ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ламтюгова С. Н.
Научные руководители: к. ф.-м. н., проф. Колосова С.В.,
к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковская национальная академия городского хозяйства
61002, Харьков, ул. Революции, 12, каф. «Высшая математика»,
тел.: (057) 707-3130, E-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

Расчет вязких течений представляет собой важный класс прикладных задач. Необходимость моделировать вязкие течения возникает, например, в гидроаэродинамике, теплоэнергетике, химической кинетике, биомедицине и т.д. Возникающие при этом краевые и начально-краевые задачи математической физики обычно сложны по своей постановке и поддаются анализу лишь численными методами. В настоящей работе предлагается численный метод расчета медленного обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью при наличии в течении осевой симметрии (нет зависимости от угла φ). Течение описывается уравнением (приближение Стокса)

$$E^2(E^2\psi)=0 \text{ вне } \Omega, \tag{1}$$

где $E^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $\psi=\psi(r,\theta)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_r=\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta=-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$, $v_\varphi=0$; (r, θ, φ) – переменные сферической системы координат.

Если граница тела непроницаема и неподвижна, то

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=0 \text{ и } \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль, поведение функции тока на бесконечности задается в виде

$$\psi\to\frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta \text{ при } r\to\infty, \tag{3}$$

где U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1\to 0$ при $r\to\infty$) краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi=\omega_M^2(\psi_0+\Phi_1)+\omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2,$$

где $\psi_0=\dfrac{1}{4}U_\infty(r-R)^2(2+Rr^{-1})\sin^2\theta$ – решение Стокса для задачи об обтекании сферы радиуса R, $\omega_M=f_M(\omega)$, $f_M(\omega)=\begin{cases}1-\exp(\omega(\omega-M)^{-1}), & 0\le\omega<M,\\ 1, & \omega\ge M,\end{cases}$ а ω – функция, обладающая такими свойствами: 1) $\omega>0$ вне Ω; 2) $\omega=0$ на $\partial\Omega$; 3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}=1$ на $\partial\Omega$.

Здесь предполагается, что сфера радиуса R содержится в обтекаемом теле, функция ω с указанными свойствами строится с использованием конструктивного аппарата теории R-функций, а для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 используется проекционный метод Галеркина-Петрова, причем функция Φ_1 аппроксимируется выражением вида $\sum_{k=1}^{n_1}a_k\varphi_k$, где $\{\varphi_k\}$ – полная система частных решений уравнения (1) относительно сферы конечного радиуса.