ОБ ОДНОЙ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧЕ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ламтюгова С. Н.
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел.: +38 (057) 702-1436, E-mail: maliatko@gmail.com

Задачи моделирования вязких течений вызывают значительный интерес в различных областях науки и техники. Во многих практически важных случаях происходящие в жидкости процессы могут быть промоделированы с помощью уравнений Навье-Стокса. Эти уравнения заметно упрощаются для течений с малым числом Рейнольдса. В работе рассматривается задача медленного обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью в приближении Озеена. Течение описывается уравнением

$$\left(\Delta - \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Delta\psi = 0 \quad \text{вне } \overline{\Omega}, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$, $\psi = \psi(r,\theta)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$, $v_z = 0$; (r,θ,z) – переменные цилиндрической системы координат.

Если граница тела непроницаема и неподвижна, то

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Поведение функции тока на бесконечности задается в виде

$$\psi \sim U_\infty r \sin\theta \ \text{ при } \ r \to \infty, \tag{3}$$

где U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Приближенное решение задачи (1)-(3) ищется в виде функции

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2,$$

которая при любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \cdot r^{-1} \to 0$ при $r \to +\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3), $\psi_0 = U_\infty\left(r - R^2 \cdot r^{-1}\right)\sin\theta$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R (считаем, что цилиндр радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела), $\omega_M = f_M(\omega)$,

$$f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - \exp(M\omega(\omega - M)^{-1}), & 0 \le \omega < M, \\ 1, & \omega \ge M, \end{cases}$$

а ω – функция, обладающая такими свойствами: 1) $\omega > 0$ вне $\overline{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = 1$ на $\partial\Omega$ – строится с использованием конструктивного аппарата теории R-функций.

Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 используется проекционный метод Галеркина-Петрова, причем функция Φ_1 аппроксимируется выражением вида $\sum_{k=1}^{n_1} a_k\varphi_k$, где $\{\varphi_k\}$ – полная система частных решений уравнения $D^4\psi = 0$ относительно внешности цилиндра конечного радиуса.