УДК 519.34
Ропавка Александр Иванович, канд. физ.-матем. наук, доц.
Бораковский Александр Васильевич
Щеглов Виктор Антонович, канд. физ.-матем наук
Харьковская национальная академия городского хозяйства
ул. Революции, 12, г.Харьков,
61002, Украина

ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ТЕОРИЕЙ ТОНКИХ ПЛАСТИН

При решении многих задач все большее значение приобретает вычислительный эксперимент, позволяющий исследовать процессы по их математическим моделям.

Имеется ряд теорем общего характера, позволяющий априорно судить о достигаемой точности.

Цель настоящей работы – разработка двойственных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных (изгиб тонких пластин, плоская задача теории упругости).

Работа направлена на дальнейшее развитие двойственных методов решения краевых задач математической физики с апостериорной оценкой погрешности. Предлагаемый нами метод построения двойственных функционалов приводит к экстремальным задачам на классах функций, которые не обязаны удовлетворять каким-либо дополнительным условиям внутри области (а в некоторых случаях и на границе).

Изложим подход к получению апостериорных оценок погрешности, состоящий в следующем. Путь H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (,), $A: H \to H$ – линейный оператор с областью определения D_A, обладающий свойствами:

1) D_A – область определения оператора A, линейная и плотная в гильбертовом пространстве H, т.е. каждый элемент $\varphi \in H$ может быть получен как предел последовательности $\varphi_n \in D_A$;

2) симметричен, т.е. $(au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in D_A$;

3) положительно определенный, т.е. $\exists \gamma = const > 0: \quad (Au,u) \geq \gamma^2 \|u\|$ $\forall u \in D_A$.

Скалярное произведение и норму в D_A определим следующим образом: $[\varphi,\psi] = (A\varphi,\psi)$, $|\varphi| = \sqrt{[\varphi,\varphi]}$.

Пополняя D_A по введенной норме, приходим к полному гильбертову пространству H_A, которое называется энергетическим пространством, порожденным оператором A.

$$\forall u \in D_A \quad |\, u \,|^2 = [u,u] = (Au,u)_H \,.$$

Уравнение $Au = f$ в пространстве H имеет обобщенное решение u_0, которое единственно и доставляет минимум в H_A функционалу

$$I^0(u) = \frac{1}{2}[u,u] - [u,u_0] = \frac{1}{2}\,|\, u - u_0 \,|^2 - \frac{1}{2}\,|\, u_0 \,|^2. \tag{1}$$

u_0 – элемент H_A такой, что $\forall u \in H_A$ $[u,u_0] = (f,u)$.

Следовательно, если известны функционал $I_0(\lambda)$ и множество Λ такие, что $\inf\limits_{u\in H_A} I^0(u) = -\frac{1}{2}\,|\, u_0 \,|^2 = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_0(\lambda)$, то для любого приближенного решения u_n прямой задачи

$$I^0(u) \xrightarrow[u\in H_A]{} \inf \tag{2}$$

с помощью приближенного решения λ_n экстремальной задачи

$$I_0(\lambda) \xrightarrow[\lambda\in\Lambda]{} \sup \tag{3}$$

можно оценить отклонение u_n от u_0 в пространстве H_A по энергетической норме:

$$\frac{1}{2}\,|\, u_n - u_0 \,|^2 \le I^0(u_n) - I_0(\lambda_n)\,. \tag{4}$$

В наиболее общем виде такие задачи описываются дифференциальным уравнением

$$Au = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \vartheta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \vartheta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right] +$$

$$+2(1-\vartheta)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[D\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right] + cu - \operatorname{div}(T\nabla u) = f\,. \tag{5}$$

Рассматривается краевая задача для уравнения (5) при $T = 0$ и $C \ge 0$. Для нее с краевыми условиями построен двойственный функционал

$$I_0(\xi,\eta,\mu) = -\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{D(1-\vartheta^2)}\left(\xi_1^2 - 2\vartheta\xi_1\xi_2 + \xi_2^2\right) + \frac{2}{D(1-\vartheta)}\eta^2 + \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \mu_1\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\xi_2}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \mu_2\right) + \frac{1}{\delta}s^2(\mu,\xi)\right\}d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega_3}\left.\frac{\left(\xi_1 n_x^2 + \xi_2 n_y^2 + 2\eta n_x n_y\right)^2}{k}\right\}ds\,. \tag{6}$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2,$ $\mu = (\mu_1, \mu_2)$. Вспомогательный функциональный параметр $\alpha = (\alpha_1, \varepsilon_2) \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^2$ и должен быть выбран таким образом, чтобы выполнялось

$$\delta = c + \operatorname{div}\alpha - |\alpha|^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{D(1+\vartheta)} > 0 \text{ в } \Omega, \quad |\alpha| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Строится двойственный функционал для задачи, связанной с плоской задачей теории упругости:

$$\Delta\Delta u + cu = f, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

$$u = \varphi_1, \ x \in \partial\Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi_2, \ x \in \partial\Omega, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in L_2(\partial\Omega). \tag{8}$$

В общем случае $\Omega \subset R^m$. Связанная с ней экстремальная задача имеет вид:

$$I^0(u) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}(\Delta u)^2 + \frac{1}{2}cu^2 - uf \right\} d\Omega \xrightarrow[u \in U_\varphi]{} \inf, \tag{9}$$

$$U_\varphi = \left\{ W_2^2(\Omega): \quad \forall x \in \partial\Omega \quad u = \varphi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi_2 \right\}. \tag{10}$$

При тех же требованиях на α (при $D = 1$) и тех же обозначениях получено

$$I^0(u) \ge I_0(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \lambda^2 + |\nabla\lambda + \mu|^2 + \frac{s^2}{\delta} \right\} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \{ \lambda\varphi_2 + \varphi_1 < \mu, n > \} ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \{ \varphi_1^2 < \alpha, n > + \varphi_1\varphi_2 \} ds. \tag{11}$$

Равенство достигается, если $u = u_0$ – точное решение (7)-(8) при $\lambda = \lambda_0 = \Delta u_0 + \frac{1}{2}u_0$, $\mu = \mu_0 = \nabla\mu_0 - \nabla\lambda_0 + u_0\alpha$, λ и μ не обязаны удовлетворять никаким ограничениям ни внутри области, ни на границе.

Двойственный функционал в случае $c \ge 0$ построен для задачи

$$\Delta(D\Delta u) - \operatorname{div}(T\nabla u) + cu = f$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega_1, \tag{12}$$

$$u = \left[\Delta u - \frac{1-\vartheta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0, \quad x \in \partial\Omega_2, \tag{13}$$

$$u = \left[\Delta u - \left(\frac{1-\vartheta}{\rho} - k \right)\frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0, \quad x \in \partial\Omega_3.$$

Здесь, как и выше, $1/\rho$ – кривизна границы области.

С задачей (12)-(13) связана задача минимизации функционала

$$I^0(u) = \int_\Omega \left\{ D(\Delta u)^2 + < T\nabla u, \nabla u > + cu^2 - 2fu \right\} d\Omega -$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega_2\bigcup\partial\Omega_4}\left\{D\Delta u\frac{\partial u}{\partial n}\right\}ds\xrightarrow[u\in U]{}\inf\,. \tag{14}$$

Двойственный функционал имеет вид

$$I_0(\lambda,\mu)=-\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{D}\lambda^2+<\mu,T^{-1}\mu>+\frac{s^2}{\delta}\right\}d\Omega-\int\limits_{\partial\Omega_2}\left\{\lambda^2\frac{\rho}{D(1-\vartheta)}\right\}ds-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega_3}\left\{\lambda^2\frac{\rho}{D(1-\vartheta-k\rho)}\right\}ds\,,\quad \lambda,\mu_1,\mu_2\in W_2^1(\Omega)\,. \tag{15}$$

Выбор вектор-функции α , как и прежде, подчинен условию

$$\delta=c-<\alpha,T^{-1}\alpha>+\mathrm{div}\alpha\geq\delta_0>0\,.$$

Принято обозначение $s=f+\mathrm{div}\mu-\Delta\lambda-<\mu,T^{-1}\alpha>$. Предполагается, что $\dfrac{1-\vartheta}{\rho}\leq const<0$ на $\partial\Omega_2$, $\dfrac{1-\vartheta}{\rho}-k\leq const<0$ на $\partial\Omega_3$. На прямолинейных участках границы $1/\rho=0$, краевые условия упрощаются и выражение для двойственного функционала принимает вид

$$I_0(\lambda,\mu)=-\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{D}\lambda^2+<\mu,T^{-1}\mu>+\frac{s^2}{\delta}\right\}d\Omega-\int\limits_{\partial\Omega_3}\frac{\lambda^2}{kD}ds\,. \tag{16}$$

При этом на λ необходимо наложить ограничение $\lambda=0$ на $\partial\Omega_2$.

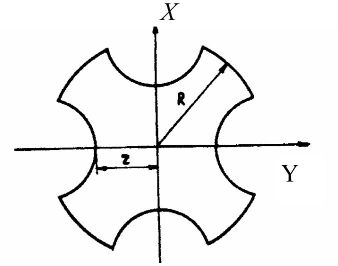
Доказана сходимость метода Ритца для ряда задач, решение которых проведено в работе для иллюстрации эффективности предлагаемого двойственного метода, получены соответствующие расчетные формулы для построения матрицы метода Ритца, описан способ построения координатных последовательностей. К числу особенностей численного решения двойственной задачи следует отнести то, что ее решение является вектор-функцией и матрица Ритца имеет блочную структуру, как в случае краевых задач для систем дифференциальных уравнений. Рассмотрен вопрос учета исходной информации о наличии у решения свойств симметрии различных типов. На практике часто возникают задачи, где f является кусочно-гладкой функцией. Частным случаем такого типа в теории тонких пластин является случай полосовой, или локальной, нагрузки. Для такого типа задач рассмотрена возможность ускорения сходимости метода Ритца при решении двойственной задачи с помощью введения в приближенное решение слагаемых специального вида.

На примере ряда задач были продемонстрированы возможности предложенного в работе двойственного метода для решения конкретных задач теории тонких пластин, решен ряд задач для случая полосовых нагрузок, что не только подтверждает эффективность метода, но и дает результаты, представляющие самостоятельный интерес.

Задача. В области $\Omega \subset R^2$, представляющей круг единичного радиуса с симметричными гиперболическими вырезами, рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \Delta(D\Delta u) + cu = f, \quad (x,y) \in \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad \text{для} \quad (x,y) \in \Omega \quad f = \begin{cases} 0, \ -1 \le x < RL, \\ 1, \ RL \le x \le RP, \\ 0, \ RP < x < 1. \end{cases}$$

Примем $D = 1$, $c = 0$, $-RL = RP = r = 1/\sqrt{3}$.



$$x^2 - y^2 - r^2 = 0,$$
$$x^2 - y^2 - R^2 = 0.$$

Двойственный метод ее решения состоит в одновременном поиске $\inf I^0(u$ и $\sup I_0(\lambda, \mu)$:

$$I^0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ (\Delta u)^2 + cu^2 - uf \right\} d\Omega \xrightarrow[u \in U]{} \inf,$$

$$I_0(\lambda, \mu) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \lambda^2 + \left|\nabla\lambda + \mu\right|^2 + \frac{s^2}{\delta} \right\} d\Omega \xrightarrow[(\lambda,\mu) \in \Lambda]{} \sup.$$

Возьмем $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (x/2, y/2)^T$, тогда $\delta = c + \operatorname{div}\alpha - \left|\alpha\right|^2 - \frac{1}{4} > 0$ в Ω.

Решение прямой задачи ищем в виде: $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega^2 P_k$, где P_k – полином четных степеней от x и y, так как решение явно обладает симметрией относительно осей X и Y. При решении двойственной задачи в целях ускорения сходимости λ и вектор-функцию μ ищем в виде: $\lambda = g_\lambda + \tilde{\lambda}$, $\mu = g_\mu + \tilde{\mu}$, где g_λ и g_μ – учитывают особенности заданной f, а именно для $(x,y) \in \Omega$ $g_\mu^y = 0$,

$$g_\lambda = \begin{cases} xRL - \dfrac{RL^2}{2}, \ x < RL, \\ \dfrac{x^2}{2}, \ RL \le x \le RP, \\ xRP - \dfrac{RP^2}{2}, \ RP < x, \end{cases} \qquad g_\mu = \begin{cases} -x, \ RL \le x \le RP, \\ RL, \ x < RL, \\ -RP, \ x > RP. \end{cases}$$

Учитывая симметричность решения прямой задачи и его связь с решением двойственной, $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ находили в виде: $\tilde{\lambda}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k P_k$, $\tilde{\mu}_n = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k P_k x, \sum_{k=1}^{n} d_k P_k y \right)$.

Интегрирование проводили по четвертой части области Ω, лежащей в первом квадранте, с использованием 14-точечных квадратичных формул Гаусса. В таблице приведены значения прямого и двойственного функционалов в зависимости от числа использованных для аппроксимации $\tilde{\lambda}_0$, $\tilde{\mu}_0$ координатных функций n.

n	3	10	15	21	36
$I^0 \cdot 10^3$	-0,25560	-0,28977	-0,29169	-0,29201	-0,29295
$I_0 \cdot 10^3$	-1,76663	-0,37892	-0,31028	-0,30420	-0,29352

Таким образом, в работе предложен метод построения двойственных функционалов, основанный на учете структуры операторов краевых задач и возможности ее модификации. Построены новые двойственные функционалы для краевых задач, связанных с изгибом тонких пластин и плоской задачей теории упругости. На основе их использования предложен новый двойственный метод решения краевых задач, позволяющий получать апостериорные оценки погрешностей приближенных численных решений. Преимуществом разработанного метода является то, что экстремум двойственного функционала ищется в классах функций, не обязанных удовлетворять дифференциальным связям внутри, а в ряде случаев и на границе области решения рассматриваемой задачи. Выполнен анализ вопросов, связанных с численной реализацией предложенного в работе двойственного метода, обосновано применение метода Ритца для решения двойственной задачи, доказана его сходимость, рассмотрены возможности учета исходной информации о решении.

На основе разработанного двойственного метода создано программное обеспечение, с помощью которого решен ряд краевых задач, связанных с изгибом тонких пластин под воздействием полосовой нагрузки. Результаты решения не только подтверждают эффективность предлагаемого метода и созданного на его основе программного обеспечения, но и представляют самостоятельный практический интерес.

Библиографический список

1. Калиниченко В.И., Кощий А.Ф., Ропавка А.И., Щеглов В.А. Пакет программ для решения краевых задач с оценкой точности // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1982. – Т.13, №5. – С.48-51.
2. Калиниченко В.И., Кощий А.Ф., Щеглов В.А. О решении краевых задач для эллиптических уравнений с заданной точностью. – Новосибирск, 1982. (Препринт / ВЦ СО СССР: 374).
3. Кощий А.Ф., Ропавка А.И., Щеглов В.А. О получении апостериорных оценок решений задач теплопроводности // Теплообмен и теплофизические свойства веществ. – К.: Институт технической теплофизики, 1984. – С.117-121.
4. Кощий А.Ф., Кощий В.Ф., Ропавка А.И., Щеглов В.А. Двойственные методы в задачах, связанных с теорией упругости // Тез. докл. III Всесоюзн. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела». – Харьков, 1985.
5. Щеглов В.А. Решение задачи об изгибе тонкой пластины двойственным методом // Численные методы и математическое моделирование. – М.: Отдел вычислит. матем. АН СССР, 1986. – С.153.-170.