ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ МАССООБМЕНА ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ С ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ламтюгова С.Н.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36)
e-mail: maliatko@gmail.com

The problem of mass transfer of the body of revolution with uniform translational flow is considered. The *R*-functions method, the successive approximations method and the Galerkin-Petrov method are used for solving the task. The computational experiment has been conducted for a problem of flowing past sphere and ellipsoid of revolution at Peclet number equal to 10.

В работе рассматривается задача массообмена тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости [1]:

$$\Delta c = \frac{\mathrm{Pe}}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial\theta}\right) \text{ вне } \bar{\Omega}, \tag{1}$$

$$c\big|_{\partial\Omega} = c_0, \tag{2}$$

$$c \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{3}$$

где $c = c(r,\theta)$ – концентрация, c_0 – заданная концентрация на границе $\partial\Omega$ обтекаемого тела, $\Delta c = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial c}{\partial\theta}\right)$, Pe – число Пекле, $\psi = \psi(r,\theta)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$, $v_\varphi = 0$.

Функцию тока $\psi(r,\theta)$ можно найти, например, как решение следующей линеаризованной задачи медленного обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью (приближение Стокса) [1, 2]

$$E^2(E^2\psi) = 0 \text{ вне } \bar{\Omega}, \tag{4}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

$$\psi \sim \frac{1}{2}U_\infty r^2 \sin^2\theta \text{ при } r \to \infty, \tag{6}$$

где $E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Метод решения задачи (4) – (6) описан в [3]. Приближенное решение задачи (1) – (3) ищем в виде функции $c = c_0(1-\omega_M) + \omega_M\Psi_1 + \omega_M(1-\omega_M)\Psi_2$, которая при любом выборе достаточно гладких функций Ψ_1 и Ψ_2 ($\Psi_1 \to 0$ при $r \to +\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3), $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp(M\omega(\omega - M)^{-1}), & 0 \le \omega < M, \\ 1, & \omega \ge M, \end{cases}$ а ω – функция, обладающая такими свойствами: 1) $\omega > 0$ вне $\overline{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$ – строится с использованием конструктивного аппарата теории *R*-функций.

Для аппроксимации неопределенных компонент Ψ_1 и Ψ_2 используется проекционный метод Галеркина-Петрова [5]. Функции Ψ_1 и Ψ_2 аппроксимируются выражениями вида $\Psi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k \varphi_k$, $\Psi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \tau_j$, где $\{\varphi_k\} = \left\{1, r^n P_n^m(\cos\theta)\right\}$, $\{\tau_j\} = \{r^{-1}, r^{-n-1}, P_n^m(\cos\theta)\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, $P_n^m(\cos\theta)$; $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединенные функции Лежандра.

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и эллипсоида вращения $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ при $c_0 = 1$, $Pe = 10$ и $M = 5$. На рис. 1 приведены линии концентрации для сферы, на рис. 2 – для эллипсоида вращения.

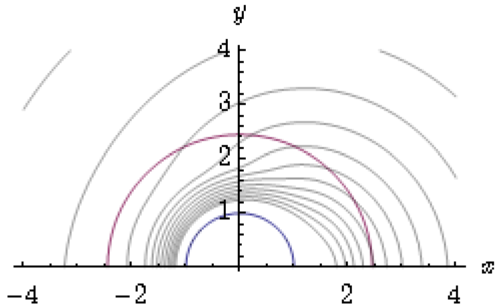

Рис. 1

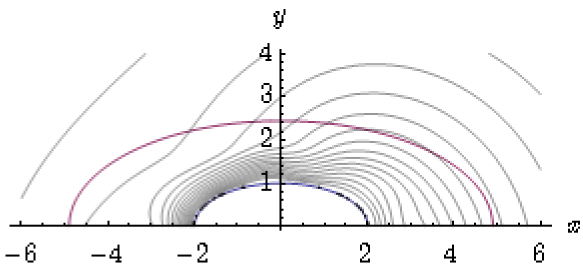

Рис. 2

1. *Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А.* Химическая гидродинамика: Спр. пособ. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.

2. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.

3. *Ламтюгова С.Н.* Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №1. – С. 112 – 122.

4. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

5. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. – 420 с.