Про один метод розв'язання зовнішніх задач гідродинаміки в'язкої рідини у наближенні Стокса

Ламтюгова Світлана Миколаївна

Харківський національний університет радіоелектроніки

e-mail: maliatko@gmail.com

Розрахунок в'язких течій – це важливий клас прикладних задач. Необхідність моделювати в'язкі течії виникає, наприклад, в гидроаеродинаміці, теплоенергетиці, хімічній кінетиці, біомедицині і т. д. Крайові і початково-крайові задачі математичної фізики, що виникають при цьому, зазвичай складні за своєю постановкою і піддаються аналізу лише чисельними методами. У роботі пропонується чисельний метод розрахунку повільного обтікання тіла в'язкою нестисливою рідиною за наявності в течії осьової симетрії (немає залежності від кута φ). Течія описується рівнянням (наближення Стоксу)

$$E^2(E^2\psi)=0 \ \text{ зовні } \ \Omega, \tag{1}$$

де $E^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $\psi=\psi(r,\theta)$ – функція течії, пов'язана з компонентами вектора швидкості співвідношеннями $v_r=\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta=-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$, $v_\varphi=0$; (r, θ, φ) – змінні сферичної системи координат.

Якщо межа тіла непроникна та нерухома, то

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=0 \ \text{ и } \ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль; поведінка функції течії на нескінченності така:

$$\lim_{r\to\infty}\psi=\frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta, \tag{3}$$

де U_∞ – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

Нами доведено таку теорему.

Теорема. При будь-якому виборі досить гладких функцій Φ_1 і Φ_2 ($\Phi_1 \to 0$

при $r \to \infty$) крайовим умовам (2) і умові на нескінченності (3) точно задовольняє функція вигляду

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2,$$

де $\psi_0 = 0{,}25U_\infty(r-R)^2\left(2+\dfrac{R}{r}\right)\sin^2\theta$ – розв'язок Стоксу для задачі про обтікання сфери радіусу R, $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega) = \begin{cases} 1-\exp(\omega(\omega-M)^{-1}), & 0 \le \omega < M, \\ 1, & \omega \ge M, \end{cases}$ а ω – така функція, що: 1) $\omega > 0$ зовні Ω; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = 1$ на $\partial\Omega$.

Вважаємо, що сфера радіусу R належить тілу, що обтікається. Функція ω з вказаними властивостями будується за допомогою методу R-функцій, для апроксимації невизначених компонент Φ_1 і Φ_2 використовується проекційний метод Гальоркіна-Петрова, причому функція Φ_1 апроксимується виразом вигляду $\sum_{k=1}^{n_1} a_k\varphi_k$, де $\{\varphi_k\}$ – повна система частинних розв'язків рівняння (1) відносно сфери скінченного радіусу.

Література:

1. Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика: Справочное пособие . М.: Квантум, 1996. – 336 с.

2. Колосова С.В. До питания про деякі осесиметричні рухи рідини, ДАН УРСР, сер. А, № 12, 1970, 1098-1100.

3. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. – 630 с.