ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ R-ФУНКЦИЙ И ГАЛЕРКИНА К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Ламтюгова С. Н.
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел.: +38 (057) 702-1436, E-mail: maliatko@gmail.com

Рассмотрим стационарное обтекание тела вращения потоком вязкой несжимаемой жидкости в сферической системе координат (r, θ, φ):

$$\nu E^2\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial E\psi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial E\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)E\psi \text{ вне } \bar{\Omega}, \quad (1)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

$$\psi \sim \frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta \text{ при } r\to\infty, \quad (3)$$

где $E\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$, $E^2\psi = E(E\psi)$, $\psi = \psi(r,\theta)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$, $v_\varphi = 0$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль, U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Для решения задачи (1) – (3) используем метод R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева.

Известно, что уравнение (1) имеет частное решение вида

$$\psi = \psi(r,\theta) = \left(c_1r^2 + c_2r^{-1}\right)\sin^2\theta,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, причем такая ψ удовлетворяет и уравнению $E\psi = 0$. Тогда функция

$$\psi_0 = \psi_0(r,\theta) = \omega_M^2(r,\theta)\frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta \quad (4)$$

удовлетворяет краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3). Здесь $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{M\omega}{\omega - M}}, & 0 \le \omega < M, \\ 1, & \omega \ge M, \end{cases}$ а ω – функция, обладающая свойствами: 1) $\omega > 0$ вне $\bar{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$ – строится с использованием конструктивного аппарата теории R-функций.

Кроме того, на функции ψ_0 вида (4) в области $\{\omega(r,\theta) \ge M\}$ уравнение (1) обращается в тождество.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1\cdot r^{-2} \to 0$ при $r\to+\infty$) краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3) удовлетворяет пучок функций

$$\psi = \psi_0 + \omega_M^2\Phi_1 + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2, \quad (5)$$

где функция ψ_0 имеет вид (4).

Функции Φ_1 и Φ_2 в (5) аппроксимируются выражениями вида

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum\nolimits_{k=1}^{m_1} \alpha_k \varphi_k, \ \Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum\nolimits_{j=1}^{m_2} \beta_j \tau_j,$$

где $\{\varphi_k\} = \left\{ r^{1-k} J_k(\cos\theta), k = 2,3,...; r^{3-k} J_k(\cos\theta), k = 4,5,... \right\}$ – полная система частных решений уравнения $E^2\psi = 0$ относительно внешности сферы конечного радиуса; $\{\tau_j\} = \left\{ rJ_2(\cos\theta), J_3(\cos\theta), r^j J_j(\cos\theta), r^{j+2} J_j(\cos\theta), j = 2,3,... \right\}$ – полная система частных решений уравнения $E^2\psi = 0$ относительно области $\{\omega(r,\theta) < M\}$, так что

$$\psi \approx \psi_N = \psi_0 + \omega_M^2 \Phi_1^{m_1} + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2^{m_2}.$$

Для нахождения коэффициентов α_k и β_j воспользуемся методом Галеркина, взяв в качестве проекционной систему функций

$$\{f_i\} = \{\omega_M^2(r,\theta) r^{1-k} J_k(\cos\theta), k = 2,3,...; \omega_M^2(r,\theta) r^{3-k} J_k(\cos\theta), k = 4,5,...;$$
$$\omega_M^2(r,\theta)(1 - \omega_M(r,\theta)) rJ_2(\cos\theta), \omega_M^2(r,\theta)(1 - \omega_M(r,\theta)) J_3(\cos\theta),$$
$$\omega_M^2(r,\theta)(1 - \omega_M(r,\theta)) r^j J_j(\cos\theta); \omega_M^2(r,\theta)(1 - \omega_M(r,\theta)) r^{j+2} J_j(\cos\theta), j = 2,3,...\}.$$

Тогда α_k и β_j найдем из условия ортогональности невязки R_N элементам f_1, ..., f_N проекционной последовательности:

$$(R_N, \ f_i) = 0, \ i = \overline{1, \ N}, \ N = m_1 + m_2, \qquad (6)$$

где $R_N = \nu E^2 \psi_N - \dfrac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\dfrac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \dfrac{\partial E\psi_N}{\partial r} - \dfrac{\partial \psi_N}{\partial r} \dfrac{\partial E\psi_N}{\partial \theta} \right) - \dfrac{1}{r^2 \sin\theta} \left(2 \operatorname{ctg}\theta \dfrac{\partial \psi_N}{\partial r} - \dfrac{2}{r} \dfrac{\partial \psi_N}{\partial \theta} \right) E\psi_N$,

причем в силу свойств функции ω_M и координатных функций интегрирование в (6) при вычислении скалярных произведений можно производить только по конечной области $\left\{ 0 \le \omega(r,\theta) < M \right\}$.

В результате получим систему нелинейных уравнений, каждое из которых представляет собой квадратичную функцию относительно α_k и β_j. Полученную систему решаем методом Ньютона. В качестве начального приближения выбирается набор α_k и β_j, соответствующий решению задачи Стокса или, при больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = \nu^{-1}$, решению, полученному при меньших числах Рейнольдса.

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ при $R = 1$, $U_\infty = 1$, $M = 10$, $m_1 = 10$, $m_2 = 14$ и $\mathrm{Re} = 10, 20, 30$. На рис. 1, 2 приведены линии уровня функции тока течения для $\mathrm{Re} = 20, 30$.

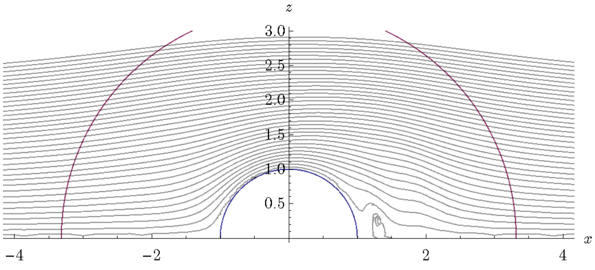

Рис. 1
Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 20$

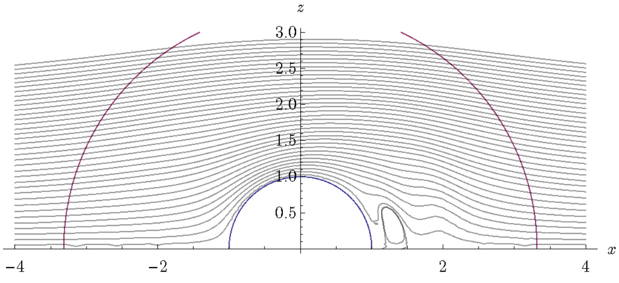

Рис. 2
Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 30$