M(x) \in C^{\infty}[0,\infty)$. Позначимо $\omega_M(r,\theta) = f_M[\omega(r,\theta)]$.

Нами пропонується на кожному кроці ітераційного процесу наближений розв'язок задачі (4) – (6) шукати у вигляді:

$$\psi^{(i+1)} = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1^{(i+1)}) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2^{(i+1)}\,,$$

де $\psi_0 = \frac{1}{4}U_{\infty}(r - R)^2\left(2 + R\cdot r^{-1}\right)\sin^2\theta$ – розв'язок рівняння Стоксу для задачі про обтікання сфери радіусу R (вважаємо, що сфера радіусу R цілком лежить в $\overline{\Omega}$). Для апроксимації невизначених компонент $\Phi_1^{(i+1)}$ і $\Phi_2^{(i+1)}$ використовується проекційний метод Гальоркіна-Петрова, причому функція $\Phi_1^{(i+1)}$ апроксимується виразом вигляду $\sum\limits_{k=1}^{m_1} a_k^{(i+1)}\varphi_k$, де $\{\varphi_k\}$ – повна система частинних розв'язків рівняння $E^4\psi = 0$ відносно сфери скінченного радіусу.

1. *Колосова С.В., Ламтюгова С.М., Сидоров М.В.* Про один метод розв'язання зовнішніх задач гідродинаміки в'язкої рідини у наближенні Стокса // Тринадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука: Матеріали конференції. – Т. 2. – К.: НТУУ, 2010. – С. 150.

2. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

3. *Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л.* Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. – № 9. – 1972. – С. 837 – 839.