УДК 519.63:517.958

Численный анализ вязких течений, усложненных массообменом, методом R-функций

С. Н. Ламтюгова
Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

The task of mass transfer of the body of revolution with uniform viscous flow is considered. A numerical method for its solution, based on the joint use of the R-functions structural method of V.L. Rvachev, Ukraine NAS academician, for constructing the structure of the boundary problem solution and the Galerkin-Petrov projection method for approximating the indeterminate components of the structure, is proposed.

Key words: *вязкое течение, массообмен, метод R-функций, метод Галеркина-Петрова .*

1. Введение

Задачи массообмена тел с равномерным вязким потоком лежат в основе расчета многих технологических процессов, связанных с растворением, экстракцией, испарением, осаждением коллоидов и т.д. [1]. Такие задачи также находят применение в теплоэнергетике, химической и пищевой технологиях, гео- и астрофизических исследованиях, охране окружающей среды.

В общем случае задача о стационарном массообмене тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению уравнения гидродинамического обтекания поверхности и уравнения для концентрации с соответствующими краевыми условиями на поверхности тела и вдали от него. Точно учесть геометрию области, а также краевые условия (в т.ч. и условие на бесконечности), можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2].

Целью настоящего исследования является разработка нового метода численного анализа задачи массообмена тела вращения с равномерным поступательным потоком, основанного на совместном применении структурного метода R-функций и проекционного метода Галеркина-Петрова.

Эта работа опирается на метод R-функций акад. В.Л. Рвачева [2] и его применения к расчету стационарных течений жидкости в бесконечных односвязных областях сложной геометрии [3].

2. Постановка задачи

Рассмотрим массообмен тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости. Считаем, что в пространстве введена декартова система координат $(x,\ y,\ z)$, а обтекаемое тело образовано вращением вокруг оси Oz фигуры Ω, лежащей в плоскости Oxz (фигура Ω односвязная, конечная и симметричная относительно оси Oz). Кроме того, предположим, что поток жидкости равномерный, его скорость равна U_∞ вдали от тела и он сонаправлен с осью Ox. Такие течения удобно рассматривать в сферической системе координат. В осесимметричных задачах в сферической системе координат r, θ, φ все величины не зависят от координаты φ и третья компонента скорости жидкости равна нулю: $v_\varphi = 0$. Тогда остальные две компоненты скорости жидкости можно представить в виде [1, 4]

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{1}$$

где $\psi = \psi(r,\theta)$ – функция тока.

Процесс массопереноса описывается уравнением для концентрации [1]

$$\Delta c = \mathrm{Pe}(\vec{v} \cdot \nabla) c, \tag{2}$$

где $c = c(r,\theta)$ – концентрация, Pe – число Пекле,

$$\Delta c = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right),$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) c = v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta}.$$

Подставив (1) в (2), для концентрации $c = c(r,\theta)$ получим следующую задачу

$$\Delta c = \frac{\mathrm{Pe}}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \text{ вне } \bar{\Omega}, \tag{3}$$

$$c\big|_{\partial\Omega} = c_0, \tag{4}$$

$$c \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{5}$$

где c_0 - заданная концентрация на границе $\partial\Omega$ обтекаемого тела.

Функцию тока $\psi(r,\theta)$ можно найти, например, как решение следующей линеаризованной задачи медленного обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью (приближение Стокса) [1, 4]

$$E^2\left(E^2\psi\right) = 0 \text{ вне } \bar{\Omega}, \tag{6}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7}$$

$$\psi \sim \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2\theta \text{ при } r \to \infty, \tag{8}$$

где $E^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{\sin\theta}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \right)$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Итак, решение задачи (3) – (5) состоит из двух этапов:

1) нахождение функции тока как решения задачи (6) – (8);

2) решение задачи (3) – (5).

3. Метод решения

Для решения поставленных задач воспользуемся методом R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2]: с помощью конструктивных средств теории R-функций построим структуру решения краевых задач, т.е. пучок функций, точно удовлетворяющий краевым условиям.

Пусть вне $\bar{\Omega}$ известна достаточно гладкая функция $\omega(r,\theta)$, обладающая следующими свойствами:

$$1)\ \omega(r,\theta)>0 \text{ вне } \bar{\Omega};\ 2)\ \omega(r,\theta)=0 \text{ на } \partial\Omega;\ 3)\ \frac{\partial\omega(r,\theta)}{\partial\mathbf{n}}=-1 \text{ на } \partial\Omega.$$

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию $y=f_M(x)$, удовлетворяющую следующим требованиям:

$$\text{а) } f_M(0)=0;\ \text{б) } f_M'(0)=1;\ \text{в) } f_M'(0)\ge 0\ \ \forall x\ge 0;$$

$$\text{г) } f_M(x)\equiv 1\ \ \forall x\ge M\ \ (M=\mathrm{const}>0).$$

Условиям а) – г) удовлетворяет, например, функция [3]

$$f_M(x)=\begin{cases}1-\exp\dfrac{Mx}{x-M}, & 0\le x<M;\\ 1, & x\ge M.\end{cases}$$

Ясно, что такая $f_M(x)\in C^\infty[0,+\infty)$. Обозначим

$$\omega_M(r,\theta)=f_M[\omega(r,\theta)]. \tag{9}$$

Функция $\omega_M(r,\theta)$ удовлетворяет условиям 1) – 3). Кроме того, $\omega_M(r,\theta)\equiv 1$, если $\omega(r,\theta)\ge M$. Заметим, что это условие означает, что если функция $\omega(r,\theta)$ монотонно возрастает при удалении от $\partial\Omega$, то функция $\omega_M(r,\theta)$ вида (9) отлична от единицы лишь в некоторой кольцеобразной области $\{0\le\omega(r,\theta)<M\}$, которая содержится во внешности $\bar{\Omega}$ и прилегает к $\partial\Omega$.

В работе [5] показано, что при любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1\cdot r^{-2}\to 0$ при $r\to+\infty$) краевым условиям (7) и условию на бесконечности (8) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi=\omega_M^2(\psi_0+\Phi_1)+\omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2, \tag{10}$$

где $\psi_0=\dfrac{1}{4}U_\infty(r-R)^2\left(2+\dfrac{R}{r}\right)\sin^2\theta$ – решение Стокса для задачи обтекания сферы радиуса R (считаем, что сфера радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела).

Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 воспользуемся методом Галеркина-Петрова [5, 6].

Подставив найденную функцию тока в уравнение (3), решим задачу (3) – (5) также методом R-функций.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Ψ_1 и Ψ_2 ($\Psi_1\to 0$ при $r\to+\infty$) краевым условиям (4) и (5) точно удовлетворяет функция вида

$$c=c_0(1-\omega_M)+\omega_M\Psi_1+\omega_M(1-\omega_M)\Psi_2.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент Ψ_1 и Ψ_2 также воспользуемся методом Галеркина-Петрова [6]. Функции Ψ_1 и Ψ_2 представим в виде

$$\Psi_1\approx\Psi_1^{m_3}=\sum_{k=1}^{m_3}\alpha_k\phi_k,\ \ \Psi_2\approx\Psi_2^{m_4}=\sum_{j=1}^{m_4}\beta_j\gamma_j,$$

где

$\{\phi_k(r,\theta)\} = \left\{ r^{-k} \begin{matrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{matrix} \right\}$, $k = 1,2,\ldots$, – полная система частных решений уравнения Лапласа относительно области $\{\omega(r,\theta) > 0\}$;

$\{\gamma_j(r,\theta)\} = \left\{ r^{j} \begin{matrix} \cos j\theta \\ \sin j\theta \end{matrix} \right\}$, $j = 1,2,\ldots$, – полная система частных решений уравнения Лапласа относительно области $\{\omega(r,\theta) < M\}$.

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\left\{ \omega_M(r,\theta)\, r^{-k} \begin{matrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{matrix}, \omega_M(r,\theta)\,(1-\omega_M(r,\theta))\, r^{j} \begin{matrix} \cos j\theta \\ \sin j\theta \end{matrix} \right\}, \ k, j = 1,2,\ldots \qquad (12)$$

Согласно методу Галеркина-Петрова коэффициенты α_k ($k = 1,2,\ldots,m_3$) и β_j ($j = 1,2,\ldots,m_4$) находим из условия ортогональности невязки первым $m_3 + m_4$ элементам последовательности (12). Таким образом, мы получим приближенное решение задачи (3) – (5).

4. Выводы

В работе впервые предложен метод расчета массообмена тела вращения с равномерным поступательным потоком, основанный на совместном применении структурного метода R-функций и проекционного метода Галеркина-Петрова, который отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает все краевые условия задачи. Разработанный метод позволяет проводить математическое моделирование разных технологических и физико-механических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А. Химическая гидродинамика: Спр. пос. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.
2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
3. Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л. Про один метод розв’язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1972. – № 9. – С. 837 – 839.
4. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
5. Ламтюгова С.М., Сидоров М.В.. Застосування методу R-функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в’язкої рідини // Відбір та обробка інформації. – 2012. – № 36 (112) – С. 56 – 62.
6. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

Надійшла 18.03.2013.