ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ МАССООБМЕНА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА С ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ламтюгова С.Н.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36)
e-mail: maliatko@gmail.com

The problem of mass transfer of the cylindrical body with uniform translational flow is considered. *R*-functions and the Bubnov-Galerkin method are used for solving the problem. Computational experiment has been conducted for the problem of flow around a circular and elliptic cylinders at different Peclet numbers.

В работе рассматривается задача массообмена цилиндрического тела с потоком вязкой несжимаемой жидкости [1]. Для описания процесса при малых числах Пекле используется приближение Озеена:

$$\Delta c = \mathrm{Pe}\, U_\infty \left(\cos\varphi \frac{\partial c}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) \text{ вне } \bar{\Omega}. \tag{1}$$

В общем случае математическая модель задачи массообмена цилиндрического тела с потоком вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\Delta c = \frac{\mathrm{Pe}}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial c}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) \text{ вне } \bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$c\big|_{\partial\Omega} = c_0, \tag{3}$$

$$c \to 0 \text{ при } \rho \to +\infty, \tag{4}$$

где $c = c(\rho, \varphi)$ – концентрация, c_0 – заданная концентрация на границе $\partial\Omega$ обтекаемого тела, $\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, Pe – число Пекле, $\psi = \psi(\rho, \varphi)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$, $v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial \rho}$, U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Задача (1), (3), (4) от функции тока $\psi = \psi(\rho, \varphi)$ не зависит. А для задачи (2) – (4) функцию тока $\psi = \psi(\rho, \varphi)$ можно найти, например, как решение линеаризованной задачи медленного обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью (приближение Озеена) [2] или как решение нелинейной задачи обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью [3].

Приближенное решение поставленных задач ищем в виде функции

$c = c_0(1-\omega_M) + \omega_M \Psi_1 + \omega_M(1-\omega_M)\Psi_2$, которая при любом выборе достаточно гладких функций Ψ_1 и Ψ_2 ($\Psi_1 \to 0$ при $\rho \to +\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (3) и условию на бесконечности (4), $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega) = \begin{cases} 1-\exp(M\omega(\omega-M)^{-1}), & 0 \le \omega < M, \\ 1, & \omega \ge M, \end{cases}$ а ω – функция, обладающая свойствами: 1) $\omega > 0$ вне $\overline{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$ – строится с использованием конструктивного аппарата теории *R*-функций [4]. Для аппроксимации неопределенных компонент Ψ_1 и Ψ_2 используется проекционный метод Бубнова-Галеркина [5]. Функции Ψ_1 и Ψ_2 аппроксимируются выражениями вида

$$\Psi_1 = \sum\nolimits_{k=1}^{m_1} a_k \varphi_k \,,\ \Psi_2 = \sum\nolimits_{j=1}^{m_2} \beta_j \tau_j \,,$$

где $\{\varphi_k(\rho,\varphi)\} = \left\{\rho^{-k}\cos k\varphi, \rho^{-k}\sin k\varphi\right\}$, $\{\tau_j(\rho,\varphi)\} = \left\{1, \rho^j \cos k\varphi, \rho^j \sin k\varphi\right\}$.

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и эллиптического цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $U_\infty = 1$, $c_0 = 1$, $M = 5$ при разных числах Рейнольдса и Пекле. На рис. 1 приведены линии концентрации при $\mathrm{Re} = 0$, $Pe = 10$ для кругового цилиндра, на рис. 2 – для эллиптического.

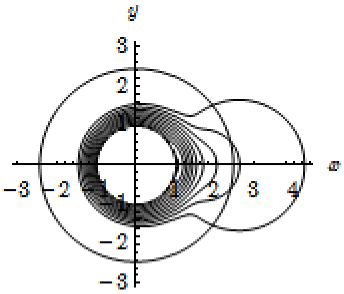

Рис. 1

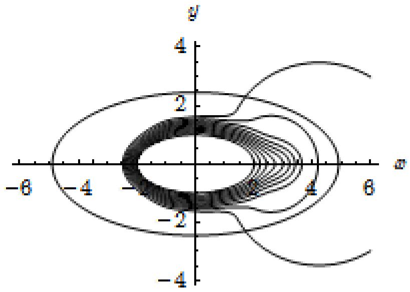

Рис. 2

1. Химическая гидродинамика: справочное пособие / А.М. Кутепов, А.Д. Полянин, З.Д. Запрянов [и др.]. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.

2. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат / С.Н. Ламтюгова // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №1. – С. 112 – 122.

3. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование стационарного обтекания цилиндрического тела вязкой жидкостью / С.Н. Ламтюгова // Вісник Запорізького національного університету. – 2012. – № 2. – С.57–65.

4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

5. Приближенное решение операторных уравнений. / Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 420 с.