ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВНЕШНИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (ПРИБЛИЖЕНИЕ ОЗЕЕНА) МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

Ламтюгова С.Н.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр.Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36)
e-mail: maliatko@gmail.com

The slow flows of a viscous incompressible fluid around the infinite cylinder are treated in the paper. For the mathematical description of the current the Oseen linearization is used. For the numerical analysis of the flow it is offered to apply the R-functions method in a combination with the projective Galerkin-Petrov method. The computational experiment has been conducted for the elliptical cylinder.

Расчет вязких течений представляет собой важный класс прикладных задач. Необходимость в моделировании вязких течений возникает, например, в гидроаэродинамике, теплоэнергетике, химической кинетике, биомедицине и т.д. Возникающие при этом краевые и начально-краевые задачи математической физики обычно сложны по своей постановке и поддаются анализу лишь численными методами. В работе рассматривается задача медленного обтекания бесконечного эллиптического цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Течение описывается уравнением (приближение Озеена) [1]

$$\left(D^2-\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)D^2\psi=0 \text{ вне } \overline{\Omega},$$

где $D^2=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$, $\psi=\psi(r,\theta)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями [2]

$$v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ v_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\ v_z=0;$$

(r,θ,z) – переменные цилиндрической системы координат.

Если граница тела непроницаема и неподвижна, то

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль, поведение функции тока на бесконечности задается в виде

$$\psi\sim U_\infty r\sin\theta \text{ при } r\to\infty, \qquad (2)$$

где U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Нами доказана теорема.

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 = o(r)$ при $r \to \infty$, т.е. $\Phi_1 \cdot r^{-1} \to 0$ при $r \to +\infty$) краевым условиям (1) и условию на бесконечности (2) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2,$$

где $\psi_0 = U_\infty\left(r - \dfrac{R^2}{r}\right)\sin\theta$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R (считаем, что цилиндр радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела), $\omega_M = f_M(\omega)$,

$$f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp\dfrac{M\omega}{\omega - M}, & 0 \le \omega < M, \\ 1, & \omega \ge M, \end{cases}$$

а ω – функция, обладающая такими свойствами:

$$1)\ \omega > 0 \text{ вне } \overline{\Omega};\quad 2)\ \omega = 0 \text{ на } \partial\Omega;\quad 3)\ \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = 1 \text{ на } \partial\Omega.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 воспользуемся проекционным методом Галеркина-Петрова [4]. Функции Φ_1 и Φ_2 представим в виде $\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum\limits_{k=1}^{m_1} a_k\varphi_k$, $\Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum\limits_{j=1}^{m_2} b_j\tau_j$, где

$$\{\varphi_k(r,\theta)\} = \{r^{2-k}\cos k\theta, r^{2-k}\sin k\theta,\ k = 3,4,...;\ r^{-k}\cos k\theta, r^{-k}\sin k\theta,\ k = 1,2,...\}$$

– полная система частных решений уравнения $D^4\psi = 0$ относительно внешности цилиндра конечного радиуса;

$$\{\tau_j(r,\theta)\} = \{\cos 2\theta, \sin 2\theta, r^{j+2}\cos j\theta,\ r^{j+2}\sin j\theta, r^j\cos j\theta,\ r^j\sin j\theta,\quad j = 1,2,...\}$$

– полная система частных решений уравнения $D^4\psi = 0$ относительно области $\{\omega(r,\theta) < M\}$.

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания эллиптического цилиндра ($U_\infty = 1,\ a = 2,\ b = 1,\ m_1 = 2,\ m_2 = 4,\ M = 0{,}7$).

1. *Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.Г.* Расчет стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 1975. – 15, № 1. – С. 183–196.

2. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.

3. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 420 с.